Matemática Elementar

Princípio da Indução Finita e Enumerabilidade

(Alguns Exemplos e Definições)

Prof. Dr. Sérgio de Albuquerque Souza

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

16 de maio de 2023

Princípio da Indução Finita (PIF)

Teorema: Princípio da Indução Finita

Seja $X \subseteq \mathbb{N}$ com as seguintes hipóteses:

PIF1: $\boxed{1 \in X}$ e

PIF2: Dado $n \in \mathbb{N}$, se $\boxed{n \in X}$ então $\boxed{n+1 \in X}$;

Então $\boxed{X = \mathbb{N}}$.

A afirmação PIF1 é chamada de base da indução e a PIF2 de passo indutivo.

Prova: Princípio da Indução Finita (PIF)

Vamos considerar $\boxed{c_0}$ o menor elemento[1] do conjunto **não vazio** $\boxed{C = \mathbb{N} - X} \subseteq \mathbb{N}$, logo $\boxed{c_0 \notin X}$.

PIF1: Como $1 \in X$ temos que $1 \notin C$, logo $c_0 > 1$ portanto $(c_0 - 1) \notin C$;

PIF2: Como $(c_0 - 1) \in X$ então $(c_0 - 1) + 1 = \boxed{c_0 \in X}$

Uma contradição, logo não podemos supor que $C \neq \emptyset$, ou seja, $X = \mathbb{N}$.

[1] $\mathbb{N}$ é bem ordenado.

Exemplos: Igualdades

Usando o PIF, mostre a vale a seguinte igualdade

$$\boxed{1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Seja $\mathcal{X} = \{n \in \mathbb{N} \mid 1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2\}$.

PIF1 Temos que $\boxed{1 \in \mathcal{X}}$ pois $1 = 1^2$.

Exemplos: Igualdades

PIF2 Vamos supor que $\boxed{n \in \mathcal{X}}$, ou seja, vale a igualdade

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

Somando $[2(n+1)-1]=(2n+1)$ em ambos os lados da igualdade, teremos:

$$\begin{aligned} 1+3+5+\cdots+(2n-1)+[2(n+1)-1] &= n^2+(2n+1) \\ &= n^2+2n+1 \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

Logo $\boxed{n+1 \in \mathcal{X}}$, portanto pelo principio da indução $\mathcal{X}=\mathbb{N}$.

Exemplos: Desigualdades

Usando o PIF, mostre a vale a seguinte desigualdade

$$\boxed{3^{n-1} < 2^{n^2}}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Seja $\mathcal{X} = \{n \in \mathbb{N} \mid 3^{n-1} < 2^{n^2}\}$.

PIF1 Temos que $\boxed{1 \in \mathcal{X}}$ pois $1 = 3^0 < 2^{1^2} = 2$.

Exemplos: Desigualdades

PIF2 Vamos supor que $\boxed{n \in \mathcal{X}}$, ou seja, vale a desigualdade

$$3^{n-1} < 2^{n^2}$$

Como $3^1 < 2^{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, teremos para $3^{(n+1)-1} = 3^n$ que:

$$3^n = 3^{n-1} \cdot 3^1 < 2^{n^2} \cdot 2^{2n+1} = 2^{n^2+2n+1} = 2^{(n+1)^2}$$

Logo $\boxed{n+1 \in \mathcal{X}}$, portanto pelo principio da indução $\mathcal{X} = \mathbb{N}$.

Cardinal e Cardinalidade

Definição: Cardinalidade

Diremos que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ têm a **mesma cardinalidade** ou que **são equivalentes** ou que **têm o mesmo número cardinal** se existe uma bijeção

$$f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

Exemplos

- $\mathcal{A} = \{0,1,2,3\}$ e $\mathcal{B} = \{5,6,7,8\}$ possuem o mesmo cardinal pois $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, dada por $f(x) = x+5$, é uma bijeção e o cardinal de $\mathcal{A}$, bem como, o de $\mathcal{B}$ é 4.

- O conjunto dos números pares $\mathbb{P}$ tem a mesma cardinalidade do números naturais $\mathbb{N}$, pois $f : \mathbb{N} \to \mathbb{P}$, dada por $f(x) = 2x$, é uma bijeção.

Conjuntos Enumeráveis

Definição: Conjuntos Enumeráveis

Diremos que um conjunto $\mathcal{E}$ é **enumerável** quando for finito ou, no caso de ser infinito, existir uma bijeção

$$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{N}$$

Exemplos

São enumeráveis:

- $\mathbb{P} = \{\text{números pares}\}$, pois $f : \mathbb{N} \to \mathbb{P}$ definida por $\boxed{f(n) = 2n}$ é bijetiva.
- $\mathbb{Z}$, pois a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$\boxed{f(n) = \begin{cases} n/2, & \text{se} \quad n \text{ é par,} \\ -(n-1)/2, & \text{se} \quad n \text{ é ímpar.} \end{cases}}$$

é bijetiva.

Alguns Fatos

Fato 1:

Se $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é uma função injetiva[a] então $f : \mathcal{A} \to f(\mathcal{A})$ é bijetiva. Com $f(\mathcal{A})$ sendo a imagem de $\mathcal{A}$ via f.

[a] Se $a \neq b$ então $f(a) \neq f(b)$.

Fato 2:

Se $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é uma função sobrejetiva[a] então existe uma função injetiva $g : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$.

[a] Se $f(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$

Conjuntos Enumeráveis

Teorema:
Todo conjunto infinito $\mathcal{A}$ contém algum um subconjunto infinito enumerável.

Ex.: $\mathcal{A} = [0,1]$ é infinito e $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}$ é enumerável.

Corolário:
Se $\mathcal{A}$ é infinito, existe uma bijeção $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, onde $\mathcal{B}$ é um subconjunto próprio de $\mathcal{A}$.

Conjuntos Enumeráveis

Teorema:

Se $\mathcal{E}$ é enumerável e $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ então $\mathcal{A}$ é enumerável.

Teorema:

Se $\mathcal{E}$ é enumerável e:

- Se $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}$ é injetiva, então $\mathcal{A}$ é enumerável.
- Se $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ é sobrejetiva, então $\mathcal{B}$ é enumerável.

Exemplos

Ex.: O conjunto $\mathcal{A} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, pois a função $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $\boxed{f(m,n) = 2^m 3^n}$ é injetiva.

Teorema

Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são enumeráveis então $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ é enumerável.

Ex.: Como o $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}^*$ são enumeráveis, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ é enumerável. O conjunto do números racionais $\mathbb{Q}$ é enumerável, pois a função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}$ definida por $\boxed{f(m,n) = m/n}$ é sobrejetiva.

Números Algébricos e Transcendentes

Definição: Números Algébricos e Transcendentes

Um número real $a \in \mathbb{R}$ é chamado **algébrico** se for raiz de um polinômio com coeficientes inteiros ($a_i \in \mathbb{Z}$)

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x_n$$

ou seja, $p(a) = 0$, caso contrário é chamado de número **transcendente**.

Exemplos

- Todo número racional $m/n \in \mathbb{Q}$ é algébrico, pois é um raiz de $p(x) = nx - m$.
- Todo número irracional da forma $\sqrt[n]{p} \in \mathbb{I}$, com p primo, é algébrico, pois é um raiz de $p(x) = x^n - p$.
- $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{5}^{\sqrt{7}}$, π, e, $e^{\sqrt{2}}$, $\operatorname{sen} 1$ e $\ln 2$ são transcendentes.

UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
SEAD | UFPB Educação a seu alcance

Teorema

Teorema:

Seja $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma família de conjuntos enumeráveis indexada. Então $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathcal{A}_i$ é enumerável.

Ex.: O conjunto dos números algébricos é enumerável.

Dúvidas!!!

Prof. Sérgio

e-mails:

sergio.souza@academico.ufpb.br

sergio@mat.ufpb.br

Página do Professor:

mat.ufpb.br/sergio

Apresentação utilizando o Beamer/LaTeX

UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

SEAD | UFPB