UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CCEN - Departamento de Matemática
http://www.mat.ufpb.br/sergio

4ª Prova — Matemática Básica I (Pré-prova)

Prof.: *Sérgio* Data: *11/Set/2000* Turno: *M+N*
Curso: Nome:

Período: *00.1* Turma(s): Matrícula:

1 Algumas Aplicações das Derivadas na Administração e na Economia

1.1 CUSTO, CUSTO MÉDIO E CUSTO MARGINAL

Admitindo-se que o *custo total* y para se produzir e negociar x unidades de um artigo é uma função somente de x, então a função de custo total pode ser representada por $y_c = f(x)$.

São usadas funções de vários tipos para representar curvas de custo total. Em geral, as curvas de custo tem as seguintes propriedades:

1. Quando nenhuma unidade é produzida, o custo total é igual a zero ou positivo, isto é, $f(0) \geq 0$. Se $f(0) > 0$, então $f(0)$ é o montante das despesas gerais ou dos custos fixos de produção.

2. O custo total aumenta quando x aumenta e, portanto, $f'(x)$ é sempre positivo.

3. O custo de produção de uma quantidade muito grande de qualquer artigo usualmente atinge um ponto no qual este aumenta a uma taxa crescente. Portanto, a curva de custo total é, normalmente, côncava para cima, isto é, $f''(x) > 0$. Entretanto, dentro de uma faixa limitada, a curva de custo total é, com frequência, côncava para baixo, correspondo ao custo marginal decrescente.

Se a função de custo total é $f(x)$ então, o *custo médio* ou *por unidade* é $\boxed{cm(x) = \overline{y}_c = \dfrac{y_c}{x} = \dfrac{f(x)}{x}}$ e o *custo marginal* é $f'(x)$.

A primeira derivada do custo médio (o *custo médio marginal*) é $cm'(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$

Se $\boxed{\text{cm'(x)=0}} \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = 0$, isto é, $f(x) = xf'(x) \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x} = \boxed{\text{f'(x)=cm(x)}}$

Portanto, o custo médio é mínimo para um valor de x, tal que o custo médio se iguale ao custo marginal; isto é, as curvas do custo médio e do custo marginal se interceptam no ponto de custo médio mínimo. Observe que se x existir, supõe-se que seu valor seja mínimo para o qual $cm'(x) = 0$, devido à terceira propriedade das curvas de custo mencionadas acima.

Para uma determinada curva de custo total, a existência deste mínimo pode ser testada da maneira usual.

1.2 ELASTICIDADE

A *elasticidade pontual* da função $y = f(x)$ no ponto x é a taxa de variação proporcional em y por unidade de variação em x:

$$\boxed{\eta = \frac{Ey}{Ex} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \cdot f'(x)}$$

Observe que a elasticidade η de uma função é independente das unidades com as quais as variáveis são medidas. Isto resulta da definição de elasticidade, em termos de variações proporcionais, que são necessariamente independentes das unidades de medida.

A elasticidade pontual da demanda, oferta, custo, produtividade e outras funções é um importante conceito na teoria econômica.

1.3 RECEITA, RECEITA MARGINAL E ELASTICIDADE DE DEMANDA

Para qualquer função demanda dada $y = f(x)$ onde y é o preço por unidade e x é o número de unidades; a *receita total* R é o produto de x por y, isto é, $\boxed{R = x.y = x.f(x)}$

A *receita marginal* em relação à demanda é a derivada da receita total em relação a x, ou seja, $R'(x)$ e é, portanto, a taxa de variação na receita em relação à variação na demanda.

Observe que a *receita média*, ou a *receita por unidade*, representa também o preço por unidade y - isto é, a curva de receita média e a curva de demanda são idênticas.

Uma vez que x e y são sempre não negativos no contexto de nossa estrutura analítica previamente estabelecida, R também é sempre não negativa. Contudo, $R'(x)$ pode ser positivo ou negativo - isto é, embora a receita total seja sempre não negativa, ela pode aumentar ou diminuir, à medida que a demanda aumenta.

Note também que existe uma relação entre a receita marginal e a elasticidade de demanda, dada por:

$$\boxed{R'(x) = x \cdot f'(x) + y = y\left(\frac{x}{y} \cdot f'(x) + 1\right) = y\left(1 + \frac{Ey}{Ex}\right) = y\,(1 + \eta)}$$

1.4 RENDA, CONSUMO E POUPANÇA NACIONAIS

A relação entre a renda nacional total disponível e o consumo nacional total é conhecida frequentemente como *função de consumo*. Nas formas simples de análise teórica da função de consumo, assume-se que à medida que a renda aumenta (ou diminui), o consumo aumenta (ou diminui), embora com menos intensidade que a renda; isto é, a tendência marginal ao consumo é igual à taxa de variação no consumo, à medida que a renda disponível varia.

Se a função de consumo é dada por $c = C(x)$ onde c é o *consumo nacional total* e x a *renda nacional total* (e c e x são medidas nas mesmas unidades), então, a tendência marginal ao consumo é $C'(x)$.

Nas análises teóricas elementares da renda nacional, assume-se frequentemente que a renda disponível é igual ao consumo ($C(X)$) mais a poupança (S(x)). Isto é expresso como $\boxed{x = C(x) + S(x)}$, logo, a *tendência marginal à poupança* é $S'(x) = 1 - C'(x)$

Na análise da renda nacional, o investimento é considerado como formação de capital e representa um acréscimo no capital real, por exemplo em equipamentos, edifícios, estoques, e assim por diante. Assume-se que o investimento e o consumo estejam relacionados de maneira tal que uma despesa no investimento inicial possa resultar num acréscimo na renda igual a várias vezes esta quantia. Uma expressão numérica precisa para esta relação é dada pelo multiplicador. Este é a razão entre o último acréscimo na renda e o acréscimo no investimento que o originou.

O *multiplicador* k está relacionado à tendência marginal ao consumo e é dado por

$$\boxed{k = \frac{1}{1 - C'(x)} = \frac{1}{S'(x)}}$$

Observe que se $C'(x) = 0$, então $k = 1$; isto é, se nenhuma renda adicional é gasta, o acréscimo total na renda é igual à despesa inicial; se $C'(x) \to 1$, $k \to \infty$; isto é, se toda a renda adicional é gasta, o acréscimo total na renda torna-se infinitamente grande.

1.5 EXERCÍCIO

1ª Questão Para cada uma das seguintes funções de custo total, ache o custo médio ($\overline{y}$), custo marginal, custo médio marginal, o mínimo custo médio e mostre que neste mínimo, o custo marginal e o custo médio são iguais (ver **??**).

a) $y = x^2 + 200x + 10000$ ($R.$ $x_{min} = 100 \quad \overline{y}_{min} = 400$)

b) $y = 25x - 8x^2 + x^3$ ($R.$ $x_{min} = 4 \quad \overline{y}_{min} = 9$)

c) $y = 2x^2 + 5x + 18$ ($R.$ $x_{min} = 3 \quad \overline{y}_{min} = 17$)

d) $y = 3x^2 + 5x + 6$ ($R.$ $x_{min} = \sqrt{2} \quad \overline{y}_{min} = 6\sqrt{2} + 5 \approx 13.485$)

e) $y = 20x + 2x^3 + 4x^5$ ($R.$ $x_{min} = 0 \quad \overline{y}_{min} = 20$)

f) $y = 2x + x^2 lnx$ ($R.$ $x_{min} = \frac{1}{e} \quad \overline{y}_{min} = 2 - \frac{1}{e} \approx 1.6321$)

g) $y = 2xe^{-x} + xe^x$ ($R.$ $x_{min} = \frac{1}{2}\ln 2 \quad \overline{y}_{min} = 2\sqrt{2} \approx 2.8284$)

2ª Questão A função de receita total de uma fábrica de móveis coloniais é expressa pela equação $R = 24x - 3x^2$

a) Qual é a receita máxima que esta companhia pode esperar obter, supondo que esta equação seja válida? ($R.$ $x_{max} = 4 \quad R_{max} = 48$)

b) Que equação representa a função de receita média e marginal?

c) Num único gráfico, trace as funções de receita total, média e marginal.

3ª Questão Para cada um dos seguintes pares de funções de demanda e de custo (médio ou total), ache o lucro máximo, a receita máxima que se pode obter e verifique que a relação entre a receita marginal e a elasticidade de demanda é válida (ver **??**).

a) $y = 18 - x$ e $y_c = 2x + 14$ ($R.$ $R_{max} = (9, 81) \quad L_{max} = (8, 50)$)

b) $y = 24 - 7x$ e $\overline{y}_c = 6 - x$ ($R.$ $R_{max} = (\frac{3}{2}, \frac{27}{2}) \quad L_{max} = (\frac{12}{7}, \frac{144}{7})$)

c) $y = 26 - 3x^2$ e $y_c = 3x^2 + 2x + 14$ ($R.$ $R_{max} = (\frac{4}{3}, \frac{50}{9}) \quad L_{max} = (\frac{1}{3}\sqrt{26}, \frac{52}{9}\sqrt{26})$)

d) $y = 12 - 4x$ e $y_c = 8x - x^2$ ($R.$ $R_{max} = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}) \quad L_{max} = (\frac{3}{2}, 9)$)

e) $y = 12 - 5x$ e $\overline{y}_c = 4x + 6$ ($R.$ $R_{max} = (\frac{1}{3}, 1) \quad L_{max} = (\frac{6}{5}, \frac{36}{5})$)

4ª Questão Suponha que o consumo nacional seja dado pela funções $C_1(x) = 1 + 3x^2$, $C_2(x) = 10 + 0,8x + 0,5\sqrt{x}$ e $C_3(x) = 0,7 + \dfrac{0,2}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

a) Encontrar a função poupança nacional $S_1(x)$, $S_2(x)$ e $S_3(x)$;

b) Encontre a tendência marginal ao consumo e a tendência marginal à poupança;

c) Encontre o multiplicador k para o valor $x = 1$ (ver **??**)

$(R.\ k_1(1) = -\dfrac{1}{5} \quad k_2(1) = -20 \quad k_3(1) = \dfrac{9}{11})$

Datas das provas

Prova	Data	Turma	Turno	Local
4	26/09 terça	02 e 04	Manhã e Noite	sala de aula
4	27/09 quarta	01	Manhã	sala de aula
Final	**04/10 quarta**	01, 02 e 04	Manhã e Noite	à definir

Boa Sorte