UFPB – CCEN – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA - 2ª PROVA - 8/8/2000
Nome: ________________________________ Matrícula: __________

Resolva 4 das seguintes questões:

1) Seja $\mathbf{T} : \mathbb{P}_3 \longrightarrow \mathbb{P}_3$ definida por $\mathbf{T}(p(x)) = p''(x)$, onde $p''(x)$ representa a derivada segunda do polinômio $p(x)$.
a) Mostre que $\mathbf{T}$ é uma transformação linear.
b) Determine uma base e dê a dimensão do núcleo e da imagem de $\mathbf{T}$.

2) Seja $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que $\mathrm{Ker}(\mathbf{T}) = [(0,1,0)]$ e $\mathrm{Im}(\mathbf{T}) = [(1,-1,3),(2,1,-1)]$.
a) $\mathbf{T}$ é injetora? Justifique sua resposta.
b) $\mathbf{T}$ é sobrejetora? Justifique sua resposta.
c) Determine $\mathbf{T}(x,y,z)$.

3) Considere a transformação linear $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{T}(x,y) = (2x+3y, x+2y)$. Sejam $\alpha = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\beta = \{(1,-1),(1,1)\}$ bases do $\mathbb{R}^2$.
a) Calcule $[\mathbf{I}]^{\alpha}_{\beta}$
b) Calcule $[\mathbf{T}]^{\beta}_{\beta}$
c) $\mathbf{T}$ é um isomorfismo? Se for, calcule $[\mathbf{T}^{-1}]^{\alpha}_{\alpha}$ e $\mathbf{T}^{-1}(x,y)$.

4) Sejam $\alpha = \{(1,1),(0,1)\}$ e $\beta = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente, e seja $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que

$$[\mathbf{T}]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Determine $\mathbf{T}(x,y)$.
b) Comprove que $\mathbf{T}$ não é sobrejetora, exibindo um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ que não seja elemento da imagem de $\mathbf{T}$.

5) Considere um espaço vetorial $\mathbf{V}$ de dimensão 2 e seja $\alpha = \{\mathbf{v_1},\ \mathbf{v_2}\}$ uma base de $\mathbf{V}$. Seja $\mathbf{T} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ uma transformação linear tal que

$$\mathbf{T}(\mathbf{2v_1} + \mathbf{v_2}) = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} \quad \text{e} \quad \mathbf{T}(\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}) = \mathbf{2v_1}.$$

$\mathbf{T}$ é um isomorfismo? Justifique.