Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Prova de Seleção de Monitoria - 01.1

Nome: **Mat.**

1. Sejam $\alpha = \{(1,-1),(0,2)\}$ e $= \{(1,0,-1),(0,1,2),(1,2,0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que
$$[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$
Determine $T(x,y)$.

2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por
$$T(x,y,z) = (-9x+4y+4z, -8x+3y+4z, -16x+8y+7z).$$
   a. Determinar o polinômio característico de T.
   b. Determinar os autovalores de T.
   c. Determinar o polinômio minimal de T.
   d. T é diagonalizável? Justifique.

3. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual e $\mathbf{W} = [(-1,2,-1),(1,-1,0)]$. Determine uma base para $\mathbf{W}^{\perp}$.

4. Sejam $\mathbf{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ um conjunto de vetores LI de $\mathbf{V}$. Sejam
$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= a_{11}\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{n1}\mathbf{v}_n \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_n &= a_{1n}\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{nn}\mathbf{v}_n. \end{aligned}$$
Mostre que $\{\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_n\}$ é LI se, e somente se,
$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\right) \neq 0.$$

5. Sejam $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ subespaços de um espaço vetorial $\mathbf{V}$, tais que $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$. Sejam $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ e $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ bases de $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$, respectivamente. Mostre que
$$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$$
é uma base de $\mathbf{V}$.

6. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por
$$T(x, y, z) = (x + 3y + z, 2x + 5y + z, -x - y + z).$$
   a. Verifique que T é uma transformação linear.
   b. Quais as condições sobre a, b e c, para que $(a, b, c) \in \mathrm{Im}(T)$? Qual é a $\dim(\mathrm{Im}(T))$?
   c. Quais as condições sobre a, b e c, para que $(a, b, c) \in \ker(T)$? Qual é a $\dim(\ker(T))$?
   d. T é sobrejetora? Justifique.

7. Sejam $\mathbf{V}$ um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre $\mathbb{R}$ e $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ uma base ortonormal de $\mathbf{V}$. Se
$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n \ \text{ e } \ \mathbf{v} = y_1\mathbf{v}_1 + \cdots + y_n\mathbf{v}_n.$$
Mostre que:
   a. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$;
   b. $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

8. Seja $\mathbf{A}$ uma $n \times n$ matriz sobre $\mathbb{R}$. Considere o conjunto
$$S = \{\lambda \in \mathbb{R} : \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} \ \text{ é não invertível}\}$$
Dê uma estimativa para o número de elementos de S.