Álgebra Linear e Geometria Analítica
Concurso de Monitoria – em 29/08/95

01. Defina subespaço de um espaço vetorial.

02. Seja V o espaço vetorial $\Re^2$. Verifique se o conjunto $W = \{(x, y) / x = 0 \text{ ou } y = 0\}$ é um subespaço de V.

03. No espaço vetorial $\Re^3$, considere o subespaço W definido por $W = \{(x, y, z) / x = y\}$. Encontre um subespaço U de $\Re^3$, tal que $W \oplus U = \Re^3$.

04. Considere V um espaço vetorial de dimensão 3. Supondo que $\alpha = \{u, v, w\}$ seja uma base de V, prove que $\beta = \{u + v, v + w, u + w\}$ também é uma base de V.

05. Considerando os dados da questão anterior, determine a matriz de mudança da base α para a base β.

06. Sejam V e W espaços vetoriais e considere $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Enuncie um teorema que relacione as dimensões do núcleo e da imagem de T.

07. Seja $\wp^2$ o espaço vetorial real cujos elementos são o polinômio nulo e todos os polinômios de grau ≤ 2, e considere o operador linear $T : \wp^2 \rightarrow \wp^2$ definido por $T(p(x)) = p(x) + xp'(x)$, onde $p'(x)$ representa a derivada do polinômio p.

Verifique se T é um isomorfismo. Caso seja, defina o operador linear inverso de T.

08. Se V é um espaço vetorial e T é um operador linear sobre V, prove que

$$(T \circ T)(v) = 0, \forall v \in V \Leftrightarrow Im(T) \subset N(T).$$

09. Seja V um espaço vetorial e considere $\alpha = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ uma base de V. Se T é o operador linear sobre V que satisfaz $T(v_1) = v_1$, $T(v_2) = v_1 + v_2$, $T(v_3) = v_1 + v_2 + v_3, \ldots, T(v_5) = v_1 + v_2 + \ldots + v_5$, determine a matriz que representa T em relação à base α.

10. Seja $T : \Re^2 \rightarrow \Re^2$ o operador linear definido por $T(x, y) = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\theta, x\,\mathrm{sen}\theta + y\cos\theta)$.

Para quais valores de θ, T possui autovalores reais? Quais seriam esses autovalores?

------ * ------