UFPB – CCEN – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA
$2^{\underline{a}}$ PROVA - PERÍODO 982

1) Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0,1) = (2,1,0)$, $T(1,1,0) = (-1,0,1)$ e $T(0,0,1) = (1,-1,1)$. Esta transformação linear é injetora? É sobrejetora? Conclua se ela é ou não inversível, justificando sua resposta.

2) Considere a aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) \;=\; (x-2y,\; y-z,\; 2x+z)$$

e sejam α a base canônica do $\mathbb{R}^3$ e $\beta = \{(1,1,-2),\; (1,0,1),\; (0,1,1)\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$. Encontre $[T]^{\alpha}_{\beta}$.

3) Seja $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear. Se $\dim(V) > \dim(W)$, prove que existe um vetor não nulo $v \in V$ tal que $T(v) = 0$ (vetor nulo de W).

4) Dada a aplicação $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) \;=\; (x-2y,\; y-z,\; 2x+z)$.
   a) Mostre que T é uma transformação linear.
   b) Determine $N(T)$ (o núcleo de T).
   c) Determine $\mathrm{Im}(T)$.
   d) Dê uma base para a $\mathrm{Im}(T)$.