

Matemática Elementar
Prof. Sérgio - 10/Nov/2012 - 12.2
Roteiro da segunda aula presencial

1ª Questão Use o princípio da indução para provar que, para todo número natural n , vale a igualdade:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2ª Questão Em relação à conjuntos enumeráveis, assinale as alternativas abaixo, com (V) VERDADEIRO ou (F) FALSO, justificando/exemplificando cada resposta dada.

- a) () A é dito enumerável quando existir uma bijeção entre A e um subconjunto dos números naturais \mathbb{N} .
- b) () Se A e B são conjuntos enumeráveis então a união $A \cup B$ é não enumerável.
- c) () Se A é um conjunto não enumerável então todo subconjunto infinito de A é não enumerável.
- d) () Se o produto cartesiano $A \times B$ é não enumerável, então A e B são conjuntos enumeráveis.

3ª Questão Escreva o número $[1234]_5$ na forma decimal (base dez) e o número decimal 1234 na base 5.

4ª Questão Dado um número natural n , considere os conjuntos $D(n)$ e $M(n)$ como o conjunto dos divisores e dos múltiplos de n respectivamente:

- a) Determine $MDC(22, 28)$ pelo Algoritmo de Euclides (divisões sucessivas) e $MDC(22, 28, 36)$ como o **maior** elemento do conjunto $D(22) \cap D(28) \cap D(36)$.
- b) Determine via processo de decomposição simultânea o $MMC(22, 28)$ e $MMC(8, 12, 16)$ como o **menor** elemento do conjunto $M(8) \cap M(12) \cap M(16)$.

5ª Questão Dados a e b números inteiros, temos $a \equiv b \pmod{n}$ se, e somente se, a e b possuem o mesmo resto quando divididos por n . Verifique as equivalências abaixo são verdadeiras:

- a) $-2 \equiv 43 \pmod{5}$
- b) $2 \equiv 20 \pmod{5}$
- c) $12 \equiv 17 \pmod{5}$.
- d) $-4 \equiv 17 \pmod{5}$.

6ª Questão Dados \bar{a} e \bar{b} em $Z_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \overline{n-1}\}$, definimos o produto $\bar{a} \cdot \bar{b}$ como sendo a classe de equivalência módulo n do produto (usual) $a \cdot b$ e que \bar{a} é divisível por \bar{b} se existe $\bar{c} \in Z_n$ tal que $\bar{a} = \bar{b} \cdot \bar{c}$. Em Z_7 determine:

- a) $\bar{12} - \bar{2} + \bar{3} + \bar{4}$
- b) $\bar{5} \times \bar{3}$
- c) $\overline{8^{12}}$
- d) a da divisão de $\bar{3}$ por $\bar{4}$
- e) o inverso multiplicativo de $\bar{3}$
- f) uma solução para a equação $\bar{x}^2 - \bar{1} = \bar{3}$

7ª Questão Mostre que $2^{222} + 2$ é divisível por 3.

R E S P O S T A S

1ª Questão Dados da questão:

- Princípio da indução
- $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Usando o Princípio da indução temos:

- Quando $n = 1$, verifica-se que a fórmula acima é válida pois fica

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

- Suponhamos que a fórmula é verdadeira para $n = k$, ou seja, a soma dos k primeiros números é

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

- Fazendo $n = (k+1)$, e somando aos dois lados da igualdade acima $(k+1)$ obtemos

$$\begin{aligned} [1 + 2 + 3 + \dots + k] + (k+1) &= \\ &= \left[\frac{k(k+1)}{2} \right] + (k+1) = \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \end{aligned}$$

isto é, a soma dos $k+1$ primeiros é $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Provamos assim, por indução, a igualdade desejada.

2ª Questão Dados da questão:

- Conjuntos enumeráveis
- a) Verdadeiro, pois se A é finito basta considerar uma bijeção com um subconjunto finito de \mathbb{N} e se A for infinito basta considerar uma bijeção com o próprio conjunto \mathbb{N} .
- b) Falso, pois se A e B são conjuntos enumeráveis então existem funções bijeção f_A e f_B de A e B em subconjuntos de \mathbb{N} , logo a função definida por

$$F(x) = \begin{cases} 2f_A(x) & \text{se } x \in A \\ 2f_B(x) + 1 & \text{se } x \in B \end{cases}$$

é uma bijeção com um subconjunto de \mathbb{N} .

- c) Falso, pois considere o conjunto \mathbb{R} não enumerável e o subconjunto infinito $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ que é enumerável.
- d) Falso, pois se o produto cartesiano $A \times B$ é não enumerável, necessariamente A ou B é não enumerável.

3ª Questão Dados da questão:

- $[1234]_5$
- 1234

Para escrever $[1234]_5$ na base decimal, basta observar a construção deste número que é

$$\begin{aligned} [1234]_5 &= 1 \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 3 \times 5 + 4 \\ &= 125 + 50 + 15 + 4 \\ &= 194 \end{aligned}$$

Para escrever 1234 na base 5, usaremos o algoritmo da divisão:

$$\begin{aligned} 1234 \div 5 &= 246 \times 5 + 4 && \text{resto } 4 \\ 246 \div 5 &= 49 \times 5 + 1 && \text{resto } 1 \\ 49 \div 5 &= 9 \times 5 + 4 && \text{resto } 4 \\ 9 \div 5 &= 1 \times 5 + 4 && \text{resto } 4 \\ 1 \div 5 &= 0 \times 5 + 1 && \text{resto } 1 \end{aligned}$$

Logo $1234 = [14414]_5$

4ª Questão Dados da questão:

- $D(n)$ como o conjunto dos divisores n
 - $M(n)$ como o conjunto dos múltiplos de n
- a) Usando o Algoritmo de Euclides (divisões sucessivas) para determinar $MDC(22, 28)$ temos:

$$\begin{aligned} 28 \div 22 &= 1 \times 22 + 6 && \text{resto } 6 \\ 22 \div 6 &= 3 \times 6 + 4 && \text{resto } 4 \\ 6 \div 4 &= 1 \times 4 + 2 && \text{resto } 2 \\ 4 \div 2 &= 2 \times 2 + 0 && \text{resto } 0 \end{aligned}$$

Logo o resultado é o último divisor deste processo, ou seja, $MDC(22, 28) = 2$.

Para determinar $MDC(22, 28, 36)$ como o **maior** elemento do conjunto

$D(22) \cap D(28) \cap D(36)$, vamos encontrar esses conjuntos:

$$\begin{aligned} D(22) &= \{1, 2, 11, 22\} \\ D(28) &= \{1, 2, 4, 7, 14, 28\} \\ D(36) &= \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\} \end{aligned}$$

Logo $D(22) \cap D(28) \cap D(36) = \{1, 2\}$ e portanto $MDC(22, 28, 36) = 2$

b) Determinando via processo de decomposição simultânea o $MMC(22, 28)$, temos

$$\begin{array}{r|l} 22 & 2 \\ 28 & 2 \\ 11 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & 1 \end{array}$$

Logo

$$MMC(22, 28) = 2^2 \times 7 \times 11 = 308$$

Para $MMC(8, 12, 16)$ como o menor elemento do conjunto $M(8) \cap M(12) \cap M(16)$, vamos encontrar esses conjuntos:

$$\begin{aligned} M(8) &= \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, \dots\} \\ M(12) &= \{12, 24, 36, 48, 60, 72, \dots\} \\ M(16) &= \{16, 32, 48, 64, 80, 96, \dots\} \end{aligned}$$

Logo

$$M(8) \cap M(12) \cap M(16) = \{48, 96, \dots\}$$

e portanto $MMC(8, 12, 16) = 48$

Só para calcular e confirmar o valor do $MMC(8, 12, 16)$ via processo de decomposição simultânea:

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 12 & 2 \\ 16 & 2 \\ 4 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$MMC(8, 12, 16) = 2^4 \times 3 = 48$$

5ª Questão Dados da questão:

- Definição de $a \equiv b \pmod{n}$

a) A equivalência $-2 \equiv 43 \pmod{5}$ é verdadeira pois os restos são iguais a 3:

$$\begin{aligned} -2 &= -1 \times 5 + 3 \quad \text{resto } 3 \\ 43 &= 8 \times 5 + 3 \quad \text{resto } 3 \end{aligned}$$

b) A equivalência $2 \equiv 20 \pmod{5}$ é falsa pois os restos são diferentes:

$$\begin{aligned} 2 &= 0 \times 5 + 2 \quad \text{resto } 2 \\ 20 &= 4 \times 5 + 0 \quad \text{resto } 0 \end{aligned}$$

c) A equivalência $12 \equiv 17 \pmod{5}$ é verdadeira pois os restos são iguais a 2:

$$\begin{aligned} 12 &= 2 \times 5 + 2 \quad \text{resto } 2 \\ 17 &= 3 \times 5 + 2 \quad \text{resto } 2 \end{aligned}$$

d) A equivalência $-4 \equiv 17 \pmod{5}$ é falsa pois os restos são diferentes:

$$\begin{aligned} -4 &= -1 \times 5 + 1 \quad \text{resto } 1 \\ 17 &= 3 \times 5 + 2 \quad \text{resto } 2 \end{aligned}$$

6ª Questão Dados da questão:

- Definição de $Z_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$

a) $\bar{12} - \bar{2} + \bar{3} + \bar{4} = \overline{12 - 2 + 3 + 4} = \bar{17} = \bar{3}$

b) $\bar{5} \times \bar{3} = \overline{5 \times 3} = \bar{15} = \bar{1}$

c) $\bar{8}^{12} = \bar{8}^{12} = \bar{1}^8 = \bar{1}$

d) Da divisão de $\bar{3}$ por $\bar{4}$, o que se pede é um número $\bar{X} \in Z_7$, tal que $\bar{X} \times \bar{4} = \bar{3}$, ou seja, valores para $x \in Z$ de forma que $4x \div 7$ tenha resto 3, portanto observe que todos os elementos do conjunto $\bar{6} = \{\dots, -8, -1, 6, 13, \dots\}$ satisfazem a condição.

Logo a divisão de $\bar{3}$ por $\bar{4}$ é $\bar{6}$

e) O inverso multiplicativo de $\bar{3}$ será um $\bar{X} \in Z_7$, tal que $\bar{X} \times \bar{3} = \bar{3} \times \bar{X} = \bar{1}$, ou seja, valores para $x \in Z$ de forma que $3x \div 7$ tenha resto 1, portanto observe que todos os elementos do conjunto $\bar{5} = \{\dots, -9, -2, 5, 12, \dots\}$ satisfazem a condição.

Logo o inverso multiplicativo de $\bar{3}$ será $\bar{5}$.

f) Uma solução para a equação

$$\bar{x}^2 - \bar{1} = \bar{3}$$

será um $\bar{X} \in \mathbb{Z}_7$, tal que $\bar{X}^2 - \bar{1} = \bar{3}$, ou seja, valores para $x \in \mathbb{Z}$ de forma que $(x^2 - 1) \div 7$ tenha resto 3, portanto observe que todos os elementos dos conjuntos $\bar{2} = \{\dots, -12, -5, 2, 9, \dots\}$ e $\bar{5} = \{\dots, -9, -2, 5, 12, \dots\}$ satisfazem a condição.

Logo as soluções para a equação

$$\bar{x}^2 - \bar{1} = \bar{3}$$

são $\bar{2}$ e $\bar{5}$.

7ª Questão Dados da questão:

- $2^{222} + 2$

Lembrando que se $a \equiv b \pmod{c}$, então $a^n \equiv b^n \pmod{c}$ e $(a+d) \equiv (b+d) \pmod{c}$.

Além disso, dados a e b inteiros, temos que a é divisível por b se, e somente se, $a \equiv 0 \pmod{b}$. Por exemplo $2 \equiv 0 \pmod{3}$.

Como $2 \equiv -1 \pmod{3}$, então $2^{222} \equiv 1 \pmod{3}$.

Agora basta somar 2 e obtemos $(2^{222} + 2) \equiv (1 + 2) \pmod{3} \equiv 0 \pmod{3}$, o que significa que $2^{222} + 2$ é divisível por 3