UFPB – CCEN – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA
EXAME FINAL – PERÍODO 99.2

ALUNO (A) - ________________________________ MATRÍCULA - __________

OBSERVAÇÃO

Esta prova consta de 10 (dez) questões, dentre as quais você poderá escolher até 05 (cinco) para resolver.

Se você resolver mais que 05 (cinco) questões, serão corrigidas, a partir do verso desta página, as 05 (cinco) primeiras soluções encontradas na prova.

01. No espaço $\tilde{\mathbf{A}}_3$, considere os vetores $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 1$, $q(x) = x^2 + 2x - 1$ e $r(x) = 2x^3 + x^2 + 1$. Verifique que $r(x) = 2p(x) - 3q(x)$ e, usando unicamente esse cálculo como justificativa, diga se $\boldsymbol{a} = \{p(x), q(x), r(x)\}$ é um conjunto LI ou LD.

02. No espaço das matrizes $\mathbf{2\times 2}$, encontre uma base e dê a dimensão dos subespaços $\boldsymbol{U} = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} / a + d = 2a - b = 0\}$, $\boldsymbol{W} = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} / a + d = b + c = 0\}$ e $\boldsymbol{U}$ I $\boldsymbol{W}$.

03. Verifique que $\boldsymbol{a} = \{1, x, 2 + x + 2x^2\}$ é uma base para o espaço vetorial $\tilde{\mathbf{A}}_2$ e determine $[2x^2 - 5x + 1]_{a}$.

04. Em R^3, qual a matriz de mudança da base canônica para a base $\boldsymbol{a} = \{(0,0,1),(0,1,0),(2,0,0)\}$?

05. Sejam $\boldsymbol{U}$ e $\boldsymbol{W}$ subespaços de um espaço $\boldsymbol{V}$. Sabendo que $\dim \boldsymbol{V} = n$ e que $\dim \boldsymbol{U} > \frac{n}{2}$ e $\dim \boldsymbol{W} > \frac{n}{2}$, mostre que $\boldsymbol{U}$ I $\boldsymbol{W} \neq \{\overset{\rho}{0}\}$.

06. Se $\boldsymbol{T}$ é o operador linear sobre R^2 que possui o vetor $u = (1, 0)$ em seu núcleo, tendo $\mathrm{v} = (1, 2)$ como seu autovetor associado ao autovalor $\boldsymbol{l} = 2$, determine $\boldsymbol{T}(-1, 3)$.

07. Seja $\boldsymbol{T} : \mathsf{R}^2 \to \tilde{\mathbf{A}}_1$ a transformação linear definida por $\boldsymbol{T}(a, b) = (a - b)x + a$. Verifique que $\boldsymbol{T}$ é um isomorfismo e determine a transformação $\boldsymbol{T}^{-1}$.

08. Seja $\boldsymbol{T} : \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}^2$ o operador linear definido por $\boldsymbol{T}(x, y) = (4x + 4y, x + 4y)$. Encontre uma base $\boldsymbol{a}$ de R^2, tal que $[\boldsymbol{T}]_{a}^{a} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$.

09. Considere R^3 com o produto interno usual e sejam $u = (1, 1, 0)$ e $v = (0, 1, 2)$. Existe um vetor w satisfazendo $\| w \| = 1$, $w \perp u$ e $w \perp v$?

10. Em um espaço vetorial V com produto interno, suponha que o vetor $u + v$ seja ortogonal ao vetor $u - v$. Que relação se pode estabelecer entre $\| u \|$ e $\| v \|$?