UFPBVIRTUAL

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CCEN - Departamento de Matemática

Prof. Sérgio (`mat.ufpb.br/sergio`)

-1ª Lista/Roteiro — Matemática Elementar

Prof.: *Sérgio* Data: - Turno: *Virtual*

Curso: Nomes:

Período: Pólo: Matrícula:

1ª Questão Assinale as alternativas abaixo, com (**V**) VERDADEIRO ou (**F**) FALSO, **justificando cada resposta dada**, Considerando os conjuntos $\mathcal{A} = \{0,1,2,3,4\}$, $\mathcal{B} = \{a,e,i\}$ e $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cup \mathcal{P}(\mathcal{B})$

a) ( ) $n(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = 12$

b) ( ) O número de elementos de $\mathcal{P}(\mathcal{B}) = 9$

c) ( ) $\mathcal{A}$ é subconjunto de $\mathcal{D}$

d) ( ) $\{e\} \subset \mathcal{D}$

e) ( ) $a \notin \mathcal{D}$

f) ( ) $\{2, \mathcal{B}\} \subset \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{D})$

2ª Questão Considere a família $I_n = \left[-\dfrac{1}{n}, 1 + \dfrac{1}{n}\right]$ de intervalos fechados, onde $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$. Determine os conjuntos $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ e $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.

3ª Questão Considere $\mathcal{A} = \{0,1,2,3,4\}$ e $\sim$ a relação definida por: $a \sim b \Leftrightarrow a - b$ é múltiplo de 3.

a) A relação $\sim$ é uma relação de equivalência?

b) Quantos e quais são os elementos do conjunto quociente $\mathcal{A}/\sim = \{\overline{x}/x \in \mathcal{A}\}$ onde cada $\overline{x} = \{y \in \mathcal{A}/x \sim y\}$?

c) $\mathcal{A}/\sim$ é uma partição de $\mathcal{A}$?

4ª Questão Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x| - 1$ e $\sim$ uma relação de equivalência em $\mathbb{R}$ definida por: $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. Determine as classes de equivalência $\overline{0}$, $\overline{1}$ e $\overline{2}$.

5ª Questão No conjunto $\mathcal{H} = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ considere a relação de ordem parcial $\preceq$ induzida pelo diagrama de Hasse abaixo. Nos subconjuntos $\mathcal{H}$, $\mathcal{R} = \{a,d,e,f\}$ e $\mathcal{S} = \{b,c,e\}$, determine:

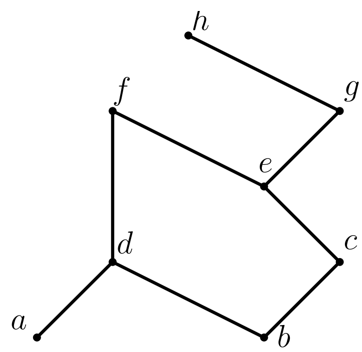
a) Os menores e maiores elementos;

b) Os elementos minimal e maximal;

c) As cotas inferiores e superiores, ínfimo e supremo;

d) Os conjuntos $\mathcal{H}$, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{R}$ são totalmente ordenado.

e) Os conjuntos $\mathcal{H}$, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{R}$ são bem ordenados.



R E S P O S T A S

1ª Questão Dados da questão:

- $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,
- $\mathcal{B} = \{a, e, i\}$ e
- $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cup \mathcal{P}(\mathcal{B})$

a) Falso pois $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ possui 15 elementos, como pode ser visto na tabela abaixo:

$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$	a	e	i
0	(0,a)	(0,e)	(0,i)
1	(1,a)	(1,e)	(1,i)
2	(2,a)	(2,e)	(2,i)
3	(3,a)	(3,e)	(3,i)
4	(4,a)	(4,e)	(4,i)

b) Falso pois o número de elementos do conjunto das partes[1] de $\mathcal{B}$ é $2^3 = 8$.

c) Verdadeiro pois todos os elementos de $\mathcal{A}$ estão em $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cup \mathcal{P}(\mathcal{B})$.

d) Falso pois $\{e\}$ é um elemento de $\mathcal{P}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{D}$.

e) Verdadeiro pois $a \notin \mathcal{A}$ e $a \notin \mathcal{P}(\mathcal{B})$.

f) Falso pois $\mathcal{B} \cap \mathcal{D} = \emptyset$ e $\mathcal{B} \notin \mathcal{A}$.

2ª Questão Dados da questão:

- $I_n = \left[-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$ e
- $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [0, 1]$, pois $-\frac{1}{n} < 0$ e $1 < 1 + \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ o que nos leva a concluir que $[0,1] \subset \left[-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = [-1, 2]$, pois $I_1 = [-1, 2] \supset I_2 = \left[-\frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right] \supset I_3 = \left[-\frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}\right] \supset \cdots \supset I_n = \left[-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$

3ª Questão Dados da questão:

- $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
- $a \sim b \Leftrightarrow a - b$ é múltiplo de 3

a) A relação $\sim$ é uma relação de equivalência?

$\sim$ é reflexiva pois se $a \sim a$ implica que $a - a = 0 = 3 \times 0$

$\sim$ é simétrica pois se $a \sim b$ implica que $a - b = 3n$ e como $b - a = 3(-m)$ temos que $b \sim a$

$\sim$ é transitiva pois se $a \sim b$ e $b \sim c$ implica que $a - b = 3n$ e $b - c = 3m$ logo $a - b + (b - c) = 3n + 3m$ e portanto $a - c = 3(n + m)$ ou seja $a \sim c$

b) Quantos e quais são os elementos do conjunto quociente $\mathcal{A}/\!\sim = \{\overline{x}/x \in \mathcal{A}\}$?

Elementos equivalentes a 0 são 0 e 3, pois $0 - 0 = 0 = 3 \times 0$ e $0 - 3 = -3 = 3 \times (-1)$, logo $\overline{0} = \overline{3} = \{0, 3\}$

Elementos equivalentes a 1 são 1 e 4, pois $1 - 1 = 0 = 3 \times 0$ e $1 - 4 = -3 = 3 \times (-1)$, logo $\overline{1} = \overline{4} = \{1, 4\}$

Elementos equivalentes a 2: 2 pois $2 - 2 = 0 = 3 \times 0$, logo $\overline{2} = \{2\}$

Portanto o conjunto quociente $A/\sim = \{\{0, 3\}, \{1, 4\}, \{2\}\} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ e possui 3 elementos.

c) $\mathcal{A}/\!\sim$ é uma partição de $\mathcal{A}$?

Os subconjuntos $\overline{0}, \overline{1}$ e $\overline{2}$ são não vazios;

Qualquer interseção entre os conjuntos $\overline{0}, \overline{1}$ e $\overline{2}$ é vazio;

A união dos subconjuntos $\overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2} = \mathcal{A}$;

Logo é uma partição.

4ª Questão Dados da questão:

- $f(x) = |x| - 1$ e
- $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

Elementos equivalentes a 0 é apenas o 0, pois $f(0) = -1$ e $|x| - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$, logo $\overline{0} = \{0\}$

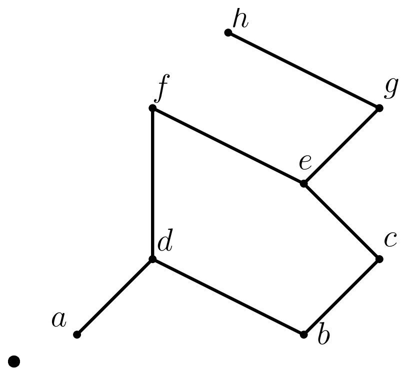
Elementos equivalentes a 1 são 1 e -1, pois $f(1) = 0$ e $|x| - 1 = 0 \Rightarrow x \pm 1$, logo $\overline{1} = \overline{-1} = \{-1, 1\}$

[1] Pelo teorema 3.4.2

Elementos equivalentes a 2 são 2 e -2, pois $f(2) = 1$ e $|x| - 1 = 1 \Rightarrow x \pm 2$, logo $\overline{2} = \overline{-2} = \{-2, 2\}$

5ª Questão Dados da questão:

- $\mathcal{H} = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
- $\mathcal{R} = \{a, d, e, f\}$
- $\mathcal{S} = \{b, c, e\}$



a) Os menores e maiores elementos;

	Menor	Maior
$\mathcal{H}$	$\{\}$	$\{\}$
$\mathcal{R}$	$\{\}$	$\{f\}$
$\mathcal{S}$	$\{b\}$	$\{e\}$

b) Os elementos minimal e maximal;

	Minimal	Maximal
$\mathcal{H}$	$\{a, b\}$	$\{f, g\}$
$\mathcal{R}$	$\{a, e\}$	$\{f\}$
$\mathcal{S}$	$\{b\}$	$\{e\}$

c) As cotas inferiores e superiores, ínfimo e supremo;

Cotas	Inferiores	Superiores
$\mathcal{H}$	$\{\}$	$\{\}$
$\mathcal{R}$	$\{\}$	$\{f\}$
$\mathcal{S}$	$\{b\}$	$\{e, f, g, h\}$

	Ínfimo	Supremo
$\mathcal{H}$	$\{\}$	$\{\}$
$\mathcal{R}$	$\{\}$	$\{f\}$
$\mathcal{S}$	$\{b\}$	$\{e\}$

d) Os conjuntos $\mathcal{H}$, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{R}$ são totalmente ordenado.

$\mathcal{H}$ não é, pois f e h não são comparáveis;

$\mathcal{R}$ não é, pois d e e não são comparáveis;

$\mathcal{S}$ é pois $b \preceq c \preceq e$.

e) Os conjuntos $\mathcal{H}$ $\mathcal{S}$ e $\mathcal{R}$ são bem ordenados.

$\mathcal{H}$ não é, pois o subconjunto $\{f, h\}$ não possui um menor elemento;

$\mathcal{R}$ não é, pois o subconjunto $\{d, e\}$ não possui um menor elemento;

$\mathcal{S}$ é pois, qualquer subconjunto de $\mathcal{S}$ possui um menor elemento.

Algumas definições: Sejam $(A, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $B \subseteq A$ um subconjunto não-vazio. Diremos que:

1. $b \in B$ é o **menor elemento**[2] de B se $b \preceq x$ para todo $x \in B$.
2. $b \in B$ é o **maior elemento**[3] de B se $x \preceq b$ para todo $x \in B$.
3. $b \in B$ é um **elemento minimal** de B se não existir $x \in B$, tal que $x \preceq b$.
4. $b \in B$ é um **elemento maximal** de B se não existir $x \in B$, tal que $b \preceq x$.
5. $a \in A$ é uma **cota Inferior** ou um **minorante** de B se $a \preceq x$, para todo $x \in B$.
6. $a \in A$ é uma **cota superior** ou um **majorante** de B se $x \preceq a$, para todo $x \in B$.
7. $a \in A$ é o **ínfimo** de B se ele for o maior elemento do conjunto das cotas inferiores de B.
8. $a \in A$ é o **supremo** de B se ele for o menor elemento do conjunto das cotas superiores de B.

[2] Ou **elemento mínimo** ou **primeiro elemento**.
[3] Ou **elemento máximo** ou **último elemento**.