CRITÉRIO PARA VERIFICAÇÃO DE MÁXIMO OU MÍNIMO

Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e (x_0, y_0) um ponto crítico de f. Suponhamos que f possua derivadas parciais contínuas até a 3ª ordem. Então tem-se o seguinte

I) Se $f_{xx} \times f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$

O ponto é de máximo se $f_{xx} < 0$

O ponto é de mínimo se $f_{xx} > 0$

II) Se $f_{xx} \times f_{yy} - (f_{xy})^2 < 0$, o ponto é de sela

III) Se $f_{xx} \times f_{yy} - (f_{xy})^2 = 0$, não se pode dizer nada.

OBS. As derivadas são calculadas no ponto (x_0, y_0)

Exemplo: Encontrar o ponto crítico da função abaixo e verificar se são de máximo ou de mínimo.

Solução: $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$

$f_x = 3x^2 + 3y^2 - 6x$

$f_y = 6xy - 6y$

$\Rightarrow$ devemos ter $\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0 \\ 6xy - 6y = 0 \end{cases}$ (I)

Os pontos críticos são as soluções do sistema (I)

Resolvendo temos $(0,0); (2,0); (1,1); (1,-1)$

Para o ponto $(0,0)$.

$f_{xx} \times f_{yy} - (f_{xy})^2 = (-6) \times (-6) - 0^2 = 36 > 0$

Como $f_{xx} = -6 < 0$, o ponto é de máximo

Para o ponto $(2,0)$

$f_{xx} \times f_{yy} - (f_{xy})^2 = 6 \times 6 - 0^2 = 36 > 0$

Como $f_{xx} = 6 > 0$, o ponto é de mínimo

Fica a cargo do estudante, verificar os dois pontos restantes.