# Matemática Elementar

## Roteiro da Segunda Aula (Virtual)

Prof. Dr. Sérgio de Albuquerque Souza

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

16 de maio de 2023

# Princípio da Indução Finita (PIF)

## Teorema: Princípio da Indução Finita

Seja $X \subseteq \mathbb{N}$ com as seguintes hipóteses:

PIF1: $\boxed{1 \in X}$ e

PIF2: Dado $n \in \mathbb{N}$, se $\boxed{n \in X}$ então $\boxed{n+1 \in X}$;

Então $\boxed{X = \mathbb{N}}$.

A afirmação PIF1 é chamada de base da indução e a PIF2 de passo indutivo.

# Questão 1

Use o princípio da indução finita (PIF) para provar que, para todo número natural $n \in \mathbb{N}$, vale a igualdade:

$$\boxed{1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}}$$

# Resposta da questão 1

- Seja $X = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \right\}$.

PIF1 Para $\boxed{n=1}$, verifica-se que a expressão acima é válida pois:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Portanto temos que $\boxed{1 \in X}$.

# Resposta da questão 1

PIF2 Vamos supor que $\boxed{n \in X}$, ou seja, vale a igualdade

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Somando aos dois lados da igualdade $(n+1)$, teremos:

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+n+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \end{aligned}$$

# Resposta da questão 1

- Logo
$$1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
isto é, a soma dos $n+1$ primeiros é $\dfrac{(n+1)(n+1+1)}{2}$.
- Provamos desta forma por indução que a $X=\mathbb{N}$, ou seja, a igualdade acima é verdadeira para todo $n\in\mathbb{N}$.

# Questão 2

Em relação à conjuntos enumeráveis, assinale as alternativas abaixo, com (**V**) VERDADEIRO ou (**F**) FALSO.

a) ( ) $\mathcal{A}$ é dito enumerável quando existir uma bijeção entre $\mathcal{A}$ e um subconjunto de $\mathbb{N}$.

b) ( ) Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são enumeráveis então $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ é não enumerável.

c) ( ) Se $\mathcal{A}$ é não enumerável então todo subconjunto infinito de $\mathcal{A}$ é não enumerável.

d) ( ) Se $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ é não enumerável, então $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ enumeráveis.

# Resposta da questão 2a)

a) ($V$) $\mathcal{A}$ é dito enumerável quando existir uma bijeção entre $\mathcal{A}$ e um subconjunto dos números naturais $\mathbb{N}$.

**Verdadeiro**, pois se $\mathcal{A}$ é finito basta considerar uma bijeção com um subconjunto finito de $\mathbb{N}$ e se $\mathcal{A}$ for enumerável e infinito basta considerar uma bijeção com o próprio conjunto $\mathbb{N}$.

# Resposta da questão 2b)

- b) $(F)$ Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são enumeráveis então $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ é não enumerável.

  **Falso**, pois se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são conjuntos enumeráveis então existem funções bijetivas $f_{\mathcal{A}}$ e $f_{\mathcal{B}}$ de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ em subconjuntos de $\mathbb{N}$, logo a função definida por:

$$F(x) = \begin{cases} 2f_{\mathcal{A}}(x) & se\ x \in \mathcal{A} \\ 2f_{\mathcal{B}}(x) + 1 & se\ x \in \mathcal{B} \end{cases}$$

  é uma bijeção do conjunto $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ com um subconjunto de $\mathbb{N}$, logo um conjunto enumerável.

# Resposta da questão 2c)

c) ($\color{red}{F}$) Se $\mathcal{A}$ é não enumerável então todo subconjunto infinito de $\mathcal{A}$ é não enumerável.

**Falso**, pois considere o conjunto $\mathbb{R}$ não enumerável e o subconjunto infinito $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ que é enumerável.

# Resposta da questão 2d)

d) $(F)$ Se $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ é não enumerável, então $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ enumeráveis.

**Falso**, pois se o produto cartesiano $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ é não enumerável, necessariamente $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ é não enumerável.

# Questão 3

Escreva o número $\boxed{(1234)_5}$ na forma decimal (base dez) e o número decimal $\boxed{1234}$ na base $5$.

# Resposta da questão 3)

Para escrever $(1234)_5$ na base decimal, basta observar a construção deste número na base 5 que é dada por:

$$\begin{aligned}(\mathbf{1234})_5 &= \mathbf{1}\times 5^3 + \mathbf{2}\times 5^2 + \mathbf{3}\times 5^1 + \mathbf{4}\times 5^0 \\ &= 125 + 50 + 15 + 4 \\ &= 194\end{aligned}$$

Portanto: $\boxed{(1234)_5 = (194)_{10} = 194}$

# Resposta da questão 3)

Para escrever $\boxed{1234}$ na base $5$, usaremos o algoritmo da divisão sucessivas vezes:

$$\boxed{\begin{aligned}
\boxed{1234} &= 246 \times 5 + \mathbf{4}\\
246 &= 49 \times 5 + \mathbf{1}\\
49 &= 9 \times 5 + \mathbf{4}\\
9 &= 1 \times 5 + \mathbf{4}\\
1 &= 0 \times 5 + \mathbf{1}
\end{aligned}}$$

Logo $\boxed{1234 = (\mathbf{14414})_5}$ (observe a ordem dos números)

# Questão 4

Dado $n \in \mathbb{N}$, considere os conjuntos $D(n)$ dos divisores e $M(n)$ dos múltiplos de $n$ respectivamente.

a) Determine $\boxed{MDC(22,28)}$ pelo Algoritmo de Euclides (divisões sucessivas) e o $\boxed{MDC(22,28,36)}$ como o **maior** elemento do conjunto $D(22) \cap D(28) \cap D(36)$.

b) Determine $\boxed{MMC(22,28)}$ via processo de decomposição simultânea e o $\boxed{MMC(8,12,16)}$ como o **menor** elemento do conjunto $M(8) \cap M(12) \cap M(16)$.

# Resposta da questão 4a)

- Usando o Algoritmo de Euclides (divisões sucessivas) para determinar $\boxed{MDC(22,28)}$, temos:

$$\boxed{\begin{aligned} 28 &= 1\times 22+6\\ 22 &= 3\times 6+4\\ 6 &= 1\times 4+2\\ 4 &= 2\times \boxed{2}+0 \end{aligned}}$$

- Logo $MDC(22,28)=\boxed{2}$ é o último divisor, não nulo.

# Resposta da questão 4a)

- Para determinar $MDC(22,28,36)$ como o **maior** elemento do conjunto $D(22)\cap D(28)\cap D(36)$. Como:

$$\boxed{\begin{array}{l} D(22)=\{1,2,11,22\} \\ D(28)=\{1,2,4,7,14,28\} \\ D(36)=\{1,2,4,6,9,12,18,36\} \end{array}}$$

- Temos que $D(22)\cap D(28)\cap D(36)=\{1,2\}$
- Logo o $MDC(22,28,36)=\boxed{2}$

# Resposta da questão 4b)

- Determinando via processo de decomposição simultânea o $MMC(22, 28)$, teremos:

$$\boxed{\begin{array}{cc|c} 22 & 28 & 2 \\ 11 & 14 & 2 \\ 11 & 7 & 7 \\ 11 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & \end{array}}$$

- Logo $MMC(22, 28) = \boxed{2^2 \times 7 \times 11} = 308$

# Resposta da questão 4b)

- Para calcular o $MMC(8,12,16)$ como o **menor** elemento do conjunto $M(8) \cap M(12) \cap M(16)$. Como:

$$\boxed{\begin{array}{l} M(8) = \{8,16,24,32,40,\mathbf{48},56,\ldots\} \\ M(12) = \{12,24,36,\mathbf{48},60,72,\ldots\} \\ M(16) = \{16,32,\mathbf{48},64,80,96,\ldots\} \end{array}}$$

- Temos que $M(8) \cap M(12) \cap M(16) = \{\mathbf{48},96,\ldots\}$
- Logo o $MMC(8,12,16) = \boxed{\mathbf{48}}$

# Resposta da questão 4b)

- Calculando o $MMC(8,12,16)$ via processo de decomposição simultânea:

$$\boxed{\begin{array}{ccc|c} 8 & 12 & 16 & \mathbf{2} \\ 4 & 6 & 8 & \mathbf{2} \\ 2 & 3 & 4 & \mathbf{2} \\ 1 & 3 & 2 & \mathbf{2} \\ 1 & 3 & 1 & \mathbf{3} \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}}$$

- Logo o $MMC(8,12,16) = \boxed{\mathbf{2}^4 \times \mathbf{3}} = 48$

# Definição

## Definição

Diremos que os inteiros $a$ e $b$ são **congruentes módulo** $n$, se $n \mid (a-b)$, ou seja, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a-b = k \times n$.

$$\boxed{a \equiv b \pmod{n}}$$

## Teorema

Dados os inteiros $a$ e $b$, temos $a \equiv b \pmod{n}$ se, e somente se, $a$ e $b$ possuem o mesmo resto quando divididos por $n$.

# Questão 5

Verifique as equivalências abaixo são verdadeiras e resolva às equações:

a) $-2 \equiv 43 \pmod 9$

b) $3 \equiv 20 \pmod 9$

c) $12 \equiv 21 \pmod 9$

d) $-4 \equiv 17 \pmod 9$

e) $(x-4) \equiv 17 \pmod 9$

f) $(3+x) \equiv (21-x) \pmod 9$

# Resposta da questão 5a)

a) A equivalência:

$$\boxed{-2 \equiv 43 \pmod 9}$$

é **verdadeira** pois os restos são iguais a **3**:

$$\begin{aligned} -2 &= -1 \times 9 + \mathbf{3} \\ 43 &= 8 \times 9 + \mathbf{3} \end{aligned}$$

Ou, $(-2) - (43) = -45 \equiv \mathbf{0} \pmod 9$

# Resposta da questão 5b)

b) A equivalência:

$$\boxed{3 \equiv 20 \pmod 9}$$

é **falsa** pois os restos são diferentes:

$$\begin{aligned} 3 &= 0 \times 9 + \mathbf{3} \\ 20 &= 2 \times 9 + \mathbf{2} \end{aligned}$$

Ou, $(3) - (20) = -17 \not\equiv 0 \pmod 9$

# Resposta da questão 5c)

- A equivalência:

$$\boxed{12 \equiv 21 \pmod 9}$$

é **verdadeira** pois os restos são iguais a **3**:

$$\begin{aligned} 12 &= 1 \times 9 + \mathbf{3} \\ 21 &= 2 \times 9 + \mathbf{3} \end{aligned}$$

Ou, $(12) - (21) = -9 \equiv \mathbf{0} \pmod 9)$

# Resposta da questão 5d)

d) A equivalência:

$$\boxed{-4 \equiv 17 \pmod 9}$$

é **falsa** pois os restos são diferentes:

$$\begin{aligned} -4 &= -1 \times 9 + \mathbf{5} \\ 17 &= 1 \times 9 + \mathbf{8} \end{aligned}$$

Ou, $(-4) - (17) = -21 \not\equiv 0 \pmod 9$

# Resposta da questão 5e)

- e) Da equivalência $\boxed{x-4 \equiv 17 \pmod 9}$, temos que:

$$(x-4)-(17) = (x-21) \equiv 0 \pmod 9$$

Logo $9 \mid (x-21)$, ou seja, $(x-21)$ é múltiplo de 9.

$$x - 21 = 9\cdot n \Longrightarrow \boxed{x = 21 + 9\cdot n}$$

Conjunto solução para $x \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{Sol = \{\ldots, -6, 3, 12, 21, 30, 39, 48, \ldots\}}$$

# Resposta da questão 5f)

- f) Da equivalência $\boxed{3+x \equiv 21-x \pmod 9}$, temos que:

$$(3+x)-(21-x)=(2x-18)\equiv 0 \pmod 9$$

Logo $9 \mid (2x-18)$, ou seja, $(2x-18)$ é múltiplo de 9.

$$2x-18=9\cdot n \Longrightarrow \boxed{x=\frac{18+9\cdot n}{2}}$$

Conjunto solução para $x \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{Sol=\{\ldots,-18,-9,0,9,18,27,36,\ldots\}}$$

# Definição

## Definição

Dados $\overline{a}$ e $\overline{b}$ no conjunto quociente

$$\mathbb{Z}/\equiv(\operatorname{mod} n) = \mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \cdots, \overline{n-1}\}$$

definimos:

- O produto $\overline{a} \times \overline{b}$ como sendo a classe de equivalência módulo $n$ do produto (usual) $a \times b$ e
- $\overline{a}$ é divisível por $\overline{b}$ se existe $\overline{c} \in \mathbb{Z}_n$ tal que $\overline{a} = \overline{b} \times \overline{c}$.

# Questão 6

Em $\mathbb{Z}_7 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\}$ determine:

a) $\overline{12} - \overline{2} + \overline{3} + \overline{4}$

b) $\overline{5} \times \overline{3}$

c) $\overline{8^{12}}$

d) A divisão de $\overline{3}$ por $\overline{4}$

e) O inverso multiplicativo de $\overline{3}$

f) A solução para $\overline{x}^2 - \overline{1} = \overline{3}$

# Resposta da questão 6a)

a) Determinando $\boxed{\overline{12}-\overline{2}+\overline{3}+\overline{4}}$:

Como $\boxed{\overline{a}+\overline{b}=\overline{a+b}}$, teremos:

$$\begin{aligned}\overline{12}-\overline{2}+\overline{3}+\overline{4} &= \overline{12-2+3+4}\\ &= \overline{17}\\ &= \overline{3}\end{aligned}$$

Pois $17 \equiv 3 \pmod 7$.

# Resposta da questão 6b)

b) Determinando $\boxed{\overline{5} \times \overline{3}}$:

Como $\boxed{\overline{a} \times \overline{b} = \overline{a \times b}}$, teremos:

$$\begin{aligned} \overline{5} \times \overline{3} &= \overline{5 \times 3} \\ &= \overline{15} \\ &= \overline{1} \end{aligned}$$

Pois $15 \equiv 1 \pmod 7$.

# Resposta da questão 6c)

- c) Determinando $\boxed{\overline{8^{12}}}$

  Como $\boxed{(\overline{a})^n = \overline{a^n}}$, teremos:

$$
\begin{aligned}
\overline{8^{12}} &= (\overline{8})^{12} \\
&= (\overline{1})^{12} \\
&= \overline{1^{12}} \\
&= \overline{1}
\end{aligned}
$$

Pois $8 \equiv 1 \pmod 7$.

# Resposta da questão 6d)

d) $\boxed{\text{Divisão de } \overline{3} \text{ por } \overline{4}}$:

Qual é o $\overline{x} \in \mathbb{Z}_7$, tal que $\overline{x} \times \overline{4} = \overline{3}$, ou seja, quais os valores para $x \in \mathbb{Z}$ de forma que $4 \cdot x \div 7$ tenha resto 3.
Portanto observe que todos os elementos do conjunto

$$\overline{6} = \{\ldots, -8, -1, 6, 13, \ldots\}$$

satisfazem a condição.
Logo a divisão de $\overline{3}$ por $\overline{4}$ é $\boxed{\overline{6}}$

# Resposta da questão 6e)

e) O inverso multiplicativo de $\boxed{\overline{3}}$:

Qual é o $\overline{x} \in \mathbb{Z}_7$, tal que $\overline{x} \times \overline{3} = \overline{3} \times \overline{x} = \overline{1}$, ou seja, valores para $x \in \mathbb{Z}$ de forma que $3 \cdot x \div 7$ tenha resto 1.

Portanto observe que todos os elementos do conjunto

$$\overline{5} = \{\ldots, -9, -2, 5, 12, \ldots\}$$

satisfazem a condição.

Logo o inverso multiplicativo de $\overline{3}$ será $\boxed{\overline{5}}$.

# Resposta da questão 6f)

- f) Soluções para a equação $\boxed{\overline{x}^2 - \overline{1} = \overline{3}}$:

Como[1]: $\overline{x}^2 - \overline{1} + \overline{1} = \overline{3} + \overline{1} \Longrightarrow \boxed{\overline{x}^2 = \overline{4}}$

Logo os valores $x \in \mathbb{Z}$ tais que $x^2 \div 7$ tenham resto 4.

Portanto os elementos dos conjuntos satisfazem a condição

$$\overline{2} = \{\dots, -12, -5, 2, 9, \dots\} \text{ e } \overline{5} = \{\dots, -9, -2, 5, 12, \dots\}$$

Logo temos duas soluções para a equação: $\boxed{\overline{2}}$ e $\boxed{\overline{5}}$.

[1] $\overline{a} = \overline{b} \Longrightarrow \overline{a} + \overline{c} = \overline{b} + \overline{c}$

# Algumas Propriedades

- Se $a \equiv b \pmod{n}$, então

$$\boxed{a^n \equiv b^n \pmod{n}} \quad \text{e} \quad \boxed{(a+d) \equiv (b+d) \pmod{n}}$$

- Se $a$ e $b$ são inteiros, temos que

$$\boxed{a \text{ é divisível por } b \text{ se, e somente se, } a \equiv 0 \pmod{b}}$$

Ex.: 6 é divisível por 3, pois $6 \equiv 0 \pmod{3}$.

# Questão 7

Mostre que

$$\boxed{2^{222} + 2}$$

é divisível por 3.

# Resposta da questão 7

- Como $2 \equiv -1 \pmod{3}$, então

$$2^{222} \equiv 1 \pmod{3}$$

- Agora basta somar 2 e obtemos

$$(2^{222} + 2) \equiv (1 + 2) \pmod{3} \equiv 0 \pmod{3}$$

- Logo $2^{222} + 2$ é divisível por 3

# Prof. Sérgio


e-mails:

**sergio.souza@academico.ufpb.br**

**sergio@mat.ufpb.br**

Página do Professor:

**mat.ufpb.br/sergio**


Apresentação utilizando o Beamer/LaTeX