UM CURSO DE GEOMETRIA ANALÍTICA E ÁLGEBRA LINEAR

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática
Instituto de Ciências Exatas
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi
regi@mat.ufmg.br

19 de agosto de 2000

Editor, Coordenador de Revisão, Supervisor de Produção, Capa e Ilustrações:
Reginaldo J. Santos

Ficha Catalográfica

Santos, Reginaldo J.
S237u Um Curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear / Reginaldo J. Santos - Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2000.

1. Álgebra Linear 2. Geometria Analítica I. Título

CDD: 512.5
516.3

Conteúdo

Prefácio

Este texto cobre o material para um curso de um semestre de Geometria Analítica e Álgebra Linear ministrado nos primeiros semestres para estudantes da área de Ciências Exatas. O texto pode, mas **não** é necessário, ser acompanhado do programa MATLAB*.

O conteúdo é dividido em seis capítulos. O Capítulo 1 trata das matrizes e sistemas lineares. Aqui todas as propriedades da álgebra matricial são demonstradas. A resolução de sistemas lineares é feita usando somente o método de Gauss-Jordan (transformando a matriz até que ela esteja na forma escalonada reduzida). Este método requer mais trabalho do que o método de Gauss (transformando a matriz, apenas, até que ela esteja na forma escalonada). Ele foi o escolhido, por que também é usado no estudo da inversão de matrizes no Capítulo 2. Neste Capítulo é também estudado o determinante, que é definido usando cofatores. As demonstrações dos resultados deste capítulo podem ser, a critério do leitor, feitas somente para matrizes 3×3.

O Capítulo 3 trata de vetores no plano e no espaço. Os vetores são definidos de forma geométrica, assim como a soma e a multiplicação por escalar. São provadas algumas propriedades geometricamente. Depois são introduzidos sistemas de coordenadas de forma natural sem a neces-

*MATLAB é marca registrada de The Mathworks, Inc.

sidade da definição de base. Os produtos escalar e vetorial são definidos também geometricamente. O Capítulo 4 trata de retas e planos no espaço. São estudados ângulos e distâncias entre retas e planos.

O Capítulo 5 cobre a teoria dos espaços euclidianos. O conceito de dependência e independência linear é introduzido de forma algébrica, acompanhado da interpretação geométrica para os casos de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Aqui são estudadas as posições relativas de retas e planos como uma aplicação do conceito de dependência linear. São também tratados os conceitos de subespaços e de base de subespaços. São abordados também o produto escalar e bases ortonormais.

O Capítulo 6 traz um estudo da diagonalização de matrizes em geral e a diagonalização de matrizes simétricas através de um matriz ortogonal. É feita uma aplicação ao estudo das seções cônicas.

Os exercícios estão agrupados em três classes. Os "Exercícios Numéricos", que contém exercícios que são resolvidos fazendo cálculos, que podem ser realizados sem a ajuda de um computador ou de uma máquina de calcular. Os "Exercícios Teóricos", que contém exercícios que requerem demonstrações. Alguns são simples, outros são mais complexos. Os mais difíceis complementam a teoria e geralmente são acompanhados de sugestões. Os "Exercícios usando o MATLAB", que contém exercícios para serem resolvidos usando o MATLAB ou outro software. Os comandos necessários a resolução destes exercícios são também fornecidos juntamente com uma explicação rápida do uso. Os exercícios numéricos são imprescindíveis, enquanto a resolução dos outros, depende do nível e dos objetivos pretendidos para o curso.

O MATLAB é um software destinado a fazer cálculos com matrizes (MATLAB = MATrix LABoratory). Os comandos do MATLAB são muito próximos da forma como escrevemos expressões algébricas, tornando mais simples o seu uso. Podem ser incorporados às rotinas pré-definidas, pacotes para cálculos específicos. Um pacote chamado `gaal` com funções que são direcionadas para o estudo de Geometria Analítica e Álgebra Linear pode ser obtido através da internet no endereço `http://www.mat.ufmg.br/~regi`, assim como um texto com uma introdução ao MATLAB e instruções de como instalar o pacote `gaal`. Mais informações sobre o que o MATLAB é capaz, podem ser obtidas em [4, 27].

No fim de cada capítulo temos um "Teste do Capítulo", onde o aluno pode avaliar os seus conhecimentos. Os Exercícios Numéricos e os Exercícios usando o MATLAB estão resolvidos após o último capítulo utilizando o MATLAB. Desta forma o leitor que não estiver interessado em usar o software pode obter apenas as respostas dos exercícios, enquanto aquele que tiver algum interesse, pode ficar sabendo como os exercícios poderiam ser resolvidos fazendo uso do MATLAB e do pacote `gaal`.

O programa MATLAB pode ser adquirido gratuitamente na compra do Guia do Usuário [27]. Por exemplo, o Guia do Usuário já foi adquirido, através da internet, na livraria Blackwell's na Inglaterra (`http://bookshop.blackwell.co.uk`), por `US$ 61,00`, acompanhado de um CD com o programa.

Gostaria de agradecer a todos os professores que nos últimos três anos adotaram edições anteriores deste texto em particular aos professores Renato Pedrosa da UNICAMP, Rosa Maria S. B. Chaves da USP-SP, Lana Mara R. dos Santos da UFV e Ana Tucci de Carvalho da PUC-MG. Gostaria de agradecer também aos professores que colaboraram apresentando correções, críticas e sugestões, entre eles Dan Avritzer, Joana Darc A. S. da Cruz, Francisco Dutenhefner, Jorge Sabatucci, Seme Gebara, Alexandre Washington, Vivaldo R. Filho, Hamilton P. Bueno, Paulo A. F. Machado, Helder C. Rodrigues, Flaviana A. Ribeiro, Cristina Marques, Rogério S. Mol, Denise Burgarelli, Maria Laura M. Gomes, Maria Cristina C. Ferreira, Paulo C. de Lima, José Barbosa Gomes, Moacir G. dos Anjos e Daniel C. de Morais Filho.

Sugestão de Cronograma

Capítulo 1	4 aulas
Capítulo 2	4 aulas
Capítulo 3	4 aulas
Capítulo 4	4 aulas
Capítulo 5	8 aulas
Capítulo 6	6 aulas
Total	30 aulas

Capítulo 1

Matrizes e Sistemas Lineares

1.1 Matrizes

Operando com matrizes estamos utilizando uma forma compacta de fazermos operações com vários números simultaneamente. Vamos definir operações matriciais análogas às operações com números e provar as propriedades que são válidas para essas operações. Depois disto, o estudo envolvendo operações com vários números pode ser simplificado fazendo operações com as matrizes e usando as propriedades que já foram demonstradas. Por exemplo, veremos que um sistema de várias equações lineares pode ser escrito em termos de uma única equação matricial.

Uma **matriz** A, $m \times n$ (m por n), é uma tabela de mn números dispostos em m linhas e n

colunas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

A i-**ésima linha** de A é

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix},$$

para $i = 1, \dots, m$ e a j-**ésima coluna** de A é

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix},$$

para $j = 1, \dots, n$. Usamos também a notação $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Dizemos que a_{ij} ou $[A]_{ij}$ é o **elemento** ou a **entrada** de posição i, j da matriz A. Se $m = n$, dizemos que A é uma **matriz quadrada de ordem** n e os elementos $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ formam a chamada **diagonal (principal)** de A.

Exemplo 1.1. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ e } F = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}.$$

As matrizes A e B são 2×2. A matriz C é 2×3, D é 1×3, E é 3×1 e F é 1×1. De acordo com a notação que introduzimos, exemplos de elementos de algumas das matrizes dadas acima são $a_{12} = 2$, $c_{23} = -2$, $e_{21} = 4$, $[A]_{22} = 4$, $[D]_{12} = 3$.

Duas matrizes são consideradas iguais se elas têm o mesmo tamanho e os elementos correspondentes são iguais, ou seja, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{p\times q}$ são **iguais** se $m = p$, $n = q$ e $a_{ij} = b_{ij}$ para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Vamos, agora, introduzir as operações matriciais.

1.1.1 Operações com Matrizes

Definição 1.1. A **soma** de duas matrizes de **mesmo tamanho** $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ é definida como sendo a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ obtida somando-se os elementos correspondentes de A e B, ou seja,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\,,$$

para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Escrevemos $C = A + B$ e $[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Exemplo 1.2. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Se chamamos de C a soma das duas matrizes A e B, então

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1+(-2) & 2+1 & -3+5 \\ 3+0 & 4+3 & 0+(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

Definição 1.2. A **multiplicação de uma matriz** $A = (a_{ij})_{m\times n}$ **por um escalar** (número) α é definida pela matriz $B = (b_{ij})_{m\times n}$ obtida multiplicando-se cada elemento da matriz pelo escalar, ou seja,

$$b_{ij} = \alpha\, a_{ij}\,,$$

para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Escrevemos $B = \alpha A$ e $[\alpha A]_{ij} = \alpha\, a_{ij}$. Dizemos que a matriz B é um **múltiplo escalar** da matriz A.

Exemplo 1.3. O produto da matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ pelo escalar -3 é dado por

$$-3\,A = \begin{bmatrix} (-3)(-2) & (-3)\,1 \\ (-3)\,0 & (-3)\,3 \\ (-3)\,5 & (-3)(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & -9 \\ -15 & 12 \end{bmatrix}.$$

Definição 1.3. O **produto** de duas matrizes, tais que **o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda**, $A = (a_{ij})_{m\times p}$ e $B = (b_{ij})_{p\times n}$ é definido pela matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} && (1.1)\\ &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\,, && (1.2)\end{aligned}$$

para $i = 1,\ldots,m$ e $j = 1,\ldots,n$. Escrevemos $C = AB$ e $[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$.

A equação (1.1) está dizendo que o elemento i, j do produto é igual à soma dos produtos dos elementos da i-ésima linha de A pelos elementos correspondentes da j-ésima coluna de B.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p}\\ \vdots & & \ldots & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ip}\\ \vdots & & \ldots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mp}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1j} & \ldots & b_{1n}\\ b_{21} & \ldots & b_{2j} & \ldots & b_{2n}\\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots\\ b_{p1} & \ldots & b_{pj} & \ldots & b_{pn}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n}\\ \vdots & \boxed{c_{ij}} & \vdots\\ c_{m1} & \ldots & c_{mn}\end{bmatrix}$$

Na equação (1.2) estamos usando a **notação de somatório** para escrever a equação (1.1) de forma compacta. O símbolo $\sum_{k=1}^{p}$ significa que estamos fazendo uma soma em que o índice k está variando de $k = 1$ até $k = p$.

Exemplo 1.4. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se chamamos de C o produto das duas matrizes A e B, então

$$C = AB = \begin{bmatrix} 1\,(-2) + 2 \cdot 0 + (-3)\,5 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + (-3)\,(-4) & 0 \\ 3\,(-2) + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 5 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 0\,(-4) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & 19 & 0 \\ -6 & 15 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observação. No exemplo anterior o produto BA não está definido (por que?). Entretanto, mesmo quando ele está definido, BA pode não ser igual a AB, ou seja, o produto de matrizes **não é comutativo**, como mostra o exemplo seguinte.

Exemplo 1.5. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Então,

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -6 & 15 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}.$$

Definição 1.4. A **transposta** de uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é definida pela matriz $B = (b_{ij})_{n \times m}$ obtida trocando-se as linhas com as colunas, ou seja,

$$b_{ij} = a_{ji}\,,$$

para $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$. Escrevemos $B = A^t$ e $[A^t]_{ij} = a_{ji}$.

Exemplo 1.6. As transpostas das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{são}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B^t = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

A seguir, mostraremos as propriedades que são válidas para a álgebra matricial. Várias propriedades são semelhantes àquelas que são válidas para os números reais, mas deve-se tomar cuidado com as diferenças. Uma propriedade importante que é válida para os números reais, mas não é válida para as matrizes é a comutatividade do produto, como foi mostrado no Exemplo 1.5. Por ser compacta, usaremos a notação de somatório na demonstração de várias propriedades. Algumas propriedades desta notação estão explicadas no Apêndice I na página 22.

1.1.2 Propriedades da Álgebra Matricial

Teorema 1.1. *Sejam A, B e C matrizes com tamanhos apropriados, α e β escalares. São válidas as seguintes propriedades para as operações matriciais:*

(a) (comutatividade da soma) $A + B = B + A$;

(b) (associatividade da soma) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

(c) *(elemento neutro da soma) Existe uma única matriz* $\bar{0}$, $m \times n$, *tal que*

$$A + \bar{0} = A,$$

para toda matriz A, $m \times n$. *A matriz* $\bar{0}$ *é chamada* **matriz nula** $m \times n$.

(d) *(elemento simétrico) Para cada matriz* A, *existe uma única matriz* B, *tal que*

$$A + B = \bar{0}.$$

Representamos B *por* $-A$.

(e) *(associatividade)* $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;

(f) *(distributividade)* $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

(g) *(distributividade)* $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

(h) *(associatividade do produto)* $A(BC) = (AB)C$;

(i) *(distributividade)* $A(B + C) = AB + AC$ e $(B + C)A = BA + CA$;

(j) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;

(k) $(A^t)^t = A$;

(l) $(A + B)^t = A^t + B^t$;

(m) $(AB)^t = B^t A^t$;

(n) $(\alpha A)^t = \alpha\, A^t$;

(o) *A matriz,* $n \times n$*,*

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix},$$

chamada **matriz identidade** *é tal que*

$$A\,I_n = A, \quad \textit{para toda matriz } A = (a_{ij})_{m\times n} \textit{ e}$$

$$I_n\,B = B, \quad \textit{para toda matriz } B = (b_{ij})_{n\times m}.$$

Demonstração. Para provar as igualdades acima, devemos mostrar que os elementos da matriz do lado esquerdo são iguais aos elementos correspondentes da matriz do lado direito. Serão usadas várias propriedades dos números sem citá-las explicitamente.

(a) $[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = [B + A]_{ij}$;

(b) $[A + (B + C)]_{ij} = a_{ij} + [B + C]_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = [A + B]_{ij} + c_{ij} = [(A + B) + C]_{ij}$;

(c) Seja X uma matriz $m \times n$ tal que

$$A + X = A \tag{1.3}$$

para qualquer matriz A, $m \times n$. Comparando os elementos correspondentes, temos que

$$a_{ij} + x_{ij} = a_{ij}\,,$$

ou seja, $x_{ij} = 0$, para $i = 1\ldots, m$ e $j = 1\ldots, n$. Portanto, a única matriz que satisfaz (1.3) é a matriz em que todos os seus elementos são iguais a zero. Denotamos a matriz X por $\bar{0}$.

(d) Dada uma matriz A, $m \times n$, seja X uma matriz $m \times n$, tal que

$$A + X = \bar{0}\,. \tag{1.4}$$

Comparando os elementos correspondentes, temos que

$$a_{ij} + x_{ij} = 0\,,$$

ou seja, $x_{ij} = -a_{ij}$, para $i = 1\ldots, m$ e $j = 1\ldots, n$. Portanto, a única matriz que satisfaz (1.4) é a matriz em que todos os seus elementos são iguais aos simétricos dos elementos de A. Denotamos a matriz X por $-A$.

(e) $[\alpha(\beta A)]_{ij} = \alpha[\beta A]_{ij} = \alpha(\beta a_{ij}) = (\alpha\beta)a_{ij} = [(\alpha\beta)A]_{ij}$.

(f) $[(\alpha+\beta)A]_{ij} = (\alpha+\beta)a_{ij} = (\alpha a_{ij}) + (\beta a_{ij}) = [\alpha A]_{ij} + [\beta A]_{ij} = [\alpha A + \beta A]_{ij}$.

(g)
$$\begin{aligned}[\alpha(A+B)]_{ij} &= \alpha[A+B]_{ij} = \alpha(a_{ij}+b_{ij}) = \alpha a_{ij} + \alpha b_{ij} = [\alpha A]_{ij} + [\alpha B]_{ij} \\ &= [\alpha A + \alpha B]_{ij}.\end{aligned}$$

(h) A demonstração deste item é a mais trabalhosa. Sejam A, B e C matrizes $m \times p$, $p \times q$ e $q \times n$ respectivamente. A notação de somatório aqui pode ser muito útil, pelo fato de ser compacta.

$$\begin{aligned}[A(BC)]_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}[BC]_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}(\sum_{l=1}^{q} b_{kl}c_{lj}) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} a_{ik}(b_{kl}c_{lj}) = \\ &= \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q}(a_{ik}b_{kl})c_{lj} = \sum_{l=1}^{q}\sum_{k=1}^{p}(a_{ik}b_{kl})c_{lj} = \sum_{l=1}^{q}(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kl})c_{lj} = \\ &= \sum_{l=1}^{q}[AB]_{il}c_{lj} = [(AB)C]_{ij}\,.\end{aligned}$$

(i)
$$
\begin{aligned}
[A(B+C)]_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}[B+C]_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) = \sum_{k=1}^{p}(a_{ik}b_{kj}+a_{ik}c_{kj}) = \\
&= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{p} a_{ik}c_{kj} = [AB]_{ij} + [AC]_{ij} = [AB+AC]_{ij}\,.
\end{aligned}
$$

A outra igualdade é inteiramente análoga a anterior e deixamos como exercício.

(j) $[\alpha(AB)]_{ij} = \alpha\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{p}(\alpha a_{ik})b_{kj} = [(\alpha A)B]_{ij}$ e

$[\alpha(AB)]_{ij} = \alpha\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}(\alpha b_{kj}) = [A(\alpha B)]_{ij}$.

(k) $[(A^t)^t]_{ij} = [A^t]_{ji} = a_{ij}$.

(l) $[(A+B)^t]_{ij} = [A+B]_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = [A^t]_{ij} + [B^t]_{ij}$.

(m) $[(AB)^t]_{ij} = [AB]_{ji} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^{p}[A^t]_{kj}[B^t]_{ik} = \sum_{k=1}^{p}[B^t]_{ik}[A^t]_{kj} = [B^tA^t]_{ij}$.

(n) $[(\alpha A)^t]_{ij} = [\alpha A]_{ji} = \alpha a_{ji} = \alpha[A^t]_{ij} = [\alpha A^t]_{ij}$.

(o) A demonstração deste item é simples e deixamos como exercício.

$\square$

A **diferença** entre duas matrizes de mesmo tamanho A e B é definida por

$$A - B = A + (-B),$$

ou seja, é a soma da matriz A com a simétrica da matriz B.

Sejam A uma matriz $n \times n$ e p um inteiro positivo. Definimos a **potência** p de A, por $A^p = \underbrace{A \ldots A}_{p \text{ vezes}}$. E para $p = 0$, definimos $A^0 = I_n$.

Exemplo 1.7. Vamos verificar se para matrizes A e B, quadradas, vale a igualdade

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2. \tag{1.5}$$

Usando a propriedade (i) do teorema anterior obtemos

$$\begin{aligned} (A + B)(A - B) &= (A + B)A + (A + B)(-B) \\ &= AA + BA - AB - BB = A^2 + BA - AB - B^2 \end{aligned}$$

Assim, $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ se, e somente se, $BA - AB = 0$, ou seja, se, e somente se, $AB = BA$. Como o produto de matrizes não é comutativo, a conclusão é que a igualdade (1.5), **não** vale para matrizes em geral. Como contra-exemplo basta tomarmos duas matrizes que não comutem entre si. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para estas matrizes

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A - B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^2 = A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^2 = B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$(A + B)(A - B) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A^2 - B^2.$$

Exercícios Numéricos (respostas na página 312)

1.1.1. Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -6 & 9 & -7 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -9 \\ -1 & 0 & -4 \\ -6 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Se for possível, calcule:
(a) $AB - BA$; (b) $2C - D$; (c) $(2D^t - 3E^t)^t$; (d) $D^2 - DE$.

1.1.2. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Verifique que $3A_1 + 2A_2 + 5A_3 = AX$, onde A_j é a j-ésima coluna de A.

1.1.3. Encontre um valor de x tal que $AB^t = 0$, onde

$$A = \begin{bmatrix} x & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

1.1.4. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -9 \\ 9 & -2 & 2 \\ -4 & -5 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -9 & -3 & -7 \\ -4 & 8 & 4 \\ -5 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Encontre:
(a) a 1ª linha de AB;
(b) a 3ª coluna de AB;
(c) a 2ª linha de A^tB^t;
(d) a 2ª coluna de A^tB^t.

1.1.5. Mostre que as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1/y \\ y & 1 \end{bmatrix}$, onde y é uma número real não nulo, verificam a equação $X^2 = 2X$.

1.1.6. Mostre que se A e B são matrizes que comutam com a matriz $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, então $AB = BA$.

Exercícios usando o MATLAB

Uma vez inicializado o MATLAB, aparecerá na janela de comandos um prompt >> ou `EDU>>`. O prompt significa que o MATLAB está esperando um comando. Todo comando deve ser finalizado teclando-se **Enter**. Comandos que foram dados anteriormente podem ser obtidos novamente usando as teclas ↑ e ↓. Enquanto se estiver escrevendo um comando, este pode ser corrigido usando as teclas ←, →, **Delete** e **Backspace**. O MATLAB faz diferença entre letras maiúsculas e minúsculas.

No MATLAB, pode-se obter ajuda sobre qualquer comando ou função. O comando
`>> help`
(sem o prompt >>) mostra uma listagem de todos os pacotes disponíveis. Ajuda sobre um pacote específico ou sobre um comando ou função específica pode ser obtida com o comando
`>> help nome`,
(sem a vírgula e sem o prompt >>) onde `nome` pode ser o nome de um pacote ou o nome de um comando ou função.

Além dos comandos e funções pré-definidas, escrevemos um pacote chamado `gaal` com funções específicas para a aprendizagem de Geometria Analítica e Álgebra Linear. Este pacote pode ser obtido gratuitamente através da internet no endereço `http://www.mat.ufmg.br/~regi`, assim como um texto com uma introdução ao MATLAB e instruções de como instalar o pacote `gaal`. Depois deste pacote ser devidamente instalado, o comando help gaal no prompt do MATLAB dá informações sobre este pacote.

Mais informações sobre as capacidades do MATLAB podem ser obtidas em [4, 27].

Vamos descrever aqui alguns comandos que podem ser usados para a manipulação de matrizes. Outros comandos serão introduzidos a medida que forem necessários.

`>> syms x y z` diz ao MATLAB que as variáveis `x y` e `z` são simbólicas.

`>> A=[a11,a12,...,a1n;a21,a22,...; ...,amn]` cria uma matriz, m por n, usando os elementos `a11, a12, ..., amn` e a armazena numa variável de nome `A`. Por exemplo, `>> A=[1,2,3;4,5,6]` cria a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$;

`>> I=eye(n)` cria a matriz identidade n por n e a armazena numa variável `I`;

`>> O=zeros(n)` ou `>> O=zeros(m,n)` cria a matriz nula n por n ou m por n, respectivamente, e a armazena numa variável `O`;

`>> A+B` é a soma de `A` e `B`,

`>> A*B` é o produto de `A` por `B`,

`>> A.'` é a transposta de `A`,

`>> A-B` é a diferença `A` menos `B`,

`>> num*A` é o produto do escalar `num` por `A`,

`>> A^k` é a potência `A` elevado a k.

`>> A(:,j)` é a coluna j da matriz `A`, `>> A(i,:)` é a linha i da matriz `A`.

`>> diag([d1,...,dn])` cria uma matriz diagonal, cujos elementos da diagonal são iguais aos elementos da matriz `[d1,...,dn]`, ou seja, são `d1,...,dn`.

`>> format rat` muda a exibição dos números para o formato racional. O comando `help format` mostra outras possibilidades.

`>> solve(expr)` determina a solução da equação `expr=0`. Por exemplo, `>> solve(x^2-4)` determina as soluções da equação $x^2 - 4 = 0$;

Comando do pacote GAAL:

`>> A=randi(n)` ou `>> A=randi(m,n)` cria uma matriz `n` por `n` ou `m` por `n`, respectivamente, com elementos inteiros aleatórios entre -5 e 5.

1.1.7. Use o MATLAB para calcular alguns membros da seqüência A, $A^2, \ldots, A^k, \ldots$, para

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 0 & -1/5 \end{bmatrix}$.

A seqüência parece estar convergindo para alguma matriz? Se estiver, para qual?

1.1.8. Use o formato racional de exibição de números, `>> format rat`. Calcule as potências das matrizes dadas a seguir e encontre experimentalmente (por tentativa!) o menor inteiro $k > 1$ tal que:

(a) $A^k = I_3$, onde
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

(b) $A^k = A$, onde
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

(c) $A^k = \bar{0}$, onde
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.1.9. Vamos fazer um experimento no MATLAB para tentar ter uma idéia do quão comum é encontrar matrizes cujo produto comuta. No prompt do MATLAB digite a seguinte linha:

```
>> c=0; for n=1:1000,A=randi(3);B=randi(3);if(A*B==B*A),c=c+1;end,end,c
```

(não esqueça das vírgulas e pontos e vírgulas!). O que esta linha está mandando o MATLAB fazer é o seguinte:

- Criar um contador `c` e atribuir a ele o valor zero.
- Atribuir às variáveis `A` e `B`, 1000 matrizes 3×3 com entradas inteiras e aleatórias entre -5 e 5.
- Se `AB=BA`, ou seja, `A` e `B` comutarem, então o contador `c` é acrescido de 1.

- No final o valor existente na variável c é escrito.

Qual a conclusão que você tira do valor obtido na variável c?

1.1.10. Faça um experimento semelhante ao anterior, mas para o caso em que cada uma das matrizes é **diagonal**, isto é, os elementos que estão fora da diagonal são iguais a zero. Use a seta para cima $\uparrow$ para obter novamente a linha digitada e edite a linha no prompt do MATLAB de forma a obter algo semelhante à linha:

```
>> c=0; for n=1:1000,A=diag(randi(1,3));B=diag(randi(1,3));if( ....
```

Qual a conclusão que você tira do valor obtido na variável c?

1.1.11. Faça um experimento semelhante ao anterior, mas para o caso em que uma das matrizes é diagonal. Use a seta para cima $\uparrow$ para obter novamente a linha digitada e edite a linha no prompt do MATLAB de forma a obter a seguinte linha:

```
>> c=0; for n=1:1000,A=diag(randi(1,3));B=randi(3);if(A*B==B*A),c=c+1;A,B,end,end,c
```

Aqui são impressas as matrizes A e B quando elas comutarem. Qual a conclusão que você tira deste experimento? Qual a probabilidade de um tal par de matrizes comutarem?

1.1.12. Use o MATLAB para resolver os **Exercícios Numéricos**.

Exercícios Teóricos

1.1.13. Seja $D = (d_{ij})_{n\times n}$ uma **matriz diagonal**, isto é, os elementos que estão fora da diagonal são iguais a zero. Sejam $d_{ii} = \lambda_i$ os elementos da diagonal de D. Seja $A = (a_{ij})_{n\times n}$.

(a) Mostre que o produto AD é obtido da matriz A multiplicando-se cada coluna j por λ_j, ou seja, se $A = [\, A_1 \; A_2 \; \ldots \; A_n \,]$, onde $A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$ é a coluna j de A, então $AD = [\, \lambda_1 A_1 \; \lambda_2 A_2 \; \ldots \; \lambda_n A_n \,]$.

(b) Mostre que o produto DA é obtido da matriz A multiplicando-se cada linha i por λ_i, ou seja, se $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$, onde $A_i = [\, a_{i1} \; \ldots \; a_{in} \,]$ é a linha i de A, então $DA = \begin{bmatrix} \lambda_1 A_1 \\ \lambda_2 A_2 \\ \vdots \\ \lambda_n A_n \end{bmatrix}$.

1.1.14. Sejam A e B matrizes $m \times p$ e $p \times n$, respectivamente.

(a) Mostre que a j-ésima coluna do produto AB é igual ao produto AB_j, onde $B_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix}$ é a j-ésima coluna de B, ou seja, se $B = [\, B_1 \; \ldots \; B_n \,]$, então $AB = [\, AB_1 \; \ldots \; AB_n \,]$;

(b) Mostre que a i-ésima linha do produto AB é igual ao produto $A_i B$, onde $A_i = [\, a_{i1} \; \ldots \; a_{ip} \,]$ é a i-ésima linha de A, ou seja, se $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$, então $AB = \begin{bmatrix} A_1 B \\ A_2 B \\ \vdots \\ A_m B \end{bmatrix}$.

1.1.15. Seja A uma matriz $m \times n$ e $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ uma matriz $n \times 1$. Prove que

$AX = \sum_{j=1}^{n} x_j A_j$, onde A_j é a j-ésima coluna de A. (Sugestão: Desenvolva o lado direito e chegue ao lado esquerdo.)

1.1.16. Sejam $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, $E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\ldots$, $E_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ matrizes $n \times 1$.

(a) Mostre que $X^tY = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$. Em particular, $X^tE_i = x_i$, $E_i^tE_j = 0$, se $i \neq j$ e $E_i^tE_i = 1$, para $i, j = 1, \ldots, n$.

(b) Mostre que $XY^t = \begin{bmatrix} x_1y_1 & \ldots & x_1y_n \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ x_ny_1 & \ldots & x_ny_n \end{bmatrix}$. Em particular, E_iY^t é uma matriz $n \times n$, cuja única linha possivelmente não nula é a linha i, que é igual a Y^t e $E_iE_j^t$ é a matriz $n \times n$ cujo único elemento não nulo é o elemento i, j, que é igual a 1, para $i, j = 1, \ldots, n$.

(c) Mostre que se A é uma matriz $m \times n$, então AE_j é igual à coluna j da matriz A e se A é uma matriz $n \times m$, então E_i^tA é igual à linha i da matriz A.

1.1.17. (a) Mostre que se A é uma matriz $m \times n$ tal que $AX = \bar{0}$, para toda matriz X, $n \times 1$, então $A = \bar{0}$. (Sugestão: Use o item (c) do exercício anterior.)

(b) Sejam B e C matrizes $m \times n$, tais $BX = CX$, para todo X, $n \times 1$. Mostre que $B = C$. (Sugestão: Use o item anterior.)

1.1.18. Mostre que a matriz identidade I_n é a única matriz tal que $A\,I_n = I_n A = A$ para qualquer matriz A, $n \times n$. (Sugestão: Seja J_n uma matriz tal que $A\,J_n = J_n\,A = A$. Mostre que $J_n = I_n$.)

1.1.19. Se $AB = BA$ e p é um inteiro positivo, mostre que $(AB)^p = A^p B^p$.

1.1.20. Sejam A, B e C matrizes $n \times n$.

(a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$? E se $AB = BA$? Justifique.

(b) $(AB)C = C(AB)$? E se $AC = CA$ e $BC = CB$? Justifique.

(Sugestão: Veja o Exemplo 1.7 na página 12.)

1.1.21. (a) Se A e B são duas matrizes tais que $AB = \bar{0}$, então $A = \bar{0}$ ou $B = \bar{0}$? Justifique.

(b) Se $AB = \bar{0}$, então $BA = \bar{0}$? Justifique.

(c) Se A é uma matriz tal que $A^2 = \bar{0}$, então $A = \bar{0}$? Justifique.

1.1.22. Dizemos que uma matriz A, $n \times n$, é **simétrica** se $A^t = A$ e é **anti-simétrica** se $A^t = -A$.

(a) Mostre que se A é simétrica, então $a_{ij} = a_{ji}$, para $i, j = 1, \ldots n$ e que se A é anti-simétrica, então $a_{ij} = -a_{ji}$, para $i, j = 1, \ldots n$. Portanto, os elementos da diagonal principal de uma matriz anti-simétrica são iguais a zero.

(b) Mostre que se A e B são simétricas, então $A + B$ e αA são simétricas, para todo escalar α.

(c) Mostre que se A e B são simétricas, então AB é simétrica se, e somente se, $AB = BA$.

(d) Mostre que se A e B são anti-simétricas, então $A + B$ e αA são anti-simétricas, para todo escalar α.

(e) Mostre que para toda matriz A, $n \times n$, $A + A^t$ é simétrica e $A - A^t$ é anti-simétrica.

(f) Mostre que toda matriz quadrada A pode ser escrita como a soma de uma matriz simétrica e uma anti-simétrica. (Sugestão: Observe o resultado da soma de $A + A^t$ com $A - A^t$.)

1.1.23. Para matrizes quadradas $A = (a_{ij})_{n\times n}$ definimos o **traço** de A como sendo a soma dos elementos da diagonal (principal) de A, ou seja, $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

(a) Mostre que $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$.

(b) Mostre que $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha\mathrm{tr}(A)$.

(c) Mostre que $\mathrm{tr}(A^t) = \mathrm{tr}(A)$.

(d) Mostre que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. (Sugestão: Prove inicialmente para matrizes 2×2.)

1.1.24. Seja A uma matriz $n \times n$. Mostre que se $AA^t = \bar{0}$, então $A = \bar{0}$. (Sugestão: Use o traço.) E se a matriz A for $m \times n$, com $m \neq n$?

1.1.25. Já vimos que o produto de matrizes não é comutativo. Entretanto, certos conjuntos de matrizes são comutativos. Mostre que:

(a) Se D_1 e D_2 são matrizes diagonais $n \times n$, então $D_1D_2 = D_2D_1$.

(b) Se A é uma matriz $n \times n$ e

$$B = a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + \ldots + a_kA^k,$$

onde $a_0, \ldots, a_k$ são escalares, então $AB = BA$.

1.1.26. (a) Determine todas as matrizes A, 2×2, **diagonais** que comutam com toda matriz B, 2×2, ou seja, tais que $AB = BA$, para toda matriz B, 2×2.

(b) Determine todas as matrizes A, 2×2, que comutam com toda matriz B, 2×2, ou seja, tais que $AB = BA$, para toda matriz B, 2×2.

Apêndice I: Notação de Somatório

São válidas algumas propriedades para a notação de somatório:

(a) O índice do somatório é uma variável muda que pode ser substituída por qualquer letra:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = \sum_{j=1}^{n} f_j.$$

(b) O somatório de uma soma pode ser escrito como uma soma de dois somatórios:

$$\sum_{i=1}^{n}(f_i + g_i) = \sum_{i=1}^{n} f_i + \sum_{i=1}^{n} g_i.$$

Pois,
$$\sum_{i=1}^{n}(f_i+g_i) = (f_1+g_1)+\ldots+(f_n+g_n) = (f_1+\ldots+f_n)+(g_1+\ldots+g_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i+\sum_{i=1}^{n} g_i.$$
Aqui foram aplicadas as propriedades associativa e comutativa da soma de números.

(c) Se no termo geral do somatório aparece um produto, em que um fator não depende do índice do somatório, então este fator pode "sair" do somatório:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i\, g_k = g_k \sum_{i=1}^{n} f_i.$$

Pois,
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i\, g_k = f_1 g_k + \ldots + f_n g_k = g_k(f_1 + \ldots + f_n) = g_k \sum_{i=1}^{n} f_i$. Aqui foram aplicadas as propriedades distributiva e comutativa do produto em relação a soma de números.

(d) Num somatório duplo, a ordem dos somatórios pode ser trocada:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f_{ij}.$$

Pois,
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f_{ij} = \sum_{i=1}^{n}(f_{i1} + \ldots + f_{im}) = (f_{11} + \ldots + f_{1m}) + \ldots + (f_{n1} + \ldots + f_{nm}) = (f_{11} + \ldots + f_{n1}) + \ldots + (f_{1m} + \ldots + f_{nm}) = \sum_{j=1}^{m}(f_{1j} + \ldots + f_{nj}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f_{ij}$. Aqui foram aplicadas as propriedades comutativa e associativa da soma de números.

1.2 Sistemas de Equações Lineares

Muitos problemas em várias áreas da Ciência recaem na solução de sistemas lineares. Vamos ver como a álgebra matricial pode simplificar o estudo dos sistemas lineares.

Uma **equação linear** em n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b\,,$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e b são constantes reais;

Um **sistema de equações lineares** ou simplesmente **sistema linear** é um conjunto de equações lineares, ou seja, é um conjunto de equações da forma

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

onde a_{ij} e b_k são constantes reais, para $i, k = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Usando as operações matriciais que definimos na seção anterior, o sistema linear acima pode ser escrito como uma equação matricial

$$\boxed{A\,X = B,}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Uma **solução** de um sistema linear é uma matriz $S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$ tal que as equações do sistema são satisfeitas quando substituimos $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$. O conjunto de todas as soluções do sistema é chamado **conjunto solução** ou **solução geral** do sistema. A matriz A é chamada **matriz do sistema linear.**

Exemplo 1.8. O sistema linear de duas equações e duas incógnitas

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 1 \\ 2x & + & y & = & 0 \end{array} \right.$$

pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A solução (geral) do sistema acima é $x = -1/3$ e $y = 2/3$ (verifique!) ou

$$X = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}.$$

Uma forma de resolver um sistema linear é substituir o sistema inicial por outro que tenha o mesmo conjunto solução do primeiro, mas que seja mais fácil de resolver. O outro sistema é obtido depois de aplicar sucessivamente uma série de operações sobre as equações. As operações que são usadas são:

- Trocar a posição de duas equações do sistema;

- Multiplicar uma equação por um escalar diferente de zero;
- Somar a uma equação outra equação multiplicada por um escalar.

Estas operações são chamadas de **operações elementares**. Quando aplicamos operações elementares sobre as equações de um sistema linear somente os coeficientes do sistema são alterados, assim podemos aplicar as operações sobre a matriz de coeficientes do sistema, que chamamos de **matriz aumentada**, ou seja, a matriz

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Definição 1.5. Uma **operação elementar sobre as linhas** de uma matriz é uma das seguintes operações:

(a) Trocar a posição de duas linhas da matriz;

(b) Multiplicar uma linha da matriz por um escalar diferente de zero;

(c) Somar a uma linha da matriz um múltiplo escalar de outra linha.

O próximo teorema garante que ao aplicarmos operações elementares às equações de um sistema o conjunto solução não é alterado.

Teorema 1.2. *Se dois sistemas lineares $AX = B$ e $CX = D$, são tais que a matriz aumentada $[C \mid D]$ é obtida de $[A \mid B]$ aplicando-se uma operação elementar, então os dois sistemas possuem as mesmas soluções.*

Demonstração. A demonstração deste teorema segue de duas observações:

(a) Se X é solução de um sistema, então X também é solução do sistema obtido aplicando-se uma operação elementar sobre suas equações (verifique!).

(b) Se o sistema $CX = D$, pode ser obtido de $AX = B$ aplicando-se uma operação elementar às suas equações (ou equivalentemente às linhas da matriz aumentada), então o sistema $AX = B$ também pode ser obtido de $CX = D$ aplicando-se uma operação elementar, pois cada operação elementar possui uma operação elementar inversa do mesmo tipo, que desfaz o que a anterior fez (verifique!).

Pela observação (b), $AX = B$ e $CX = D$ podem ser obtidos um do outro aplicando-se uma operação elementar sobre as suas equações. E pela observação (a), os dois possuem as mesmas soluções. $\square$

Dois sistemas que possuem o mesmo conjunto solução são chamados **sistemas equivalentes**. Portanto, segue do Teorema 1.2 que aplicando-se operações elementares às equações de um sistema linear obtemos sistemas equivalentes.

1.2.1 Método de Gauss-Jordan

O método que vamos usar para resolver sistemas lineares consiste na aplicação de operações elementares às linhas da matriz aumentada do sistema até que obtenhamos uma matriz numa forma em que o sistema associado a esta matriz seja de fácil resolução. Vamos procurar obter uma matriz numa forma em que todas as linhas não nulas possuam como primeiro elemento não nulo o número 1 (chamado de **pivô**). Além disso, se uma coluna contém um pivô, então todos os seus outros elementos terão que ser iguais a zero. Vamos ver no exemplo seguinte como conseguimos isso.

Exemplo 1.9. Considere o seguinte sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 5x & + & 5y & & & = & 15 \\ 2x & + & 4y & + & z & = & 10 \\ 3x & + & 4y & & & = & 11 \end{array}\right.$$

A sua matriz aumentada é

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 5 & 5 & 0 & 15 \\ 2 & 4 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 0 & 11 \end{array}\right]$$

1ª eliminação:
Vamos procurar para pivô da 1ª linha um elemento não nulo da primeira coluna não nula (se for o caso, podemos usar a troca de linhas para "trazê-lo" para a primeira linha). Precisamos "fazê-lo" igual a um, para isto, multiplicamos a 1ª linha por $1/5$.

$$\boxed{1/5 \times 1^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 2^{\text{a}} \text{ linha}} \qquad \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 0 & 11 \end{array}\right]$$

Agora, precisamos "zerar" os outros elementos da 1ª coluna, que é a coluna do pivô, para isto, adicionamos à 2ª linha, -2 vezes a 1ª linha e adicionamos à 3ª linha, -3 vezes a 1ª linha.

$$\boxed{\begin{array}{l} -2\times 1^{\text{a}} \text{ linha} + 2^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 1^{\text{a}} \text{ linha} \\ -3\times 1^{\text{a}} \text{ linha} + 3^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 3^{\text{a}} \text{ linha} \end{array}} \qquad \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

2ª eliminação:
Olhamos para a sub-matriz obtida eliminando-se a 1ª linha. Escolhemos para pivô um elemento diferente de zero na 1ª coluna não nula desta sub-matriz. Como temos que "fazer" o pivô igual a um, vamos escolher o elemento de posição 3,2. Precisamos "colocá-lo" na 2ª linha, para isto, trocamos a 3ª linha com a 2ª.

$\boxed{2^{\underline{a}} \text{ linha} \longleftrightarrow 3^{\underline{a}} \text{ linha}}$
$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Agora, precisamos "zerar" os outros elementos da 2ª coluna, que é a coluna do pivô, para isto, somamos à 3ª linha, -2 vezes a 2ª e somamos à 1ª linha, -1 vezes a 2ª.

$$\boxed{\begin{array}{l} -2\times 2^{\underline{a}} \text{ linha} + 3^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 3^{\underline{a}} \text{ linha} \\ -1\times 2^{\underline{a}} \text{ linha} + 1^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 1^{\underline{a}} \text{ linha} \end{array}}
\qquad
\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Portanto o sistema dado é equivalente ao sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & & & = & 1 \\ & & y & & & = & 2 \\ & & & & z & = & 0 \end{array}\right.$$

que possui solução geral dada por

$$X = \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 0 \end{array}\right].$$

A última matriz que obtivemos está na forma que chamamos de **escalonada reduzida**.

Definição 1.6. Uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ está na forma **escalonada reduzida** quando satisfaz as seguintes condições:

(a) Todas as linhas nulas (formadas inteiramente por zeros) ocorrem abaixo das linhas não nulas;

(b) O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula, chamado **pivô**, é igual a 1;

(c) O pivô da linha $i+1$ ocorre à direita do pivô da linha i, para $i = 1, \ldots, m-1$.

(d) Se uma coluna contém um pivô, então todos os seus outros elementos são iguais a zero.

Se uma matriz satisfaz as propriedades (a) e (c), mas não necessariamente (b) e (d), dizemos que ela está na forma **escalonada**.

Exemplo 1.10. As matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são escalonadas reduzidas, enquanto

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

são escalonadas, mas **não** são escalonadas reduzidas.

Este método de resolução de sistemas, que consiste em aplicar operações elementares às linhas da matriz aumentada até que ela esteja na forma escalonada reduzida, é conhecido como **método de Gauss-Jordan**.

Exemplo 1.11. Considere o seguinte sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & & 3z & - & 9w & = & 6 \\ 5x & + & 15y & - & 10z & + & 40w & = & -45 \\ 4x & + & 12y & - & 2z & + & 14w & = & -24 \\ x & + & 3y & - & z & + & 5w & = & -7 \end{array}\right.$$

A sua matriz aumentada é

$$\left[\begin{array}{rrrr:r} 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 4 & 12 & -2 & 14 & -24 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \end{array}\right]$$

1ª eliminação:
Como temos que "fazer" o pivô igual a um, escolhemos para pivô o elemento de posição 4,1. Precisamos "colocá-lo" na primeira linha, para isto, trocamos a 4ª linha com a 1ª .

$$\boxed{\text{1ª linha} \longleftrightarrow \text{4ª linha}} \quad \left[\begin{array}{rrrr:r} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 4 & 12 & -2 & 14 & -24 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right]$$

Agora, precisamos "zerar" os outros elementos da 1ª coluna, que é a coluna do pivô, para isto, adicionamos à 2ª linha, -5 vezes a 1ª e adicionamos à 3ª linha, -4 vezes a 1ª.

$$\boxed{\begin{array}{l} -5\times 1^{\underline{a}} \text{ linha} + 2^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 2^{\underline{a}} \text{ linha} \\ -4\times 1^{\underline{a}} \text{ linha} + 3^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 3^{\underline{a}} \text{ linha} \end{array}} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & 15 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right]$$

2ª eliminação:
Olhamos para a sub-matriz obtida eliminando-se a 1ª linha. Escolhemos para pivô um elemento diferente de zero na 1ª coluna não nula desta sub-matriz. Escolhemos o elemento 2,3. Como temos que fazer o pivô igual a 1, multiplicamos a 2ª linha por $-1/5$.

$$\boxed{-(1/5)\times 2^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 2^{\underline{a}} \text{ linha}} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right]$$

Agora, precisamos "zerar" os outros elementos da 2ª coluna, que é a coluna do pivô, para isto, adicionamos à 1ª linha a 2ª , adicionamos à 3ª linha, -2 vezes a 2ª e à 4ª linha, -3 vezes a 2ª.

$$\boxed{\begin{array}{r} 2^{\underline{a}} \text{ linha} + 1^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 1^{\underline{a}} \text{ linha} \\ -2\times 2^{\underline{a}} \text{ linha} + 3^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 3^{\underline{a}} \text{ linha} \\ -3\times 2^{\underline{a}} \text{ linha} + 4^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 4^{\underline{a}} \text{ linha} \end{array}} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Esta matriz é escalonada reduzida. Portanto o sistema dado é equivalente ao sistema seguinte

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 3y & & & + & 2w & = & -5 \\ & & & & z & - & 3w & = & 2. \end{array}\right.$$

A matriz deste sistema possui duas colunas sem pivôs. As variáveis que não estão associadas a pivôs podem ser consideradas **variáveis livres**, isto é, podem assumir valores arbitrários. Vamos considerar as variáveis y e w variáveis livres. Sejam $w = \alpha$ e $y = \beta$. As variáveis associadas aos pivôs terão os seus valores dependentes das variáveis livres, $z = 2 + 3\alpha$, $x = -5 - 2\alpha - 3\beta$. Assim, a solução geral do sistema é

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 - 2\alpha - 3\beta \\ \beta \\ 2 + 3\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \text{para todos os valores de } \alpha \text{ e } \beta \text{ reais.}$$

Exemplo 1.12. Considere o seguinte sistema

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrrr} x & + & 3y & + & 13z & = & 9 \\ & & y & + & 5z & = & 2 \\ & & -2y & - & 10z & = & -8 \end{array} \right.$$

A sua matriz aumentada é

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 13 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -10 & -8 \end{array} \right]$$

1ª eliminação:
Como o pivô da 1ª linha é igual a 1 e os outros elementos da 1ª coluna são iguais a zero, não há nada o que fazer na 1ª eliminação.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 13 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -10 & -8 \end{array} \right]$$

2ª eliminação:
Olhamos para submatriz obtida eliminando-se a 1ª linha. Escolhemos para pivô um elemento não nulo da 1ª coluna não nula da submatriz. Escolhemos o elemento de posição 2,2. Como ele é igual a 1, precisamos, agora, "zerar" os outros elementos da coluna do pivô. Para isto somamos à 1ª linha, -3 vezes a 2ª e somamos à 3ª linha, 2 vezes a 2ª.

$$\boxed{\begin{array}{r} -3\times 2^{\text{a}}\text{ linha} + 1^{\text{a}}\text{ linha} \longrightarrow 1^{\text{a}}\text{ linha} \\ 2\times 2^{\text{a}}\text{ linha} + 3^{\text{a}}\text{ linha} \longrightarrow 3^{\text{a}}\text{ linha} \end{array}} \quad \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

Portanto o sistema dado é equivalente ao sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & & -2z & = & 3 \\ & & y & + & 5z & = & 2 \\ & & & & 0 & = & -4 \end{array}\right.$$

que **não** possui solução. Em geral, um sistema linear não tem solução se, e somente se, a última linha não nula da forma escalonada reduzida da sua matriz aumentada for da forma $[\,0\ \ldots\ 0\,|\,b'_m\,]$, com $b'_m \neq 0$.

Observação. Para se encontrar a solução de um sistema linear não é necessário transformar a matriz aumentada do sistema na sua forma escalonada reduzida, mas se a matriz está nesta forma, o sistema associado é o mais simples possível. Um outro método de resolver sistemas lineares consiste em, através da aplicação de operações elementares à matriz aumentada do sistema, se chegar a uma matriz que é somente **escalonada** (isto é, uma matriz que satisfaz as condições (a) e (c), mas não necessariamente (b) e (d) da Definição 1.6). Este método é conhecido como **método de Gauss**.

Proposição 1.3. *Sejam A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $m \times 1$. Se o sistema linear $AX = B$ possui duas soluções distintas $X_0 \neq X_1$, então ele tem infinitas soluções.*

Demonstração. Seja

$$X_\lambda = (1-\lambda)X_0 + \lambda X_1, \quad \text{para } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vamos mostrar que X_λ é solução do sistema $AX = B$, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$. Para isto vamos mostrar que $AX_\lambda = B$.

Aplicando as propriedades (i), (j) das operações matriciais (Teorema 1.1 na página 7) obtemos

$$AX_\lambda = A[(1-\lambda)X_0 + \lambda X_1] = A(1-\lambda)X_0 + A\lambda X_1 = (1-\lambda)AX_0 + \lambda AX_1$$

Como X_0 e X_1 são soluções de $AX = B$, então $AX_0 = B$ e $AX_1 = B$, portanto

$$AX_\lambda = (1-\lambda)B + \lambda B = [(1-\lambda) + \lambda]B = B,$$

pela propriedade (f) do Teorema 1.1.

Assim o sistema $AX = B$ tem infinitas soluções, pois para todo valor de $\lambda \in \mathbb{R}$, X_λ é solução e $X_\lambda - X_{\lambda'} = (\lambda - \lambda')(X_1 - X_0)$, ou seja, $X_\lambda \neq X_{\lambda'}$, para $\lambda \neq \lambda'$. Observe que para $\lambda = 0$, $X_\lambda = X_0$, para $\lambda = 1$, $X_\lambda = X_1$, para $\lambda = 1/2$, $X_\lambda = \frac{1}{2}X_0 + \frac{1}{2}X_1$, para $\lambda = 3$, $X_\lambda = -2X_0 + 3X_1$ e para $\lambda = -2$, $X_\lambda = 3X_0 - 2X_1$. $\square$

Para resolver sistemas lineares vimos aplicando operações elementares à matriz aumentada do sistema linear. Isto pode ser feito com quaisquer matrizes.

1.2.2 Matrizes Equivalentes por Linhas

Definição 1.7. Uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é **equivalente por linhas** a uma matriz $B = (b_{ij})_{m\times n}$, se B pode ser obtida de A aplicando-se uma seqüência de operações elementares sobre as suas linhas.

Exemplo 1.13. Observando os Exemplos 1.9, 1.11 e 1.12, vemos que as matrizes

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 0 & 15 \\ 2 & 4 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 0 & 11 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 4 & 12 & -2 & 14 & -24 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 13 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -10 & -8 \end{array}\right]$$

são equivalentes por linhas às matrizes

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right],$$

respectivamente. Matrizes estas que são escalonadas reduzidas. **Cuidado:** elas são equivalentes por linhas, **não** são iguais!

A relação "ser equivalente por linha" satisfaz as seguintes propriedades, cuja verificação deixamos como exercício para o leitor:

- Toda matriz é equivalente por linhas a ela mesma (reflexividade);
- Se A é equivalente por linhas a B, então B é equivalente por linhas a A (simetria);
- Se A é equivalente por linhas a B e B é equivalente por linhas a C, então A é equivalente por linhas a C (transitividade).

Em geral, qualquer matriz é equivalente por linhas a uma matriz escalonada reduzida e a demonstração, que omitiremos, pode ser feita da mesma forma que fizemos no caso particular das matrizes aumentadas dos Exemplos 1.9, 1.11 e 1.12. Além disso, a forma escalonada reduzida de uma matriz é única, pois se existissem duas, pelas propriedades da equivalência por linhas apresentadas acima, as duas seriam equivalentes por linha, ou seja, poderíamos obter uma da outra aplicando-se operações elementares. Mas, se aplicarmos qualquer operação elementar, que modifique uma matriz escalonada reduzida, a matriz obtida não será mais escalonada reduzida. Portanto, a forma escalonada reduzida é única.

Teorema 1.4. *Toda matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é equivalente por linhas a uma única matriz escalonada reduzida $R = (r_{ij})_{m\times n}$.*

O próximo resultado será de utilidade no estudo da inversão de matrizes.

Proposição 1.5. *Seja R uma matriz $n \times n$, na forma escalonada reduzida. Se $R \neq I_n$, então R tem uma linha nula.*

Demonstração. Observe que o pivô de uma linha i está sempre numa coluna j com $j \geq i$. Portanto, ou a última linha de R é nula ou o pivô da linha n está na posição n, n. Mas, neste caso todas as linhas anteriores são não nulas e os pivôs de cada linha i está na coluna i, ou seja, $R = I_n$. □

1.2.3 Sistemas Lineares Homogêneos

Um sistema linear da forma

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right. \tag{1.6}$$

é chamado **sistema homogêneo**. O sistema (1.6) pode ser escrito como $A\,X = \bar{0}$. Todo sistema homogêneo admite pelo menos a solução $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ chamada de **solução trivial**. Portanto, todo sistema homogêneo tem solução.

Observação. Para resolver um sistema linear homogêneo $A\,X = \bar{0}$, basta escalonarmos a matriz A do sistema, já que sob a ação de uma operação elementar a coluna de zeros não é alterada. Mas, é preciso ficar atento quando se escreve o sistema linear associado à matriz resultante das operações elementares, para se levar em consideração esta coluna de zeros que não vimos escrevendo.

Teorema 1.6. *Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$, é tal que $m < n$, então o sistema homogêneo $AX = \bar{0}$ tem solução diferente da solução trivial, ou seja, todo sistema homogêneo com menos equações do que incógnitas tem infinitas soluções.*

Demonstração. Como o sistema tem menos equações do que incógnitas ($m < n$), o número de linhas não nulas r da forma escalonada reduzida da matriz aumentada do sistema também é tal que $r < n$. Assim, temos r pivôs e $n - r$ incógnitas livres, que podem assumir todos os valores reais. Logo, o sistema admite solução não trivial. □

Exemplo 1.14. O conjunto solução de um sistema linear homogêneo satisfaz duas propriedades interessantes:

(a) Se X e Y são soluções do sistema homogêneo $AX = \bar{0}$, então $AX = \bar{0}$ e $AY = \bar{0}$ e portanto $X + Y$ também é solução pois, $A(X + Y) = AX + AY = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$;

(b) Se X é solução do sistema homogêneo $AX = \bar{0}$, então αX também o é, pois $A(\alpha X) = \alpha AX = \alpha\bar{0} = \bar{0}$.

Portanto, se X e Y são soluções de um sistema homogêneo, então $X+Y$ e αX também o são. Estas propriedades não são válidas para sistemas lineares em geral. Por exemplo, considere o sistema linear $A\,X = B$, onde $A = [1]$ e $B = [1]$. A solução deste sistema é $X = [1]$. Mas, $X + X = 2\,X = 2$, não é solução do sistema.

1.2.4 Matrizes Elementares (opcional)

Definição 1.8. Uma **matriz elementar** $n \times n$ é uma matriz obtida da matriz identidade I_n aplicando-se uma, e somente uma, operação elementar.

Vamos denotar por E_{ij} a matriz elementar obtida trocando-se a linha i com a linha j da matriz I_n, $E_i(\alpha)$ a matriz elementar obtida multiplicando-se a linha i da matriz I_n pelo escalar $\alpha \neq 0$ e $E_{i,j}(\alpha)$ a matriz elementar obtida da matriz I_n, somando-se à linha j, α vezes a linha i.

$$E_{i,j} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & 1 & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & 0 & \ldots & 1 & & & \cdot \\ \cdot & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \cdot \\ \cdot & & & 1 & \ldots & 0 & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & 1 & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}, E_i(\alpha) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \cdot \\ \cdot & & 1 & & & & \cdot \\ \cdot & & & \alpha & & & \cdot \\ \cdot & & & & 1 & & \cdot \\ \cdot & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\text{e} \quad E_{i,j}(\alpha) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \cdot \\ \cdot & & 1 & & & & \cdot \\ \cdot & & \vdots & \ddots & & & \cdot \\ \cdot & & \alpha & \ldots & 1 & & \cdot \\ \cdot & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Exemplo 1.15. As matrizes seguintes são as matrizes elementares 2×2:

$$E_{1,2} = E_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_1(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \text{ com } \alpha \neq 0,$$

$$E_{1,2}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E_{2,1}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sejam $E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, E_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ matrizes $m \times 1$.

As matrizes elementares podem ser escritas em termos das matrizes E_i como

$$E_{i,j} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} E_1^t \\ \vdots \\ E_j^t \\ \vdots \\ E_i^t \\ \vdots \\ E_m^t \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}, \quad E_i(\alpha) = \begin{bmatrix} E_1^t \\ \vdots \\ \alpha E_i^t \\ \vdots \\ E_m^t \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} \quad \text{e} \quad E_{i,j}(\alpha) = \begin{bmatrix} E_1^t \\ \vdots \\ E_i^t \\ \vdots \\ E_j^t + \alpha E_i^t \\ \vdots \\ E_m^t \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}$$

Aplicar uma operação elementar em uma matriz, corresponde a multiplicar a matriz à esquerda por uma matriz elementar, como mostra o resultado a seguir.

Teorema 1.7. *Sejam E uma matriz elementar $m \times m$ e A uma matriz qualquer $m \times n$. Então, EA é igual à matriz obtida aplicando-se na matriz A a mesma operação elementar que originou E.*

Demonstração. Como a i-ésima linha de um produto de matrizes BA é igual a B_iA, onde B_i é a i-ésima linha da matriz B (Exercício 1.1.14 na página 18) e $E_i^tA = A_i$, onde A_i é a linha i da matriz A (Exercício 1.1.16 (c) na página 19), então:

$$E_{i,j}A = \begin{array}{c} \\ \\ i\rightarrow \\ \\ j\rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} E_1^t \\ \vdots \\ E_j^t \\ \vdots \\ E_i^t \\ \vdots \\ E_m^t \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} E_1^tA \\ \vdots \\ E_j^tA \\ \vdots \\ E_i^tA \\ \vdots \\ E_m^tA \end{bmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}$$

$$E_i(\alpha)A = \begin{array}{c} \\ \\ i\rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} E_1^t \\ \vdots \\ \alpha E_i^t \\ \vdots \\ E_m^t \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} E_1^tA \\ \vdots \\ \alpha E_i^tA \\ \vdots \\ E_m^tA \end{bmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \alpha A_i \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array}$$

$$E_{i,j}(\alpha)A = \begin{array}{r} \\ \\ i\rightarrow \\ \\ j\rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{c} E_1^t \\ \vdots \\ E_i^t \\ \vdots \\ E_j^t+\alpha E_i^t \\ \vdots \\ E_m^t \end{array}\right] A = \left[\begin{array}{c} E_1^tA \\ \vdots \\ E_i^tA \\ \vdots \\ E_j^tA+\alpha E_i^tA \\ \vdots \\ E_m^tA \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} = \left[\begin{array}{c} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j+\alpha A_i \\ \vdots \\ A_m \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}$$

$\square$

Assim, aplicar uma seqüência de operações elementares em uma matriz, corresponde a multiplicar a matriz à esquerda por um produto de matrizes elementares.

Exemplo 1.16. Quando usamos o método de Gauss-Jordan para resolver o sistema do Exemplo 1.9 na página 28, aplicamos uma seqüência de operações elementares na matriz aumentada do sistema. Isto corresponde a multiplicar a matriz aumentada

$$[\,A\,|\,B\,] = \left[\begin{array}{ccc:c} 5 & 5 & 0 & 15 \\ 2 & 4 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 0 & 11 \end{array}\right]$$

à esquerda pelas matrizes elementares

$$E_1(1/5) = \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad E_{1,2}(-2) = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad E_{1,3}(-3) = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

$$E_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{2,3}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{2,1}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$E_{2,1}(-1)\; E_{2,3}(-2)\; E_{2,3}\; E_{1,3}(-3)\; E_{1,2}(-2)\; E_1(1/5)\; [\, A \,|\, B \,] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Exercícios Numéricos (respostas na página 314)

1.2.1. Quais das seguintes matrizes estão na forma escalonada reduzida:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.2.2. Em cada item suponha que a matriz aumentada de um sistema foi transformada usando operações elementares na matriz escalonada reduzida dada. Resolva o sistema correspondente.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1.2.3. Resolva, usando o método de Gauss-Jordan, os seguintes sistemas:

(a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 10 \end{array}\right.$;

(b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 8x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & -1 \end{array}\right.$;

(c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & = & -2 \\ 6x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \end{array}\right.$.

1.2.4. Os sistemas lineares seguintes possuem a mesma matriz A. Resolva-os usando o método de Gauss-Jordan. Observe que os dois sistemas podem ser resolvidos ao mesmo tempo escalonando a matriz aumentada $[\, A \,|\, B_1 \,|\, B_2 \,]$.

(a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & - & 7x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \end{array}\right.$;

(b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & - & 7x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \end{array}\right.$.

1.2.5. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$.

(a) Encontre a solução geral do sistema $(-4I_3 - A)X = \bar{0}$;

(b) Encontre a solução geral do sistema $(2I_3 - A)X = \bar{0}$.

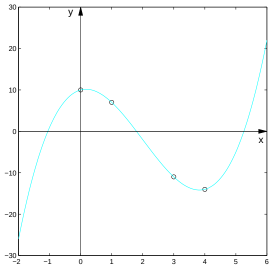
1.2.6. Para cada sistema linear dado, encontre todos os valores de a para os quais o sistema não tem solução, tem solução única e tem infinitas soluções:

(a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ 3x & - & y & + & 5z & = & 2 \\ 4x & + & y & + & (a^2-14)z & = & a+2 \end{array}\right.$;

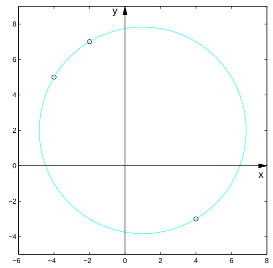
(b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & 5 \\ 2x & + & 3y & + & (a^2-1)z & = & a+1 \end{array}\right.$.

1.2.7. Uma indústria produz três produtos, A, B e C, utilizando dois tipos de insumo, X e Y. Para a manufatura de cada kg de A são utilizados 1 grama do insumo X e 2 gramas do insumo Y; para cada kg de B, 1 grama de insumo X e 1 grama de insumo Y e, para cada kg de C, 1 grama de X e 4 gramas de Y. O preço de venda do kg de cada um dos produtos A, B e C é R$ 2,00, R$ 3,00 e R$ 5,00, respectivamente. Com a venda de toda a produção de A, B e C manufaturada com 1 kg de X e 2 kg de Y, essa indústria arrecadou R$ 2500,00. Determine quantos kg de cada um dos produtos A, B e C foram vendidos.

1.2.8. Determine os coeficientes a, b, c e d da função polinomial $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, cujo gráfico passa pelos pontos $P_1 = (0, 10), P_2 = (1, 7), P_3 = (3, -11)$ e $P_4 = (4, -14)$.



1.2.9. Determine coeficientes a, b e c da equação do círculo, $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, que passa pelos pontos $P_1 = (-2, 7), P_2 = (-4, 5)$ e $P_3 = (4, -3)$.



1.2.10. Encontre condições sobre os b_i's para que cada um dos sistemas seja **consistente** (isto é, tenha solução):

(a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & b_1 \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 8x_3 & = & b_2 \\ -3x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & b_3 \end{array}\right.$;

(b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & b_1 \\ -4x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & b_2 \\ -4x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & b_3 \end{array}\right.$.

1.2.11. (Relativo à sub-seção 1.2.4) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{bmatrix}.$$

Encontre matrizes elementares E, F, G e H tais que $R = EFGHA$ é uma matriz escalonada reduzida. (Sugestão: veja o Exemplo 1.16 na página 43.)

Exercícios usando o MATLAB

Comandos do MATLAB:

`>> A=[A1,...,An]` cria uma matriz `A` formada pelas matrizes, definidas anteriormente, `A1, ..., An` colocadas uma ao lado da outra;

`>> expr=subs(expr,x,num)` substitui na expressão `expr` a variável `x` por `num`.

`>> clf` limpa a figura ativa.

Comandos do pacote GAAL:

`>> B=opel(alpha,i,A)` ou `>> oe(alpha,i,A)`faz a operação elementar `alpha×linha i ==> linha i` da matriz `A` e armazena a matriz resultante em `B`.

`>> B=opel(alpha,i,j,A)` ou `>> oe(alpha,i,j,A)` faz a operação elementar `alpha×linha i + linha j ==> linha j` da matriz `A` e armazena em `B`.

`>> B=opel(A,i,j)` ou `>> oe(A,i,j)` faz a troca da linha i com a linha j da matriz `A` e armazena a matriz resultante em `B`.

`>> B=escalona(A)` calcula passo a passo a forma escalonada reduzida da matriz `A` e armazena a matriz resultante na variável `B`.

`>> matvand(P,k)` obtem a matriz de Vandermonde de ordem `k`, se `P=[x1;...;xn]` e a matriz de Vandermonde generalizada no caso em que `P=[x1,y1;...;xn,yn]`.

`>> po([x1,y1;x2,y2;...xk,yk])` desenha os pontos `(x1,y1),...,(xk,yk)`.

`>> plotf1(f,[a,b])` desenha o gráfico da função dada pela expressão simbólica `f` no intervalo `[a,b]`.

`>> plotci(f,[a,b],[c,d])` desenha o gráfico da curva dada implicitamente pela expressão `f(x,y)=0` na região do plano `[a,b]x[c,d]`.

`>> eixos` desenha os eixos coordenados.

1.2.12. Resolva, usando o método de Gauss-Jordan, os seguintes sistemas:

(a) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & & & - & 3x_4 & + & x_5 & & & = & 2\\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & + & x_5 & + & 2x_6 & = & 3\\ x_1 & + & 2x_2 & & & - & 3x_4 & + & 2x_5 & + & x_6 & = & 4\\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & - & 9x_4 & + & 4x_5 & + & 3x_6 & = & 9 \end{array}\right.;$$

(b) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & & & + & 2x_5 & & & = & 0\\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 4x_5 & - & 3x_6 & = & -1\\ & & & & 5x_3 & + & 10x_4 & & & + & 15x_6 & = & 5\\ 2x_1 & + & 6x_2 & & & + & 8x_4 & + & 4x_5 & + & 18x_6 & = & 6 \end{array}\right.;$$

1.2.13. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -2 & a\\ 2 & 2\,a-2 & -a-2 & 3\,a-1\\ 3 & a+2 & -3 & 2\,a+1 \end{bmatrix}$. Determine o conjunto solução do sistema $AX = B$, onde $B = [\,4\ 3\ 1\ 6\,]^t$, para todos os valores de a.

1.2.14. Resolva os sistemas lineares cujas matrizes aumentadas são:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$;

1.2.15. (a) Use o comando `P=randi(4,2)`, para gerar 4 pontos com entradas inteiras e aleatórias entre -5 e 5. Os pontos estão armazenados nas linhas da matriz `P`.

(b) Use o MATLAB para *tentar* encontrar os coeficientes a, b, c e d da função polinomial $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cujo gráfico passa pelos pontos dados pelas linhas da matriz `P`. A matriz `A=matvand(P(:,1),3)` pode ser útil na solução deste problema, assim como a matriz `B=P(:,2)`. Se não conseguiu, repita o passo anterior. Por que pode não ser possível?

(c) Desenhe os pontos e o gráfico do polinômio com os comandos `clf,po(P) syms x, plotf1(a*x^3+b*x^2+c*x+d,[-5,5])`, onde `a,b,c` e `d` são os coeficientes encontrados no item anterior.

(d) Desenhe os eixos coordenados com o comando `eixos`.

1.2.16. (a) Use o comando `P=randi(5,2)`, para gerar 5 pontos com entradas inteiras e aleatórias entre -5 e 5. Os pontos estão armazenados nas linhas da matriz `P`.

(b) Use o MATLAB para *tentar* encontrar os coeficientes a, b, c, d, e e f da cônica, curva de equação $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, cujo gráfico passa pelos pontos cujas coordenadas são dadas pelas linhas da matriz `P`. A matriz `A=matvand(P,2)` pode ser útil na solução deste problema. Se não conseguiu, repita o passo anterior. Por que pode não ser possível?

(c) Desenhe os pontos e a cônica com os comandos
`clf,po(P), syms x y, plotci(a*x^2+b*x*y+c*y^2+d*x+e*y+f,[-5,5],[-5,5])`, onde `a,b,c,d,e` e `f` são os coeficientes encontrados no item anterior.

(d) Desenhe os eixos coordenados com o comando `eixos`.

1.2.17. Use o MATLAB e resolva os **Exercícios Numéricos a partir do Exercício 1.2.3.**

Exercícios Teóricos

1.2.18. Suponha que $[C \mid D]$ é obtida de $[A \mid B]$ aplicando-se uma operação elementar sobre suas linhas. Mostre que X é solução do sistema linear $A\,X = B$ se, e somente se, X também é solução de $C\,X = D$,

1.2.19. Mostre que toda operação elementar possui inversa, do mesmo tipo, ou seja, para cada operação elementar existe uma outra operação elementar do mesmo tipo que desfaz o que a operação anterior fez.

1.2.20. Prove que: (a)Toda matriz é equivalente por linhas a ela mesma; (b)Se A é equivalente por linhas a B, então B é equivalente por linhas a A; (c)Se A é equivalente por linhas a B e B é equivalente por linhas a C, então A é equivalente por linhas a C.

1.2.21. Sejam X_1 e X_2 soluções do sistema homogêneo $A\,X = \bar{0}$. Mostre que $\alpha X_1 + \beta X_2$ é solução, para quaisquer escalares α e β. Mostre que a afirmação anterior não é verdadeira para sistemas lineares em geral. (Sugestão: Ver o Exemplo 1.14.)

1.2.22. Sejam A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $m \times 1$.

(a) Mostre que se X_1 é uma solução do sistema $AX = B$ e Y_1 é uma solução do sistema homogêneo associado $AX = \bar{0}$, então $X_1 + Y_1$ é solução de $AX = B$.

(b) Seja X_0 solução particular do sistema $AX = B$. Mostre que toda solução X do sistema $AX = B$, pode ser escrita como $X = X_0 + Y$, onde Y é uma solução do sistema homogêneo associado, $AX = \bar{0}$. Assim, a solução geral do sistema $AX = B$ é a soma de uma solução particular de $AX = B$ com a solução geral do sistema homogêneo associado $AX = \bar{0}$. (Sugestão: Escreva $X = X_0 + (X - X_0)$ e mostre que $X - X_0$ é solução do sistema homogêneo $AX = \bar{0}$.)

Teste do Capítulo

---

1. Para o sistema linear dado, encontre todos os valores de a para os quais o sistema não tem solução, tem solução única e tem infinitas soluções:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & + & y & + & (a^2-5)z & = & a \end{array}\right.$$

---

2. Se possível, encontre os valores de x, y e z tais que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -40 & 16 & x \\ 13 & -5 & y \\ 5 & -2 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

---

3. Sejam

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Sabendo-se que $A = P^t D P$, calcule D^2, PP^t e A^2.

---

4. Responda **Verdadeiro** ou **Falso**, justificando:

(a) Se $A^2 = -2A^4$, então $(I_n + A^2)(I_n - 2A^2) = I_n$;

(b) Se $A = P^t D P$, onde D é uma matriz diagonal, então $A^t = A$;

(c) Se D é uma matriz diagonal, então $DA = AD$, para toda matriz A, $n \times n$;

(d) Se $B = AA^t$, então $B = B^t$.

(e) Se B e A são tais que $A = A^t$ e $B = B^t$, então $C = AB$, é tal que $C^t = C$.

Capítulo 2

Inversão de Matrizes e Determinantes

2.1 Matriz Inversa

Todo número real a, não nulo, possui um inverso (multiplicativo), ou seja, existe um número b, tal que $a\,b = b\,a = 1$. Este número é único e o denotamos por a^{-1}. Apesar da álgebra matricial ser semelhante à álgebra dos números reais, nem todas as matrizes A ***não nulas*** possuem inversa, ou seja, nem sempre existe uma matriz B tal que $A\,B = B\,A = I_n$. De início, para que os produtos AB e BA estejam definidos e sejam iguais é preciso que as matrizes A e B sejam quadradas. Portanto, somente as matrizes quadradas podem ter inversa, o que já diferencia do caso dos números reais, onde todo número não nulo tem inverso. Mesmo entre as matrizes quadradas, muitas não possuem inversa.

Definição 2.1. Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n\times n}$ é **invertível** ou **não singular**, se existe uma matriz $B = (b_{ij})_{n\times n}$ tal que

$$A\,B = B\,A = I_n\,, \tag{2.1}$$

onde I_n é a matriz identidade. A matriz B é chamada de **inversa** de A. Se A não tem inversa, dizemos que A é **singular** ou **não invertível**.

Exemplo 2.1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

A matriz B é a inversa da matriz A, pois $A\,B = B\,A = I_2$.

Teorema 2.1. *Se uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ possui inversa, então a inversa é única.*

Demonstração. Suponhamos que B e C sejam inversas de A. Então, $AB = BA = I_n = AC = CA$ e assim,

$$B = B\,I_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C\,.$$

$\square$

Denotamos a inversa de A, quando ela existe, por A^{-1}. Devemos chamar atenção para o fato de que o índice superior -1, aqui, não significa uma potência, tão pouco uma divisão. Assim como no caso da transposta, em que A^t significa a transposta de A, aqui, A^{-1} significa a inversa de A.

2.1.1 Propriedades da Inversa

Teorema 2.2. *(a) Se A é invertível, então A^{-1} também o é e*

$$(A^{-1})^{-1} = A\,;$$

(b) Se $A = (a_{ij})_{n\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times n}$ são matrizes invertíveis, então AB é invertível e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}\,;$$

(c) Se $A = (a_{ij})_{n\times n}$ é invertível, então A^t também é invertível e

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t\,.$$

Demonstração. Se queremos mostrar que uma matriz é a inversa de uma outra, temos que mostrar que os produtos das duas matrizes são iguais à matriz identidade.

(a) Uma matriz B é a inversa de A^{-1} se

$$A^{-1}B = BA^{-1} = I_n\,.$$

Mas, como A^{-1} é a inversa de A, então

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n\,.$$

Como a inversa é única, então $B = A$ é a inversa de A^{-1}, ou seja, $(A^{-1})^{-1} = A$.

(b) Temos que mostrar que a inversa de AB é $B^{-1}A^{-1}$, ou seja, mostrar que os produtos $(AB)(B^{-1}A^{-1})$ e $(B^{-1}A^{-1})AB$ são iguais à matriz identidade. Mas,

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} &= I_n,\\ (B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B &= I_n.\end{aligned}$$

(c) Queremos mostrar que a inversa de A^t é $(A^{-1})^t$. Assim,

$$\begin{aligned}A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I_n^t &= I_n,\\ (A^{-1})^tA^t = (AA^{-1})^t = I_n^t &= I_n.\end{aligned}$$

□

O teorema seguinte, cuja demonstração será omitida no momento (Subseção 2.1.2), garante que basta verificarmos uma das duas igualdades em (2.1) para sabermos se uma matriz é a inversa de outra.

Teorema 2.3. *Sejam A e B matrizes $n \times n$.*

(a) Se $BA = I_n$, então $AB = I_n$;

(b) Se $AB = I_n$, então $BA = I_n$;

Assim, para verificar que uma matriz A é invertível, quando temos uma matriz B que é candidata a inversa de A, basta fazer um dos produtos AB ou BA e verificar se um deles é igual a I_n. O próximo exemplo ilustra este fato.

Exemplo 2.2. Seja $A = (a_{ij})_{n\times n}$ uma matriz tal que $A^3 = \bar{0}$ (A pode não ser a matriz nula!). Vamos mostrar que a inversa de $I_n - A$ é $I_n + A + A^2$. Para provar isto, devemos multiplicar a matriz $I_n - A$, pela matriz que possivelmente seja a inversa dela, aqui $I + A + A^2$, e verificar se o produto das duas é igual a matriz identidade I_n.

$$(I_n - A)(I_n + A + A^2) = I_n(I_n + A + A^2) - A(I_n + A + A^2) = I_n + A + A^2 - A - A^2 - A^3 = I_n.$$

Aqui foram usadas as propriedades (i) e (o) do Teorema 1.1 na página 7.

2.1.2 Matrizes Elementares e Inversão (opcional)

As matrizes elementares têm um papel importante no estudo da inversão de matrizes e da solução de sistemas lineares.

Proposição 2.4. *Toda matriz elementar é invertível e sua inversa é também uma matriz elementar. Usando a notação introduzida na página 40, temos:*

(a) $E_{i,j}^{-1} = E_{j,i} = E_{i,j}$;

(b) $E_i(\alpha)^{-1} = E_i(1/\alpha)$, *para* $\alpha \neq 0$;

(c) $E_{i,j}(\alpha)^{-1} = E_{i,j}(-\alpha)$.

Demonstração. Seja E uma matriz elementar. Esta matriz é obtida de I_n aplicando-se uma operação elementar. Seja F a matriz elementar correspondente a operação que transforma E de volta em I_n. Agora, pelo Teorema 1.7 na página 41, temos que $F\,E = E\,F = I_n$. Portanto, F é a inversa de E. $\square$

Teorema 2.5. *Sejam A e B matrizes $n \times n$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $BA = I_n$.

(b) A matriz A é equivalente por linhas à matriz identidade, I_n.

(c) A matriz A é invertível e B é a sua inversa.

Demonstração. **(a)⇒(b)** Se $BA = I_n$, então o sistema $A\,X = \bar{0}$ tem somente a solução trivial, pois $X = I_nX = BAX = B\,\bar{0} = \bar{0}$. Isto implica que a matriz A é equivalente por linhas à matriz identidade I_n, pois caso contrário a forma escalonada reduzida de A teria uma linha nula (Proposição 1.5 na página 37).

(b)⇒(c) A matriz A ser equivalente por linhas à I_n significa, pelo Teorema 1.7 na página 41, que existem matrizes elementares $E_1, \ldots, E_k$, tais que

$$\begin{aligned} E_k \ldots E_1 A &= I_n && (2.2) \\ (E_1^{-1} \ldots E_k^{-1}) E_k \ldots E_1 A &= E_1^{-1} \ldots E_k^{-1} \\ A &= E_1^{-1} \ldots E_k^{-1}. && (2.3) \end{aligned}$$

Aqui, usamos o fato de que as matrizes elementares são invertíveis (Proposição 2.4). Portanto, A é invertível como o produto de matrizes invertíveis.

(c)⇒(a) Claramente.

□

Se A é invertível, então multiplicando-se ambos os membros de (2.2) à direita por A^{-1} obtemos

$$E_k \dots E_1 I_n = A^{-1}.$$

Assim, a mesma seqüência de operações elementares que transforma a matriz A na matriz identidade I_n transforma também I_n em A^{-1}.

A demonstração do Teorema 2.3 na página 58, agora, é uma simples conseqüência do Teorema anterior.

Demonstração do Teorema 2.3. Vamos mostrar que se vale uma das relações $BA = I_n$ ou $AB = I_n$, então A é invertível e $B = A^{-1}$.

(a) Se $BA = I_n$, então pelo Teorema 2.5, A é invertível e $B = BI_n = BAA^{-1} = I_nA^{-1} = A^{-1}$.

(b) Se $AB = I_n$, então pelo item anterior B é invertível e $B^{-1} = A$. Portanto A é invertível, pois $A = I_n(B^{-1})$ e $A^{-1} = (B^{-1})^{-1} = B$ (Teorema 2.2 (b) e (a) na página 57). $\square$

Segue da demonstração, do Teorema 2.5 (equação (2.3)) o resultado seguinte.

Teorema 2.6. *Uma matriz A é invertível se, e somente se, ela é o produto de matrizes elementares.*

Exemplo 2.3. Vamos escrever a matriz A do Exemplo 2.5 na página 65 como o produto de matrizes elementares. Quando encontramos a inversa da matriz A, aplicamos uma seqüência de operações elementares em $[\,A\,|\,I_3\,]$ até que encontramos a matriz $[\,I_3\,|\,A^{-1}\,]$. Como as operações são por linha, esta mesma seqüência de operações elementares transforma A em I_n. Isto corresponde a multiplicar a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **à esquerda** pelas matrizes elementares

$$E_{1,2}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{2,1}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_{2,3}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{3,1}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{3,2}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$E_{3,2}(-1)\; E_{3,1}(-1)\; E_{2,3}(-1)\; E_{2,1}(-2)\; E_2(-1)\; E_{1,2}(-1)\; A = I_3.$$

Multiplicando à esquerda pelas inversas das matrizes elementares correspondentes obtemos

$$A = E_{3,2}(1)\; E_{3,1}(1)\; E_{2,3}(1)\; E_{2,1}(2)\; E_2(-1)\; E_{1,2}(1).$$

2.1.3 Método para Inversão de Matrizes

A demonstração do próximo teorema fornece uma maneira de encontrar a inversa de uma matriz, se ela existir. O exemplo seguinte faz o mesmo no caso particular em que a matriz é 2×2.

Exemplo 2.4. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Devemos procurar uma matriz $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ tal que $AB = I_2$, ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} ax & + & bz & & & & & = & 1 \\ cx & + & dz & & & & & = & 0 \\ & & & & ay & + & bw & = & 0 \\ & & & & cy & + & dw & = & 1 \end{array} \right.$$

Este sistema pode ser desacoplado em dois sistemas independentes que possuem a mesma matriz, que é a matriz A. Podemos resolvê-los simultaneamente. Para isto, basta escalonarmos a matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc:c:c} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] = [\,A \,|\, I_2\,].$$

Os dois sistemas têm solução única se, e somente se, a forma escalonada reduzida da matriz $[\,A\,|\,I_2\,]$ for da forma $[\,I_2\,|\,S\,] = \left[\begin{array}{cc:c:c} 1 & 0 & s & t \\ 0 & 1 & u & v \end{array}\right]$ (verifique, observando o que acontece se a forma escalonada reduzida da matriz A não for igual a I_2). Neste caso, $x = s, z = u$ e $y = t, w = v$, ou seja, a matriz A possuirá inversa, $A^{-1} = B = S = \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix}$.

Teorema 2.7. *Uma matriz A, $n \times n$, é invertível se, e somente se, A é equivalente por linhas à matriz identidade I_n.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.3, para verificarmos se uma matriz A, $n \times n$, é invertível, basta verificarmos se existe uma matriz B, tal que

$$A\,B = I_n\,.$$

Vamos denotar as colunas de B por $X_1, X_2, \ldots, X_n$, ou seja, $B = [\,X_1 \ \ldots \ X_n\,]$, onde

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}, \ X_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix}, \ \ldots, \ X_n = \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix}.$$

Vamos denotar as colunas da matriz identidade I_n, por $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Desta forma,

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \; \ldots, \; E_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A j-ésima coluna do produto AB é igual a AX_j (Exercício 1.1.14 na página 18). Assim, analisando coluna a coluna a igualdade matricial

$$A\,B = I_n$$

vemos que encontrar B é equivalente a resolver n sistemas lineares

$$A\,X_j = E_j \quad \text{para } j = 1 \ldots, n.$$

Cada um dos sistemas pode ser resolvido usando o método de Gauss-Jordan. Para isso, formaríamos as matrizes aumentadas $[A \mid E_1]$, $[A \mid E_2], \ldots, [A \mid E_n]$. Entretanto, como as matrizes dos sistemas são todas iguais à A, podemos resolver todos os sistemas simultaneamente formando a matriz $n \times 2n$

$$[\,A \mid E_1\,E_2 \ldots E_n\,] = [\,A \mid I_n\,].$$

Transformando $[\,A \mid I_n\,]$ na sua forma escalonada reduzida, que vamos denotar por $[\,R \mid S\,]$, vamos chegar a duas situações possíveis: ou a matriz R é a matriz identidade, ou não é.

- Se $R = I_n$, então a forma escalonada reduzida da matriz $[\,A \mid I_n\,]$ é da forma $[\,I_n \mid S\,]$. Se escrevemos a matriz S em termos das suas colunas $S = [\,S_1\,S_2 \ldots S_n\,]$, então as soluções dos sistemas $A\,X_j = E_j$ são $X_j = S_j$ e assim $B = S$ é tal que $A\,B = I_n$ e pelo Teorema 2.3 A é invertível.

- Se $R \neq I_n$, então a matriz A não é equivalente por linhas à matriz identidade I_n. Então, pela Proposição 1.5 na página 37 a matriz R tem uma linha nula. O que implica que os sistemas $A\,X_j = E_j$ não tenham solução única. Isto implica que a matriz A não tem inversa, pois as colunas da (única) inversa seriam X_j, para $j = 1, \ldots n$. □

Observação. Da demonstração do Teorema 2.7 obtemos não somente uma forma de descobrir se uma matriz A tem inversa mas também, como encontrar a inversa, no caso em que ela exista. Ou seja, escalonamos a matriz $[A \mid I_n]$ e encontramos a sua forma escalonada reduzida $[R \mid S]$. Se $R = I_n$, então a matriz A é invertível e a inversa $A^{-1} = S$. Caso contrário, a matriz A não é invertível. Vejamos os exemplos seguintes.

Exemplo 2.5. Vamos encontrar, se existir, a inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para isso devemos escalonar a matriz aumentada

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

1ª eliminação:
O pivô da 1ª linha é igual a 1. Logo, precisamos apenas "zerar" os outros elementos da coluna do pivô. Para isto, somamos à 2ª linha, -1 vezes a 1ª linha.

$\boxed{-1\times 1^{\underline{a}} \text{ linha} + 2^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 2^{\underline{a}} \text{ linha}}$
$$\left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2ª eliminação:
Olhamos para a submatriz obtida eliminando-se a 1ª linha da matriz. Escolhemos como pivô um elemento não nulo da 1ª coluna não nula da submatriz. Escolhemos o elemento de posição 2,2. Como temos que "fazê-lo" igual a 1, multiplicamos a 2ª linha por -1.

$\boxed{-1 \times 2^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 2^{\underline{a}} \text{ linha}}$
$$\left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
Precisamos "zerar" os outros elementos da coluna do pivô. Para isto, somamos à 1ª linha, -2 vezes a 2ª e à 3ª linha, somamos -1 vezes a 2ª.

$\boxed{\begin{array}{l} -2\times 2^{\underline{a}} \text{ linha} + 1^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 1^{\underline{a}} \text{ linha} \\ -1\times 2^{\underline{a}} \text{ linha} + 3^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 3^{\underline{a}} \text{ linha} \end{array}}$
$$\left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

3ª eliminação:
Olhamos para a submatriz obtida eliminando-se as duas primeiras linhas. Escolhemos para pivô um elemento não nulo da primeira coluna não nula da submatriz. Este elemento é o elemento de posição 3,3. Como ele é igual a 1, precisamos apenas "zerar" os outros elementos da coluna do pivô. Para isto, somamos à 1ª linha, -1 vezes a 3ª linha e somamos à 2ª linha, -1 vezes a 3ª.

$\boxed{\begin{array}{l} -1\times 3^{\underline{a}} \text{ linha} + 1^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 1^{\underline{a}} \text{ linha} \\ -1\times 3^{\underline{a}} \text{ linha} + 2^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 2^{\underline{a}} \text{ linha} \end{array}}$
$$\left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Assim, a matriz $[A \mid I_3]$ é equivalente por linhas à matriz acima, que é da forma $[I_3 \mid S]$, portanto a matriz A é invertível e a sua inversa é a matriz S, ou seja,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.6. Vamos determinar, se existir, a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para isso devemos escalonar a matriz aumentada

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

1ª eliminação:
O pivô da 1ª linha é igual a 1. Logo, precisamos apenas "zerar" os outros elementos da coluna do pivô. Para isto, somamos à 2ª linha, -1 vezes a 1ª linha.

$$\boxed{-1 \times 1^{\underline{a}} \text{ linha} + 2^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 2^{\underline{a}} \text{ linha}} \qquad \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2ª eliminação:
Olhamos para a submatriz obtida eliminando-se a 1ª linha da matriz. Escolhemos como pivô um elemento não nulo da 1ª coluna não nula da submatriz. Escolhemos o elemento de posição 2,2. Como temos que "fazê-lo" igual a 1, multiplicamos a 2ª linha por -1.

$$\boxed{-1\times 2^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 2^{\underline{a}} \text{ linha}} \qquad \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Precisamos "zerar" os outros elementos da coluna do pivô. Para isto, somamos à 1ª linha, -2 vezes a 2ª e à 3ª linha, somamos -1 vezes a 2ª.

$$\boxed{\begin{array}{l} -2\times 2^{\underline{a}} \text{ linha} + 1^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 1^{\underline{a}} \text{ linha} \\ -1\times 2^{\underline{a}} \text{ linha} + 3^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 3^{\underline{a}} \text{ linha} \end{array}} \qquad \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Assim, a matriz $[A \mid I_3]$ é equivalente por linhas à matriz acima, que é da forma $[R \mid S]$, com $R \neq I_3$. Assim, a matriz A não é equivalente por linhas à matriz identidade e portanto **não** é invertível.

Se um sistema linear $A\,X = B$ tem o **número de equações igual ao número de incógnitas**, então o conhecimento da inversa da matriz do sistema A^{-1}, reduz o problema de resolver o sistema a simplesmente fazer um produto de matrizes, como está enunciado no próximo teorema.

Teorema 2.8. *Seja A uma matriz $n \times n$.*

(a) O sistema associado $AX = B$ tem solução única se, e somente se, A é invertível. Neste caso a solução é $X = A^{-1}B$;

(b) O sistema homogêneo $A\,X = \bar{0}$ tem solução não trivial se, e somente se, A é singular.

Demonstração. (a) Se a matriz A é invertível, então multiplicando $A\,X = B$ por A^{-1} à esquerda em ambos os membros obtemos

$$\begin{array}{rcl} A^{-1}(A\,X) &=& A^{-1}B \\ (A^{-1}A)X &=& A^{-1}B \\ I_nX &=& A^{-1}B \\ X &=& A^{-1}B. \end{array}$$

Aqui foram usadas as proprideades (h) e (o) do Teorema 1.1 na página 7. Portanto, $X = A^{-1}B$ é a única solução do sistema $A\,X = B$. Por outro lado, se o sistema $A\,X = B$ possui solução única, então a forma escalonada reduzida da matriz aumentada do sistema $[A \mid B]$ é da forma $[R \mid C]$, onde $R = I_n$. Pois a matriz A é quadrada e caso R fosse diferente da identidade possuiria uma linha de zeros (Proposição 1.5 na página 37) o que levaria a que o sistema $A\,X = B$ ou não tivesse solução ou tivesse infinitas soluções. Logo, a matriz A é equivalente por linhas à matriz identidade o que pelo Teorema 2.7 na página 63 implica que A é invertível.

(b) Todo sistema homogêneo possui pelo menos a solução trivial. Pelo item anterior, esta será a única solução se, e somente se, A é invertível. $\square$

Exemplo 2.7. Suponha que temos um processo em que para uma matriz de saída B, a matriz de entrada X é obtida pela solução do sistema $A\,X = B$.

Se a matriz A é a do Exemplo 2.5 e as matrizes de saída são $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$, então as matrizes de entrada serão

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$Y = A^{-1}C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 11 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.8 (Interpolação Polinomial). Sejam $P_1 = (x_1, y_1), \ldots, P_n = (x_n, y_n)$, com $x_1, \ldots, x_n$ números distintos. Considere o problema de encontrar um polinômio de grau $n-1$

$$p(x) = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n,$$

que *interpola* os dados, no sentido de que $p(x_i) = y_i$, para $i = 1, \ldots, n$. O Exercício 1.2.8 na página 46 é um caso particular deste problema em que os pontos são $P_1 = (0, 10), P_2 = (1, 7), P_3 = (3, -11), P_4 = (4, -14)$ e o polinômio é de grau 3.

Vamos mostrar que existe, um e somente um, polinômio de grau no máximo igual a $n-1$, que interpola n pontos, com abscissas distintas. Substituindo os pontos no polinômio $p(x)$, obtemos um sistema linear $AX = B$, onde

$$X = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \ldots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \ldots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \ldots & x_n & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é chamada **matriz de Vandermonde**. Pelo Teorema 2.8 na página 68, um sistema de n equações e n incógnitas $AX = B$ tem solução única se, e somente se, o sistema homogêneo associado, $AX = \bar{0}$, tem somente a solução trivial. Vamos mostrar que $AX = \bar{0}$ tem somente a solução trivial. X é solução do sistema homogêneo se, e somente se, o polinômio de grau $n-1$ se anula em n pontos distintos. O que implica que o polinômio $p(x)$ é o polinômio com todos os seus coeficientes iguais a zero. Portanto, o sistema homogêneo $A\,X = \bar{0}$ tem somente a solução trivial. Isto prova que existe, um e somente um, polinômio de grau no máximo igual a $n-1$, que interpola n pontos, com abscissas distintas.

Vamos mostrar a recíproca do item (b) do Teorema 2.2 na página 57.

Proposição 2.9. *Se A e B são matrizes $n \times n$, com AB invertível, então A e B são invertíveis.*

Demonstração. Considere o sistema $(AB)X = \bar{0}$. Se B **não** fosse invertível, então existiria $X \neq \bar{0}$, tal que $B\,X = \bar{0}$ (Teorema 2.8 na página 68). Multiplicando-se por A, teríamos $AB\,X = \bar{0}$, o que, novamente pelo Teorema 2.8 na página 68, contradiz o fato de AB ser invertível. Portanto, B é invertível. Agora, se B e AB são invertíveis, então A também é invertível, pois $A = (AB)B^{-1}$, que é o produto de duas matrizes invertíveis. $\square$

Exercícios Numéricos (respostas página 322)

2.1.1. Seja A uma matriz 3×3. Suponha que $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ é solução do sistema homogêneo $A\,X = \bar{0}$. A matriz A é singular ou não? Justifique.

2.1.2. Se possível, encontre as inversas das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$;

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$;

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 1 & 6 \end{bmatrix}$;

2.1.3. Encontre todos os valores de a para os quais a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix}$ tem inversa.

2.1.4. Se

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix},$$

encontre $(A\,B)^{-1}$.

2.1.5. Resolva o sistema $A\,X = B$, se $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

2.1.6. (Relativo à Subseção 2.1.2) Encontre matrizes elementares $E_1, \ldots, E_k$ tais que $A = E_1 \ldots E_k$, para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercícios usando o MATLAB

`>> M=[A,B]` atribui à matriz `M` a matriz obtida colocando lado a lado as matrizes `A` e `B`.

`>> A=[A1,...,An]` cria uma matriz `A` formada pelas matrizes, definidas anteriormente, `A1, ..., An` colocadas uma ao lado da outra;

`>> M=A(:,k:l)` atribui à matriz `M` a submatriz da matriz `A` obtida da coluna `l` à coluna `k` da matriz `A`.

Comandos do pacote GAAL:

`>> B=opel(alpha,i,A)` ou `B=oe(alpha,i,A)`faz a operação elementar `alpha*linha i ==> linha i` da matriz `A` e armazena a matriz resultante em `B`.

`>> B=opel(alpha,i,j,A)` ou `B=oe(alpha,i,j,A)` faz a operação elementar `alpha*linha i + linha j ==> linha j` da matriz `A` e armazena a matriz resultante na variável `B`.

`>> B=opel(A,i,j)` ou `B=oe(A,i,j)` faz a troca da linha i com a linha j da matriz `A` e armazena a matriz resultante na variável `B`.

`>> B=escalona(A)` calcula passo a passo a forma escalonada reduzida da matriz `A` e armazena a matriz resultante na variável `B`.

2.1.7. Resolva os **Exercícios Numéricos a partir do Exercício 1.2** usando o MATLAB.

Exercícios Teóricos

2.1.8. Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é invertível se, e somente se, $ad - bc \neq 0$ e neste caso a inversa é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

(Sugestão: encontre a forma escalonada reduzida da matriz $[\,A\,|\,I_2\,]$.)

Sugestão para os próximos 4 exercícios: Para verificar que uma matriz A é invertível, quando temos uma matriz B que é candidata a inversa de A, basta fazer um dos produtos AB ou BA e verificar se um deles é igual a I_n.

2.1.9. Se A é uma matriz $n \times n$ e $A^k = \bar{0}$, para k um inteiro positivo, mostre que

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}\,.$$

2.1.10. Seja A uma **matriz diagonal**, isto é, os elementos que estão fora da diagonal são iguais a zero ($a_{ij} = 0$, para $i \neq j$). Se $a_{ii} \neq 0$, para $i = 1, \ldots, n$, mostre que A é invertível e a sua inversa é também uma matriz diagonal com elementos na diagonal dados por $1/a_{11}, 1/a_{22}, \ldots, 1/a_{nn}$.

2.1.11. Sejam A e B matrizes quadradas. Mostre que se $A + B$ e A forem invertíveis, então

$$(A + B)^{-1} = A^{-1}(I_n + BA^{-1})^{-1}.$$

2.1.12. Seja J_n a matriz $n \times n$, cujas entradas são iguais a 1. Mostre que se $n > 1$, então

$$(I_n - J_n)^{-1} = I_n - \frac{1}{n-1} J_n.$$

(Sugestão: Observe que $J_n^2 = nJ_n$.)

2.1.13. Mostre que se B é uma matriz invertível, então $AB^{-1} = B^{-1}A$ se, e somente se, $AB = BA$. (Sugestão: multiplique a equação $AB = BA$ por B^{-1}.)

2.1.14. Mostre que se A é uma matriz invertível, então $A + B$ e $I_n + BA^{-1}$ são ambas invertíveis ou ambas não invertíveis. (Sugestão: multiplique $A + B$ por A^{-1}.)

2.1.15. Mostre que se A não é invertível, então AB também não o é.

2.1.16. Mostre que se A e B são matrizes $n \times n$, invertíveis, então A e B são equivalentes por linhas.

2.1.17. Sejam A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $n \times m$, com $n < m$. Mostre que AB não é invertível. (Sugestão: Mostre que o sistema $(AB)X = \bar{0}$ tem solução não trivial.)

2.2 Determinantes

Vamos inicialmente definir o determinante de matrizes 1×1. Para cada matriz $A = [a]$ definimos o **determinante** de A, indicado por $\det(A)$, por $\det(A) = a$. Vamos, agora, definir o determinante de matrizes 2×2 e a partir daí definir para matrizes de ordem maior. A cada matriz A, 2×2, associamos um número real, denominado **determinante** de A, por:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Para definir o determinante de matrizes quadradas maiores, precisamos definir o que são os menores de uma matriz. Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$, o **menor** do elemento a_{ij}, denotado por $\tilde{A}_{ij}$, é a submatriz $(n-1) \times (n-1)$ de A obtida eliminando-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A, que tem o seguinte aspecto:

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & & j & & \phantom{a_{1n}} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & a_{ij} & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Exemplo 2.9. Para uma matriz $A = (a_{ij})_{3\times 3}$,

$$\tilde{A}_{23} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Agora, vamos definir os cofatores de uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{3\times 3}$. O **cofator** do elemento a_{ij}, denotado por A_{ij}, é definido por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(\tilde{A}_{ij}),$$

ou seja, o cofator A_{ij}, do elemento a_{ij} é igual a mais ou menos o determinante do menor $\tilde{A}_{ij}$, sendo o mais e o menos determinados pela seguinte disposição:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.10. Para uma matriz $A = (a_{ij})_{3\times 3}$,

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\det(\tilde{A}_{23}) = -\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32}$$

Vamos, agora, definir o determinante de uma matriz 3×3. Se

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \\ a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \end{bmatrix},$$

então, o determinante de A é igual à soma dos produtos dos elementos da 1ª linha pelos seus cofatores.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\
&= a_{11}\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}.
\end{aligned}$$

Da mesma forma que a partir do determinante de matrizes 2×2, definimos o determinante de matrizes 3×3, podemos definir o determinante de matrizes quadradas de ordem maior. Supondo que sabemos como calcular o determinante de matrizes $(n-1) \times (n-1)$ vamos definir o determinante de matrizes $n \times n$.

Vamos definir, agora, os cofatores de uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n\times n}$. O **cofator** do elemento a_{ij}, denotado por A_{ij}, é definido por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(\tilde{A}_{ij}),$$

ou seja, o cofator A_{ij}, do elemento a_{ij} é igual a mais ou menos o determinante do menor $\tilde{A}_{ij}$, sendo o mais e o menos determinados pela seguinte disposição:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \ldots \\ - & + & - & + & \ldots \\ + & - & + & - & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Definição 2.2. Seja $A = (a_{ij})_{n\times n}$. O **determinante** de A, denotado por $\det(A)$, é definido por

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}, \qquad (2.4)$$

onde $A_{1j} = (-1)^{1+j}\det(\tilde{A}_{1j})$ é o cofator do elemento a_{1j}. A expressão (2.4) é chamada **desenvolvimento em cofatores do determinante de** A em termos da 1ª linha.

Exemplo 2.11. Seja

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & -3 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix}.$$

Desenvolvendo-se o determinante de A em cofatores, obtemos

$$\det(A) = 0A_{11} + 0A_{12} + 0A_{13} + (-3)(-1)^{1+4}\det(B), \quad \text{onde} \quad B = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{matrix} \end{bmatrix}.$$

Mas o $\det(B)$ também pode ser calculado usando cofatores,

$$\begin{aligned} \det(B) &= 1B_{11} + 2B_{12} + 3B_{13} \\ &= 1(-1)^{1+1}\det(\tilde{B}_{11}) + 2(-1)^{1+2}\det(\tilde{B}_{12}) + 3(-1)^{1+3}\det(\tilde{B}_{13}) \\ &= \det\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - 2\det\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + 3\det\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= -8 - 2\,(-2) + 3\,(-7) \\ &= -25 \end{aligned}$$

Portanto, $\det(A) = 3\det(B) = -75$.

Exemplo 2.12. Usando a definição de determinante, vamos mostrar que o determinante de uma matriz **triangular inferior** (isto é, os elementos situados acima da diagonal principal são iguais a zero) é o produto dos elementos da diagonal principal. Vamos mostrar inicialmente para matrizes 3×3. Seja

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11} \quad 0 \quad 0} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad 0 \\ a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \end{bmatrix}$$

Desenvolvendo-se o determinante de A em cofatores, obtemos

$$\det(A) = a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & 0 \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

Vamos supor termos provado que para qualquer matriz $(n-1) \times (n-1)$ triangular inferior, o determinante é o produto dos elementos da diagonal principal. Então vamos provar que isto também vale para matrizes $n \times n$. Seja

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11} \quad 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad 0} \\ \begin{matrix} a_{21} & a_{22} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ a_{n1} & & \ldots & & a_{nn} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Desenvolvendo-se o determinante de A em cofatores, obtemos

$$\det(A) = a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ a_{n2} & & \ldots & & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn},$$

pois o determinante acima é de uma matriz $(n-1)\times(n-1)$ triangular inferior. Em particular, o determinante da matriz identidade I_n é igual a 1 $(\det(I_n)=1)$.

Teorema 2.10. *Seja $A=(a_{ij})_{n\times n}$ escrita em termos das suas linhas, denotadas por A_i, ou seja, $A_i=[\,a_{i1}\,a_{i2}\ldots a_{in}\,]$. Se para algum k, a linha $A_k=\alpha X+\beta Y$, onde $X=[\,x_1\ldots x_n\,]$, $Y=[\,y_1\ldots y_n\,]$ e α e β são escalares, então:*

$$\det\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ \alpha X+\beta Y \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \alpha\det\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ X \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \beta\det\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ Y \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}.$$

Aqui, $A_k=\alpha X+\beta Y=[\,\alpha x_1+\beta y_1\ \ldots\ \alpha x_n+\beta y_n\,]$.

Demonstração. É fácil ver que para matrizes 2×2 o resultado é verdadeiro (verifique!). Supondo que o resultado seja verdadeiro para matrizes $(n-1)\times(n-1)$, vamos provar para matrizes $n\times n$.

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ \alpha X + \beta Y \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ X \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ Y \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}.$$

Deixamos como exercício o caso em que $k = 1$. Suponha que $k = 2, \ldots, n$. As matrizes $\tilde{A}_{1j}$, $\tilde{B}_{1j}$ e $\tilde{C}_{1j}$ só diferem na $(k-1)$-ésima linha (lembre-se que a primeira linha é retirada!). Além disso, a $(k-1)$-ésima linha de $\tilde{A}_{1j}$ é igual a α vezes a linha correspondente de $\tilde{B}_{1j}$ mais β vezes a linha correspondente de $\tilde{C}_{1j}$ (esta é a relação que vale para a k-ésima linha de A). Como estamos supondo o resultado verdadeiro para matrizes $(n-1) \times (n-1)$, então $\det(\tilde{A}_{1j}) = \alpha \det(\tilde{B}_{1j}) + \beta \det(\tilde{C}_{1j})$. Assim,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(\tilde{A}_{1j}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \left[\alpha \det(\tilde{B}_{1j}) + \beta \det(\tilde{C}_{1j})\right] \\ &= \alpha \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} b_{1j} \det(\tilde{B}_{1j}) + \beta \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} c_{1j} \det(\tilde{C}_{1j}) \\ &= \alpha \det(B) + \beta \det(C), \end{aligned}$$

pois $a_{1j} = b_{1j} = c_{1j}$, para $j = 1, \ldots, n$. $\square$

Exemplo 2.13. O cálculo do determinante da matriz a seguir pode ser feito da seguinte forma:

$$\det \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & d \\ e+3h & f+3c & g+3d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & d \\ e & f & g \end{bmatrix} + 3\det \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & d \\ h & c & d \end{bmatrix} = a(cg-df)$$

Corolário 2.11. *Se uma matriz A, $n \times n$, possui uma linha formada inteiramente por zeros, então*

$$\det(A) = 0.$$

Demonstração. Seja A uma matriz que tem uma linha nula. Multiplicando-se a linha nula por qualquer escalar α, obtemos pelo Teorema 2.10 que $\det(A) = \alpha \det(A)$, para qualquer escalar α, ou seja, $\det(A) = 0$. ☐

Pela definição de determinante, o determinante deve ser calculado fazendo-se o desenvolvimento em cofatores segundo a 1ª linha. O próximo resultado, que não vamos provar neste momento (Apêndice II na página 96), afirma que o determinante pode ser calculado fazendo-se o desenvolvimento em cofatores segundo *qualquer linha*.

Teorema 2.12. *Seja A uma matriz $n \times n$. O determinante de A pode ser calculado fazendo-se o desenvolvimento em cofatores segundo* **qualquer linha**. *Ou seja, para $i = 1, \ldots, n$,*

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \tag{2.5}$$

onde $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(\tilde{A}_{ij})$ é o cofator do elemento a_{ij}. A expressão (2.4) é chamada **desenvolvimento em cofatores do determinante de A em termos da i-ésima linha**.

Corolário 2.13. *Seja A uma matriz $n \times n$. Se A possui duas linhas iguais, então* $\det(A) = 0$.

Demonstração. O resultado é claramente verdadeiro para matrizes 2×2. Supondo que o resultado seja verdadeiro para matrizes $(n-1)\times(n-1)$, vamos provar que ele é verdadeiro para matrizes $n \times n$. Suponhamos que as linhas k e l sejam iguais, para $k \neq l$. Desenvolvendo o determinante de A em termos de uma linha i, com $i \neq k, l$, obtemos

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\tilde{A}_{ij}).$$

Mas, cada $\tilde{A}_{ij}$ é uma matriz $(n-1)\times(n-1)$ com duas linhas iguais. Como estamos supondo que o resultado seja verdadeiro para estas matrizes, então $\det(\tilde{A}_{ij}) = 0$. Isto implica que $\det(A) = 0$. $\square$

2.2.1 Propriedades do Determinante

Teorema 2.14. *Sejam A e B matrizes $n \times n$.*

(a) Se B é obtida de A multiplicando-se uma linha por um escalar α, então

$$\det(B) = \alpha \det(A)\,;$$

(b) *Se B resulta de A pela troca da posição relativa de duas linhas, então*

$$\det(B) = -\det(A)\,;$$

(c) *Se B é obtida de A substituindo a linha i por ela somada a um múltiplo escalar de uma linha j, $j \neq i$, então*

$$\det(B) = \det(A)\,;$$

(d) *Os determinantes de A e de sua transposta A^t são iguais,*

$$\det(A) = \det(A^t)\,;$$

(e) *O determinante do produto de A por B é igual ao produto dos seus determinantes,*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)\,.$$

Demonstração. Vamos demonstrar, agora, apenas os itens (a), (b) e (c) deste teorema.

(a) Segue diretamente do Teorema 2.10 na página 81.

(b) Sejam

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}.$$

Agora, pelo Teorema 2.10 na página 81 e o Corolário 2.13, temos que

$$\begin{aligned}
0 &= \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k + A_l \\ \vdots \\ A_k + A_l \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \\
&= 0 + \det(A) + \det(B) + 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\det(A) = -\det(B)$.

(c) Novamente, pelo Teorema 2.10 na página 81, temos que

$$\det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_l + \alpha A_k \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \alpha \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}.$$

□

Observação. Como o determinante de uma matriz é igual ao determinante da sua transposta (Teorema 2.14 (d)), segue que todas as propriedades que se referem a linhas são válidas com relação às colunas.

Exemplo 2.14. Vamos calcular o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

usando operações elementares para transformá-la numa matriz triangular superior e aplicando o Teorema 2.14 na página 84.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= -\det \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} && \boxed{\text{1ª linha} \longleftrightarrow \text{2ª linha}} \\
&= -3\det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} && \boxed{1/3 \times \text{1ª linha} \longrightarrow \text{1ª linha}} \\
&= -3\det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{bmatrix} && \boxed{-2 \times \text{1ª linha} + \text{3ª linha} \longrightarrow \text{3ª linha}} \\
&= -3\det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{bmatrix} && \boxed{-10 \times \text{2ª linha} + \text{3ª linha} \longrightarrow \text{3ª linha}} \\
&= (-3)(-55) = 165
\end{aligned}$$

Para se calcular o determinante de uma matriz $n \times n$ pela expansão em cofatores, precisamos fazer n produtos e calcular n determinantes de matrizes $(n-1) \times (n-1)$, que por sua vez vai precisar de $n-1$ produtos e assim por diante. Portanto, ao todo são necessários $n!$ produtos. Para se calcular o determinante de uma matriz 20×20, é necessário se realizar $20! \approx 10^{18}$ produtos. Os computadores pessoais realizam da ordem de 10^8 produtos por segundo. Portanto, um computador pessoal precisaria de cerca de 10^{10} segundos ou 10^3 anos para calcular o determinante de uma matriz 20×20 usando a expansão em cofatores. Enquanto, o cálculo do determinante pelo método apresentado no exemplo anterior é necessário apenas da ordem de n^3 produtos para se calcular o determinante.

O resultado seguinte caracteriza em termos do determinante as matrizes invertíveis e os sistemas lineares homogêneos que possuem solução não trivial.

Teorema 2.15. *Seja A uma matriz $n \times n$.*

(a) A matriz A é invertível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.

(b) O sistema homogêneo $AX = \bar{0}$ tem solução não trivial se, e somente se, $\det(A) = 0$.

Demonstração. (a) Seja R a forma escalonada reduzida da matriz A.

A demonstração deste item segue de três observações:

- Pelo Teorema 2.14 na página 84, $\det(A) \neq 0$ se, e somente se, $\det(R) \neq 0$.
- Pela Proposição 1.5 da página 37, ou $R = I_n$ ou a matriz R tem uma linha nula. Assim, $\det(A) \neq 0$ se, e somente se, $R = I_n$.
- Pelo Teorema 2.7 na página 63, $R = I_n$ se, e somente se, A é invertível.

(b) Pelo Teorema 2.8 na página 68, o sistema homogêneo $AX = \bar{0}$ tem solução não trivial se, e somente se, a matriz A não é invertível. E pelo item anterior, a matriz A é não invertível se, e somente se, $\det(A) = 0$.

$\square$

Exemplo 2.15. Seja $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Vamos mostrar que se A é invertível, então

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Como $A\,A^{-1} = I_n$, aplicando-se o determinante a ambos os membros desta igualdade e usando a propriedade (e) do Teorema 2.14 na página 84, obtemos

$$\det(A)\,\det(A^{-1}) = \det(I_n).$$

Mas, $\det(I_n) = 1$ (Exemplo 2.12 na página 80, a matriz identidade também é triangular inferior!). Logo, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Exemplo 2.16. Se uma matriz quadrada é tal que $A^2 = A^{-1}$, então vamos mostrar que $\det(A) = 1$. Aplicando-se o determinante a ambos os membros da igualdade acima, e usando novamente a propriedade (e) do Teorema 2.14 e o resultado do exemplo anterior, obtemos

$$(\det(A))^2 = \frac{1}{\det(A)}.$$

De onde segue que $(\det(A))^3 = 1$. Portanto, $\det(A) = 1$.

2.2.2 Matrizes Elementares e o Determinante (opcional)

Relembramos que uma matriz elementar é uma matriz que se obtem aplicando-se uma operação elementar na matriz identidade. Assim, aplicando-se os itens (a), (b) e (c) do Teorema 2.14 na página 84 obtemos o resultado seguinte.

Proposição 2.16. *(a) Se $E_{i,j}$ é a matriz elementar obtida trocando-se as linhas i e j da matriz identidade, então $\det(E_{i,j}) = -1$.*

(b) Se $E_i(\alpha)$ é a matriz elementar obtida da matriz identidade, multiplicando-se a linha i por α, então $\det(E_i(\alpha)) = \alpha$.

(c) Se $E_{i,j}(\alpha)$ é a matriz elementar obtida da matriz identidade, somando-se à linha j, α vezes a linha i, então $\det(E_{i,j}(\alpha)) = 1$.

Lembramos também que uma matriz é invertível se, e somente se, ela é o produto de matrizes elementares (Teorema 2.6 na página 61). Além disso, o resultado da aplicação de uma operação elementar em uma matriz é o mesmo que multiplicar a matriz à esquerda pela matriz elementar correspondente. Usando matrizes elementares podemos provar os itens (d) $(\det(A^t) = \det(A))$ e (e) $(\det(AB) = \det(A)\det(B))$ do Teorema 2.14 na página 84.

Demonstração dos itens (d) e (e) do Teorema 2.14.
(e) Vamos dividir a demonstração deste item em três casos:

Caso 1: Se $A = E$ é uma matriz elementar. Este caso segue diretamente da proposição anterior e dos itens (a), (b) e (c) do Teorema 2.14 na página 84.

Caso 2: Se A é invertível, então pelo Teorema 2.6 na página 61 ela é o produto de matrizes elementares, $A = E_1 \ldots E_k$. Aplicando-se o caso anterior sucessivas vezes, obtemos

$$\det(AB) = \det(E_1)\ldots\det(E_k)\det(B) = \det(E_1\ldots E_k)\det(B) = \det(A)\det(B).$$

Caso 3: Se A é singular, pela Proposição 2.9 na página 71, AB também é singular. Logo,

$$\det(AB) = 0 = 0\,\det(B) = \det(A)\det(B).$$

(d) Vamos dividir a demonstração deste item em dois casos.

Caso 1: Se A é uma matriz invertível, pelo Teorema 2.6 na página 61 ela é o produto de matrizes elementares, $A = E_1 \ldots E_k$. É fácil ver que se E é uma matriz elementar, então $\det(E) = \det(E^t)$ (verifique!). Assim,

$$\det(A^t) = \det(E_k^t)\ldots\det(E_1^t) = \det(E_k)\ldots\det(E_1) = \det(E_1\ldots E_k) = \det(A).$$

Caso 2: Se A não é invertível, então A^t também não o é, pois caso contrário, pelo Teorema 2.2 na página 57, também $A = (A^t)^t$ seria invertível. Assim neste caso, $\det(A^t) = 0 = \det(A)$. $\square$

Exercícios Numéricos (respostas na página 322)

2.2.1. Se $\det(A) = -3$, encontre
(a) $\det(A^2)$); (b) $\det(A^3)$; (c) $\det(A^{-1})$; (d) $\det(A^t)$;

2.2.2. Se A e B são matrizes $n \times n$ tais que $\det(A) = -2$ e $\det(B) = 3$, calcule $\det(A^tB^{-1})$.

2.2.3. Seja $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ tal que $\det(A) = 3$. Calcule o determinante das matrizes a seguir:

(a) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+a_{32} \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{11}-a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{22} & a_{21}-a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a_{32} & a_{31}-a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$;

2.2.4. Calcule o determinante de cada uma das matrizes seguintes usando operações elementares para transformá-las em matrizes triangulares superiores.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

2.2.5. Determine todos os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I_n) = 0$, onde

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

2.2.6. Ache os valores de λ, para os quais o sistema linear $(A - \lambda I_n)X = \bar{0}$ tem solução não trivial, onde

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; (d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2.2.7. Para as matrizes do exercício anterior, e os valores de λ encontrados, encontre a solução geral do sistema homogêneo $(A - \lambda I_n)X = \bar{0}$.

Exercícios usando o MATLAB

Comandos do MATLAB:

`>> det(A)` calcula o determinante da matriz `A`.

Comando do pacote GAAL:

`>> detopelp(A)` calcula o determinante de `A` aplicando operações elementares até que a matriz esteja na forma triangular superior.

2.2.8. Vamos fazer um experimento no MATLAB para tentar ter uma idéia do quão comum é encontrar matrizes invertíveis. No prompt do MATLAB digite a seguinte linha:

```
>> c=0; for n=1:1000,A=randi(2);if(det(A)~=0),c=c+1;end,end,c
```

(não esqueça das vírgulas e pontos e vírgulas!). O que esta linha está mandando o MATLAB fazer é o seguinte:

- Criar um contador `c` e atribuir a ele o valor zero.
- Atribuir à variável `A`, 1000 matrizes 2×2 com entradas inteiras aleatórias entre -5 e 5.
- Se $\det(\mathtt{A}) \neq 0$, então o contador `c` é acrescido de 1.
- No final o valor existente na variável `c` é escrito.

Qual a conclusão que você tira do valor obtido na variável `c`?

2.2.9. O pacote `gaal` contem alguns arquivos com mensagens criptografadas e uma chave para decifrá-las. Use os comandos a seguir para ler dos arquivos e atribuir às variáveis correspondentes, uma mensagem criptografada e a uma chave para decifrá-la.
`>> menc=lerarq('menc1'), key=lerarq('key')`
Aqui são lidos os arquivos `menc1` e `key`. Para converter a mensagem criptografada e a chave para matrizes numéricas use os comandos do pacote `gaal`:
`>> y=char2num(menc), M=char2num(key)`
A mensagem criptografada, `y`, foi obtida multiplicando-se a matriz `M` pela mensagem original (convertida para números), `x`. Determine `x`. Descubra a mensagem usando o comando do pacote `gaal`, `num2char(x)`. Decifre as mensagens que estão nos arquivos `menc2` e `menc3`. Como deve ser a matriz `M` para que ela possa ser uma matriz chave na criptografia?

2.2.10. Resolva, com o MATLAB, os **Exercícios Numéricos a partir do Exercício 2.2.4.**

Exercícios Teóricos

2.2.11. Mostre que se $\det(AB) = 0$, então ou A é singular ou B é singular.

2.2.12. O determinante de AB é igual ao determinante de BA? Justifique.

2.2.13. Mostre que se A é uma matriz não singular tal que $A^2 = A$, então $\det(A) = 1$.

2.2.14. Mostre que se $A^k = \bar{0}$, para algum k inteiro positivo, então A é singular.

2.2.15. Mostre que se $A^t = A^{-1}$, então $\det(A) = \pm 1$;

2.2.16. Mostre que se α é um escalar e A é uma matriz $n \times n$, então $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

2.2.17. Mostre que A, $n \times n$, é invertível se, e somente se, $A^t A$ é invertível.

2.2.18. Sejam A e P matrizes $n \times n$, sendo P invertível. Mostre que $\det(P^{-1}AP) = \det(A)$.

2.2.19. Mostre que se uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ é **triangular superior**, (isto é, os elementos situados abaixo da diagonal são iguais a zero) então $\det(A) = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$.

2.2.20. (a) Mostre que se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, então $\det(A) = 0$ se, e somente se, uma linha é múltiplo escalar da outra. E se A for uma matriz $n \times n$?

(b) Mostre que se uma linha A_i de uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$, é tal que $A_i = \alpha A_k + \beta A_l$, para α e β escalares e $i \neq k, l$, então $\det(A) = 0$.

(c) Mostre que se uma linha A_i de uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$, é tal que $A_i = \sum_{k\neq i} \alpha_k A_k$, para $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ escalares, então $\det(A) = 0$.

2.2.21. Mostre que o **determinante de Vandermonde** é dado por

$$V_n = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j).$$

A expressão à direita significa o produto de todos os termos $x_i - x_j$ tais que $i > j$ e $i, j = 1, \ldots, n$. (Sugestão: Mostre primeiro que $V_3 = (x_3 - x_2)(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)$. Supondo que o resultado é verdadeiro para matrizes de Vandermonde de ordem $n - 1$, mostre que o resultado é verdadeiro para matrizes de Vandermonde de ordem n. Faça as seguintes operações nas colunas da matriz, $-x_1 C_{i-1} + C_i \rightarrow C_i$, para $i = n, \ldots, 2$. Obtenha $V_n = (x_n - x_1)\ldots(x_2 - x_1)V_{n-1}$.)

2.2.22. Sejam A, B e D matrizes $p \times p$, $p \times (n-p)$ e $(n-p) \times (n-p)$, respectivamente. Mostre que

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ \bar{0} & D \end{bmatrix} = \det(A)\det(D).$$

(Sugestão: O resultado é claramente verdadeiro para $n = 2$. Suponha que o resultado seja verdadeiro para matrizes de ordem $n-1$. Desenvolva o determinante da matriz em termos da 1ª coluna, escreva o resultado em termos de determinantes de ordem $n-1$ e mostre que o resultado é verdadeiro para matrizes de ordem n.)

Apêndice II: Demonstração do Teorema 2.12 na página 83

Lema 2.17. *Sejam* $E_1 = [1\,0\,\ldots\,0]^t, E_2 = [0\,1\,0\,\ldots\,0]^t, \ldots, E_n = [0\,\ldots\,0\,1]^t$. *Se* A *é uma matriz* $n \times n$, *cuja* i*-ésima linha é igual a* E_k^t, *para algum* k *(*$1 \leq k \leq n$*), então*

$$\det(A) = (-1)^{i+k}\det(\tilde{A}_{ik}).$$

Demonstração. É fácil ver que para matrizes 2×2 o lema é verdadeiro. Suponha que ele seja verdadeiro para matrizes $(n-1) \times (n-1)$ e vamos provar que ele é verdadeiro para matrizes $n \times n$. Podemos supor que $1 < i \leq n$.

Seja B_j a matriz $(n-2) \times (n-2)$ obtida de A eliminando-se as linhas 1 e i e as colunas j e k, para $1 \leq j \leq n$.

Para $j < k$, a matriz $\tilde{A}_{1j}$ é uma matriz $(n-1) \times (n-1)$ cuja $(i-1)$-ésima linha é igual a E_{k-1}^t. Para $j > k$, a matriz $\tilde{A}_{1j}$ é uma matriz $(n-1) \times (n-1)$ cuja $(i-1)$-ésima linha é igual a

E_k^t. Como estamos supondo o lema verdadeiro para estas matrizes e como pelo Corolário 2.11 na página 83 $\det(\tilde{A}_{1k}) = 0$, segue que

$$\det(\tilde{A}_{1j}) = \begin{cases} (-1)^{(i-1)+(k-1)}\det(B_j) & \text{se } j < k, \\ 0 & \text{se } j = k, \\ (-1)^{(i-1)+k}\det(B_j) & \text{se } j > k. \end{cases} \tag{2.6}$$

Usando (2.6), obtemos

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det(\tilde{A}_{ij}) \\ &= \sum_{j<k}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}(-1)^{(i-1)+(k-1)}\det(B_j) + \sum_{j>k}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}(-1)^{(i-1)+k}\det(B_j) \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$(-1)^{i+k}\det(\tilde{A}_{ik}) = (-1)^{i+k}\left[\sum_{j<k}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det(B_j) + \sum_{j>k}^{n}(-1)^{1+(j-1)}a_{1j}\det(B_j)\right]$$

É simples a verificação de que as duas expressões acima são iguais. $\square$

Demonstração do Teorema 2.12 na página 83. Sejam $E_1 = [1\,0\,\ldots\,0]^t, E_2 = [0\,1\,0\,\ldots\,0]^t$, $\ldots, E_n = [0\,\ldots\,0\,1]^t$. Observe que a linha i de A pode ser escrita como $A_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_j^t$. Seja B_j a matriz obtida de A substituindo-se a linha i por E_j^t. Pelo Teorema 2.10 na página 81 e o Lema 2.17 segue que

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\det(B_j) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(\tilde{A}_{ij}).$$

$\square$

Teste do Capítulo

---

1. Calcule o determinante da matriz seguinte usando operações elementares para transformá-la em uma matriz triangular superior.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

---

2. Se possível, encontre a inversa da seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

---

3. Encontre todos os valores de λ para os quais a matriz $A - \lambda I_4$ tem inversa, onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

---

4. Responda **Verdadeiro** ou **Falso**, justificando:

(a) Se $A^2 = -2A^4$, então $(I + A^2)^{-1} = I - 2A^2$;

(b) Se $A^t = -A^2$ e A é não singular, então determinante de A é -1;

(c) Se $B = AA^tA^{-1}$, então $\det(A) = \det(B)$.

(d) $\det(A + B) = \det A + \det B$

Capítulo 3

Vetores no Plano e no Espaço

Muitas grandezas físicas, como velocidade, força, deslocamento e impulso, para serem completamente identificadas, precisam, além da magnitude, da direção e do sentido. Estas grandezas são chamadas **grandezas vetoriais** ou simplesmente **vetores**.

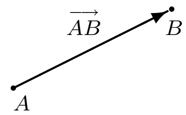
Geometricamente, vetores são representados por **segmentos (de retas) orientados** (segmentos de retas com um sentido de percurso) no plano ou no espaço. A ponta da seta do segmento orientado é chamada **ponto final ou extremidade** e o outro ponto extremo é chamado de **ponto inicial ou origem** do segmento orientado. A direção e o sentido do segmento orientado identifica a direção e o sentido do vetor. O comprimento do segmento orientado representa a magnitude do vetor.

Um vetor poder ser representado por vários segmentos orientados. Este fato é análogo ao que ocorre com os números racionais e as frações. Duas frações representam o mesmo número racional se o numerador e o denominador de cada uma delas estiverem na mesma proporção. Por exemplo, as frações $1/2$, $2/4$ e $3/6$ representam o mesmo número racional. De forma análoga, dizemos que dois segmentos orientados representam o mesmo vetor se possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido. A definição de igualdade de vetores também é análoga a igualdade de números racionais. Dois números racionais a/b e c/d são iguais, quando $ad = bc$. Analogamente, dizemos que dois vetores são iguais se eles possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido.

Na Figura 3.1 temos 4 segmentos orientados, com origens em pontos diferentes, que representam o mesmo vetor, ou seja, são considerados como vetores iguais, pois possuem a mesma direção, mesmo sentido e o mesmo comprimento.

Se o ponto inicial de um representante de um vetor V é A e o ponto final é B, então escrevemos

$$V = \overrightarrow{AB}$$



3.1 Soma de Vetores e Multiplicação por Escalar

A soma, $V + W$, de dois vetores V e W é determinada da seguinte forma:

- tome um segmento orientado que representa V;
- tome um segmento orientado que representa W, com origem na extremidade de V;
- o vetor $V + W$ é representado pelo segmento orientado que vai da origem de V até a extremidade de W.

Da Figura 3.2, deduzimos que a soma de vetores é comutativa, ou seja,

$$V + W = W + V, \tag{3.1}$$

para quaisquer vetores V e W. Observamos também que a soma $V+W$ está na diagonal do paralelogramo determinado por V e W, quando estão representados com a mesma origem.

Da Figura 3.3, deduzimos que a soma de vetores é associativa, ou seja,

$$V + (W + U) = (V + W) + U, \tag{3.2}$$

para quaisquer vetores V, W e U.

O vetor que tem a sua origem coincidindo com a sua extremidade é chamado **vetor nulo** e denotado por $\vec{0}$. Segue então, que

$$V + \vec{0} = \vec{0} + V = V, \tag{3.3}$$

para todo vetor V.

Para qualquer vetor V, o **simétrico** de V, denotado por $-V$, é o vetor que tem mesmo comprimento, mesma direção e sentido contrário ao de V. Segue então, que

$$V + (-V) = \vec{0}. \tag{3.4}$$

Definimos a **diferença** W **menos** V, por

$$W - V = W + (-V).$$

Segue desta definição, de (3.1), (3.2), (3.4) e de (3.3) que

$$W + (V - W) = (V - W) + W = V + (-W + W) = V + \vec{0} = V.$$

Assim, a diferença $V - W$ é um vetor que somado a W dá V, portanto ele vai da extremidade de W até a extremidade de V, desde que V e W estejam representados por segmentos orientados com a mesma origem.

A **multiplicação de um vetor** V **por um escalar** α, $\alpha\, V$, é determinada pelo vetor que possui as seguintes características:

(a) é o vetor nulo, se $\alpha = 0$ ou $V = \vec{0}$,

(b) caso contrário,

(i) tem comprimento $|\alpha|$ vezes o comprimento de V,

(ii) a direção é a mesma de V (neste caso, dizemos que eles são **paralelos**),

(iii) tem o mesmo sentido de V, se $\alpha > 0$ e
tem o sentido contrário ao de V, se $\alpha < 0$.

As propriedades da multiplicação por escalar serão apresentadas mais a frente. Se $W = \alpha V$, dizemos que W é **um múltiplo escalar** de V. É fácil ver que dois vetores não nulos são paralelos (ou **colineares**) se, e somente se, um é um múltiplo escalar do outro.

As operações com vetores podem ser definidas utilizando um **sistema de coordenadas retangulares**. Em primeiro lugar, vamos considerar os vetores no plano.

Seja V um vetor no plano. Definimos as **componentes de** V como sendo as coordenadas (v_1, v_2) do ponto final do representante de V que tem ponto inicial na origem. Escrevemos simplesmente

$$\boxed{V = (v_1, v_2).}$$

Assim, as coordenadas de um ponto P são iguais as componentes do vetor $\overrightarrow{OP}$, que vai da origem do sistema de coordenadas ao ponto P. Em particular, o vetor nulo, $\vec{0} = (0, 0)$. Em termos das componentes, podemos realizar facilmente as operações: soma de vetores e multiplicação de vetor por escalar.

- Como ilustrado na Figura 3.8, a **soma** de dois vetores $V = (v_1, v_2)$ e $W = (w_1, w_2)$ é dada por

$$\boxed{V + W = (v_1 + w_1, v_2 + w_2);}$$

- Como ilustrado na Figura 3.9, a **multiplicação** de um vetor $V = (v_1, v_2)$ por um escalar α é dada por

$$\boxed{\alpha\, V = (\alpha\, v_1, \alpha\, v_2).}$$

Definimos as **componentes de um vetor no espaço** de forma análoga a que fizemos com vetores no plano. Vamos inicialmente introduzir um sistema de coordenadas retangulares no espaço. Para isto, escolhemos um ponto como origem O e como eixos coordenados, três retas orientadas (com sentido de percurso definido), passando pela origem, perpendiculares entre si. Estes serão os eixos x, y e z. O eixo z é o eixo vertical. Os eixos x e y são horizontais e satisfazem a seguinte propriedade. Suponha que giramos o eixo x pelo menor ângulo até que coincida com o eixo y. Se os dedos da mão direita apontam na direção do semi-eixo x positivo de forma que o semi-eixo y positivo esteja do lado da palma da mão, então o polegar aponta no sentido do semi-eixo z positivo. Cada par de eixos determina um plano chamado de **plano coordenado**. Portanto os três planos coordenados são: xy, yz e xz.

A cada ponto P no espaço associamos um terno de números (x, y, z), chamado de **coordenadas do ponto** P como segue.

- Passe três planos por P paralelos aos planos coordenados.
- A interseção do plano paralelo ao plano xy, passando por P, com o eixo z determina a coordenada z.
- A interseção do plano paralelo ao plano xz, passando por P, com o eixo y determina a coordenada y
- A interseção do plano paralelo ao plano yz, passando por P, com o eixo x determina a coordenada x.

Alternativamente, podemos encontrar as coordenadas de um ponto P como segue.

- Trace uma reta paralela ao eixo z, passando por P;

- A interseção da reta paralela ao eixo z, passando por P, com o plano xy é o ponto P'. As coordenadas de P', (x, y), no sistema de coordenadas xy são as duas primeiras coordenadas de P.

- A terceira coordenada é igual ao comprimento do segmento PP', se P estiver acima do plano xy e ao comprimento do segmento PP' com o sinal negativo, se P estiver abaixo do plano xy.

Agora, estamos prontos para utilizarmos um sistema de coordenadas cartesianas também nas operações de vetores no espaço. Seja V um vetor no espaço. Como no caso de vetores do plano, definimos as **componentes de** V como sendo as coordenadas (v_1, v_2, v_3) do ponto final do representante de V que tem ponto inicial na origem. Escrevemos simplesmente

$$\boxed{V = (v_1, v_2, v_3).}$$

Assim, as coordenadas de um ponto P são iguais as componentes do vetor $\overrightarrow{OP}$ que vai da origem do sistema de coordenadas ao ponto P. Em particular, o vetor nulo, $\vec{0} = (0, 0, 0)$. Assim como fizemos para vetores no plano, para vetores no espaço a soma de vetores e a multiplicação de vetor por escalar podem ser realizadas em termos das componentes.

- Se $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$, então a adição de V com W é dada por

$$\boxed{V + W = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3);}$$

- Se $V = (v_1, v_2, v_3)$ e α é um escalar, então a multiplicação de V por α é dada por

$$\boxed{\alpha\, V = (\alpha\, v_1, \alpha\, v_2, \alpha\, v_3).}$$

Exemplo 3.1. Se $V = (1, -2, 3)$, $W = (2, 4, -1)$, então

$$V + W = (1 + 2, -2 + 4, 3 + (-1)) = (3, 2, 2), \quad 3V = (3 \cdot 1, 3\,(-2), 3 \cdot 3) = (3, -6, 9).$$

Quando um vetor V está representado por um segmento orientado com ponto inicial fora da origem (Figura 3.13), digamos em $P = (x_1, y_1, z_1)$, e ponto final em $Q = (x_2, y_2, z_2)$, então as componentes do vetor V são dadas por

$$\boxed{V = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).}$$

Portanto, as componentes de V são obtidas subtraindo-se as coordenadas do ponto Q (extremidade) das do ponto P (origem). O mesmo se aplica a vetores no plano.

Exemplo 3.2. As componentes do vetor V que tem um representante com ponto inicial $P = (5/2, 1, 2)$ e ponto final $Q = (0, 5/2, 5/2)$ são dadas por

$$V = \overrightarrow{PQ} = (0 - 5/2, 5/2 - 1, 5/2 - 2) = (-5/2, 3/2, 1/2).$$

Observação. O vetor é "livre", ele não tem posição fixa, ao contrário do ponto e do segmento orientado. Por exemplo, o vetor $V = (-5/2, 3/2, 1/2)$, no exemplo acima, estava representado por um segmento orientado com a origem no ponto $P = (5/2, 1, 2)$. Mas, poderia ser representado por um segmento orientado cujo ponto inicial poderia estar em qualquer outro ponto.

Um vetor no espaço $V = (v_1, v_2, v_3)$ pode também ser escrito na notação matricial como uma **matriz linha** ou como uma **matriz coluna**:

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}.$$

Estas notações podem ser justificadas pelo fato de que as operações matriciais

$$V + W = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{bmatrix}, \quad \alpha V = \alpha \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \alpha v_3 \end{bmatrix}$$

ou

$$V + W = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 & v_2 + w_2 & v_3 + w_3 \end{bmatrix},$$
$$\alpha V = \alpha \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha v_1 & \alpha v_2 & \alpha v_3 \end{bmatrix}$$

produzem os mesmos resultados que as operações vetoriais

$$V + W = (v_1, v_2, v_3) + (w_1, w_2, w_3) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3),$$
$$\alpha V = \alpha(v_1, v_2, v_3) = (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3).$$

O mesmo vale, naturalmente, para vetores no plano.

No teorema seguinte enunciamos as propriedades mais importantes da soma de vetores e multiplicação de vetores por escalar.

Teorema 3.1. *Sejam U, V e W vetores e α e β escalares. São válidas as seguintes propriedades:*

(a) $U + V = V + U$;

(b) $(U + V) + W = U + (V + W)$;

(c) $U + \vec{0} = U$;

(d) $U + (-U) = \vec{0}$;

(e) $\alpha(\beta U) = (\alpha\beta)U$;

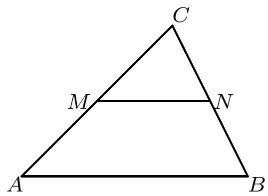
(f) $\alpha(U + V) = \alpha U + \alpha V$;

(g) $(\alpha + \beta)U = \alpha U + \beta U$;

(h) $1U = U$.

Demonstração. Segue diretamente das propriedades da álgebra matricial (Teorema 1.1 na página 7). □

Exemplo 3.3. Vamos usar vetores e as suas propriedades para provar um resultado conhecido de geometria plana. Seja um triângulo ABC e sejam M e N os pontos médios de AC e BC, respectivamente. Vamos provar que MN é paralelo a AB e tem comprimento igual a metade do comprimento de AB.



Devemos provar que

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,.$$

Agora, a partir da figura ao lado temos que

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN}\,.$$

Como M é ponto médio de AC e N é ponto médio de BC, então

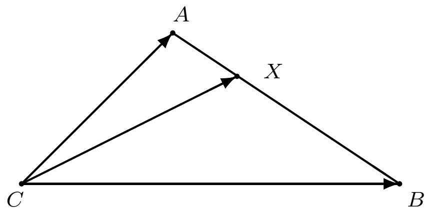
$$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\,.$$

Logo,

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,.$$

Exemplo 3.4. Dados quatro pontos A, B, C e X tais que $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB}$, vamos escrever $\overrightarrow{CX}$ como uma soma de múltiplos escalares de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$, chamada de **combinação linear** de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$. Como $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB}$, então os vetores $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{AB}$ são paralelos e portanto o ponto X só pode estar na reta definida por A e B. Vamos desenhá-lo entre A e B, mas isto não vai representar nenhuma restrição.

O vetor que vai de C para X, pode ser escrito como uma soma de um vetor que vai de C para A com um vetor que vai de A para X,



$$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AX}\,.$$

Agora, por hipótese $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB}$, o que implica que $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \lambda\overrightarrow{AB}$.
Mas, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$, portanto $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \lambda(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})$. Logo,

$$\overrightarrow{CX} = (1-\lambda)\overrightarrow{CA} + \lambda\overrightarrow{CB}\,.$$

Observe que para $\lambda = 0$, $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA}$, para $\lambda = 1$, $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CB}$, para $\lambda = 1/2$, $\overrightarrow{CX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$, para $\lambda = 1/3$, $\overrightarrow{CX} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

Exemplo 3.5. Vamos mostrar, usando vetores, que o ponto médio de um segmento que une os pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_1, y_2, z_2)$ é $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$.

O ponto M é o ponto médio de AB se, e somente se, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Então, aplicando o exemplo anterior (com o ponto C sendo a origem O), $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$. Como as coordenadas de um ponto são iguais as componentes do vetor que vai da origem até aquele ponto, segue que $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(x_1, y_1, z_1) + \frac{1}{2}(x_2, y_2, z_2)$ e $M = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}, \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

Exercícios Numéricos (respostas na página 326)

3.1.1. Determine o vetor X, tal que $3X - 2V = 15(X - U)$.

3.1.2. Determine o vetor X, tal que $\left\{\begin{array}{rcrcl} 6X & - & 2Y & = & U \\ 3X & + & Y & = & U + V \end{array}\right.$

3.1.3. Determine as coordenadas da extremidade do segmento orientado que representa o vetor $V = (3, 0, -3)$, sabendo-se que sua origem está no ponto $P = (2, 3, -5)$.

3.1.4. Quais são as coordenadas do ponto P', simétrico do ponto $P = (1, 0, 3)$ em relação ao ponto $M = (1, 2, -1)$? (Sugestão: o ponto P' é tal que o vetor $\overrightarrow{MP'} = -\overrightarrow{MP}$)

3.1.5. Verifique se os pontos dados a seguir são **colineares**, isto é, pertencem a uma mesma reta:

(a) $A = (5, 1, -3)$, $B = (0, 3, 4)$ e $C = (0, 3, -5)$;

(b) $A = (-1, 1, 3)$, $B = (4, 2, -3)$ e $C = (14, 4, -15)$;

3.1.6. Dados os pontos $A = (1, -2, -3)$, $B = (-5, 2, -1)$ e $C = (4, 0, -1)$. Determine o ponto D tal que A, B, C e D sejam vértices consecutivos de um paralelogramo.

3.1.7. Verifique se o vetor U é combinação linear (soma de múltiplos escalares) de V e W:

(a) $V = (9, -12, -6), W = (-1, 7, 1)$ e $U = (-4, -6, 2)$;

(b) $V = (5, 4, -3), W = (2, 1, 1)$ e $U = (-3, -4, 1)$;

Exercícios usando o MATLAB

`>> V=[v1,v2,v3]` cria um vetor `V`, usando as componentes numéricas `v1, v2, v3`. Por exemplo `>> V=[1,2,3]` cria o vetor $V = (1, 2, 3)$;

`>> V+W` é a soma de `V` e `W`; `>> V-W` é a diferença `V` menos `W`; `>> num*V` é o produto do vetor `V` pelo escalar `num`;

`>> subs(expr,x,num)` substitui `x` por `num` na expressão `expr`;

`>> solve(expr)` determina a solução da equação `expr=0`;

Comandos gráficos do pacote GAAL:

`>> desvet(P,V)` desenha o vetor `V` com origem no ponto `P` e `>> desvet(V)` desenha o vetor `V` com origem no ponto $O = (0, 0, 0)$.

`>> po([P1;P2;...;Pn])` desenha os pontos `P1, P2, ..., Pn`.
`>> lineseg(P1,P2,'cor')` desenha o segmento de reta `P1P2`. `>> tex(P,'texto')` coloca o `texto` no ponto `P`.

`>> axiss` reescala os eixos com a mesma escala. `>> eixos` desenha os eixos coordenados.

`>> box` desenha uma caixa em volta da figura. `>> rota` faz uma rotação em torno do eixo z. `>> zoom3(fator)` amplifica a região pelo `fator`.

3.1.8. Coloque em duas variáveis V e W dois vetores do plano ou do espaço a seu critério

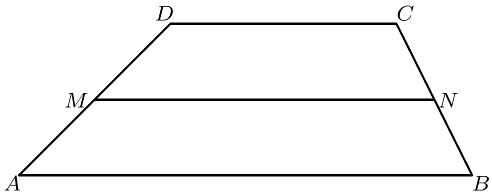
(a) Use a função `ilsvw(V,W)` para visualizar a soma dos dois vetores.

(b) Coloque em uma variável `a` um número e use a função `ilav(a,V)` para visualizar a multiplicação do vetor `V` pelo escalar `a`.

3.1.9. Use o MATLAB para resolver os **Exercícios Numéricos** a partir do Exercício 1.3.

Exercícios Teóricos

3.1.10. Demonstre que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases, e sua medida é a média aritmética das medidas das bases. (Sugestão: mostre que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$ e depois conclua que $\overrightarrow{MN}$ é um múltiplo escalar de $\overrightarrow{AB}$. Revise o Exemplo 3.3 na página 108)



3.1.11. Demonstre que as diagonais de um paralelogramo se cortam ao meio. (Sugestão: Sejam M e N os pontos médios das duas diagonais do paralelogramo. Mostre que o vetor $\overrightarrow{MN} = \vec{0}$, então conclua que $M = N$.)

3.1.12. Sejam A, B e C pontos quaisquer com $A \neq B$. Prove que:

(a) Um ponto X pertence a reta determinada por A e B se, e somente se,

$$\overrightarrow{CX} = \alpha \overrightarrow{CA} + \beta \overrightarrow{CB}, \quad \text{com} \quad \alpha + \beta = 1.$$

(b) Um ponto X pertence ao segmento AB se, e somente se,

$$\overrightarrow{CX} = \alpha \overrightarrow{CA} + \beta \overrightarrow{CB}, \quad \text{com} \quad \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0 \quad \text{e} \quad \alpha + \beta = 1.$$

(c) Um ponto X é um ponto interior ao triângulo ABC se, e somente se,

$$\overrightarrow{CX} = \alpha \overrightarrow{CA} + \beta \overrightarrow{CB}, \quad \text{com} \quad \alpha > 0,\ \beta > 0 \quad \text{e} \quad \alpha + \beta < 1.$$

3.1.13. Mostre que se $\alpha V = \vec{0}$, então $\alpha = 0$ ou $V = \vec{0}$.

3.1.14. Se $\alpha U = \alpha V$, então $U = V$? E se $\alpha \neq 0$?

3.1.15. Se $\alpha V = \beta V$, então $\alpha = \beta$? E se $V \neq \vec{0}$?

3.1.16. Mostre que $2V = V + V$.

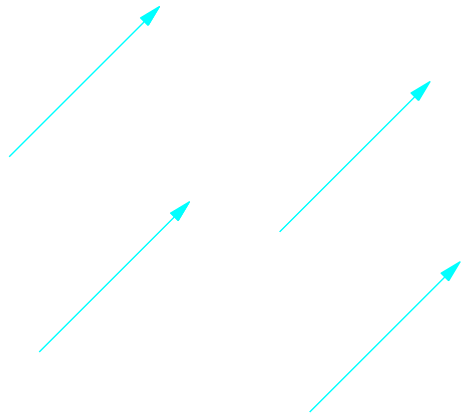


Figura 3.1: Segmentos orientados representando o mesmo vetor

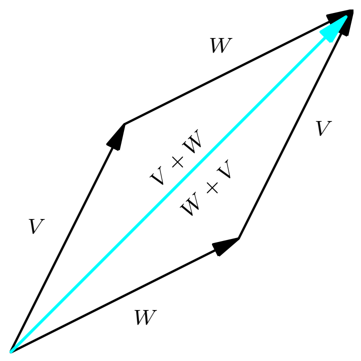


Figura 3.2: $V + W = W + V$

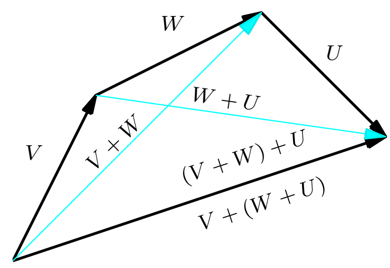
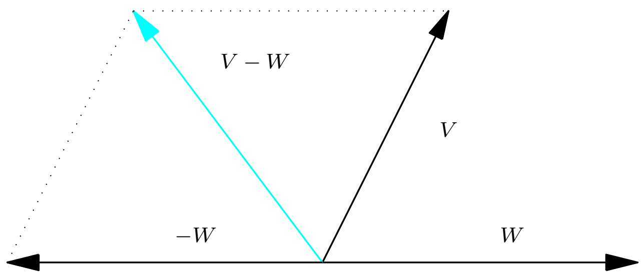


Figura 3.3: $V + (W + U) = (V + W) + U$



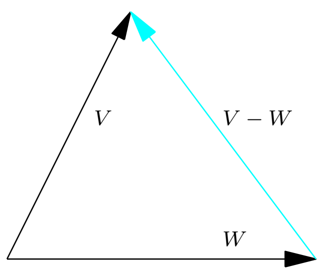


Figura 3.4: A diferença $V - W$

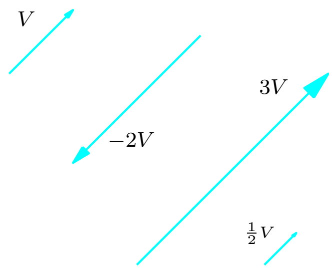


Figura 3.5: Multiplicação de vetor por escalar

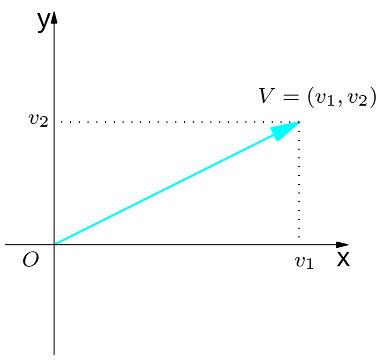


Figura 3.6: As componentes do vetor V no plano

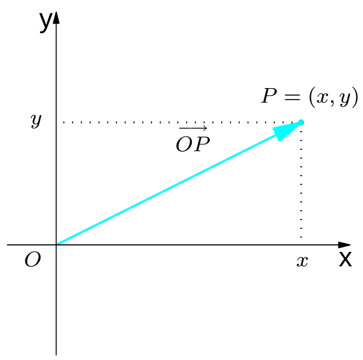


Figura 3.7: As coordenadas de P são iguais as componentes de $\overrightarrow{OP}$

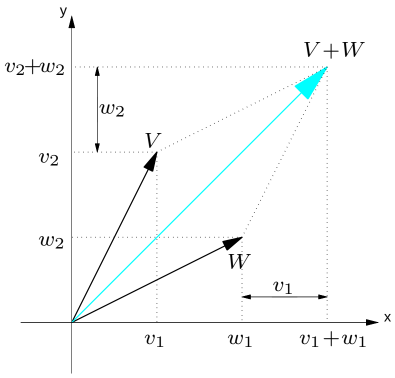


Figura 3.8: A soma de dois vetores no plano

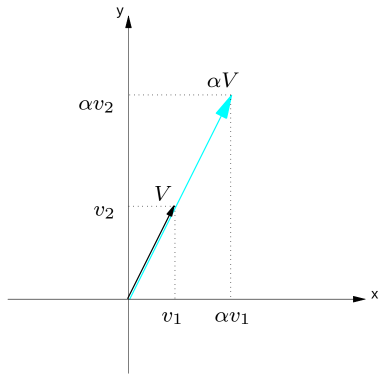


Figura 3.9: A multiplicação de vetor por escalar no plano

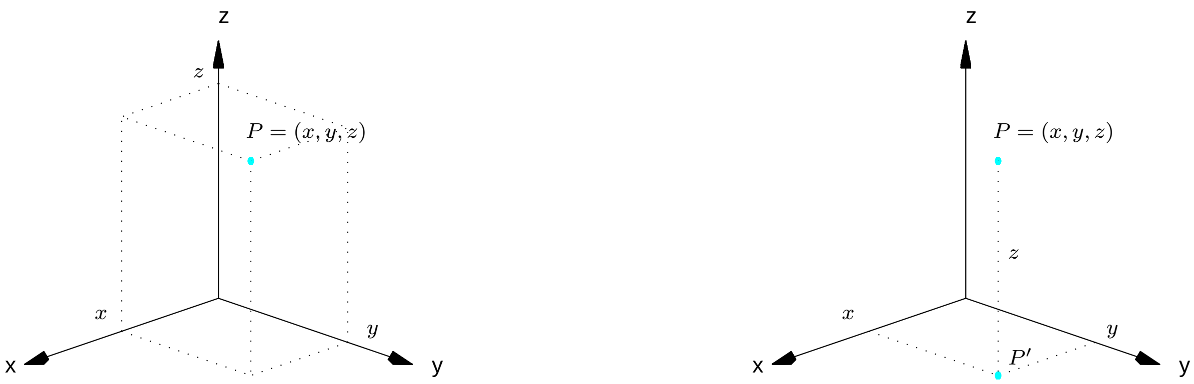


Figura 3.10: As coordenadas de um ponto no espaço

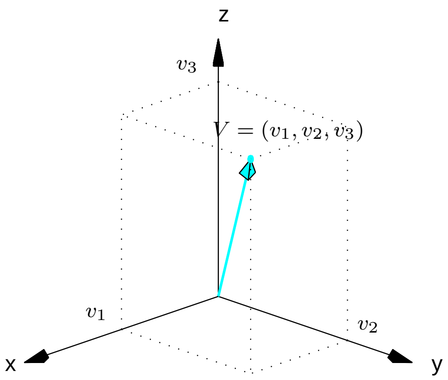


Figura 3.11: As componentes de um vetor no espaço

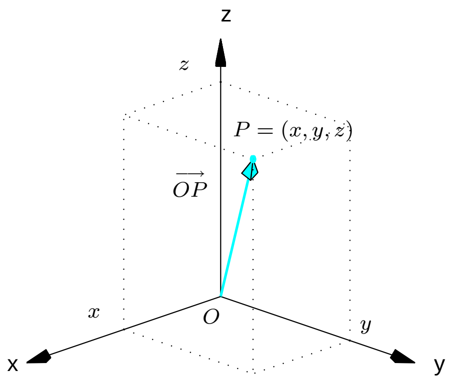


Figura 3.12: As coordenadas de P são iguais as componentes de $\overrightarrow{OP}$

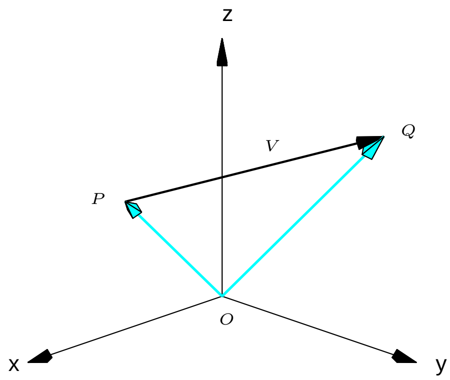


Figura 3.13: $V = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

3.2 Produtos de Vetores

3.2.1 Norma e Produto Escalar

Já vimos que o **comprimento** de um vetor V é definido como sendo o comprimento de qualquer um dos segmentos orientados que o representam. O comprimento do vetor V também é chamado de **norma de** V e é denotado(a) por $||V||$. Segue do Teorema de Pitágoras que a norma de um vetor é dada por

$$\boxed{||V|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2},}$$

no caso em que $V = (v_1, v_2)$ é um vetor no plano, e por

$$\boxed{||V|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2},}$$

no caso em que $V = (v_1, v_2, v_3)$ é um vetor no espaço (verifique usando as Figuras 3.14 e 3.15).

Um vetor de norma igual a 1 é chamado de **vetor unitário**.

A **distância entre dois pontos** $P = (x_1, y_1, z_1)$ **e** $Q = (x_2, y_2, z_2)$ é igual à norma do vetor $\overrightarrow{PQ}$ (Figura 3.13 na página 118). Como $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, então a distância de P a Q é dada por

$$\boxed{\mathrm{dist}(P,Q) = ||\overrightarrow{PQ}|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.}$$

Analogamente, a **distância entre dois pontos** $P = (x_1, y_1)$ **e** $Q = (x_2, y_2)$ no plano é igual à norma do vetor $\overrightarrow{PQ}$, que é dada por

$$\boxed{\mathrm{dist}(P,Q) = ||\overrightarrow{PQ}|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.}$$

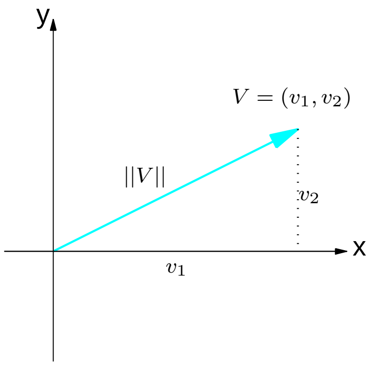


Figura 3.14: A norma de um vetor V no plano

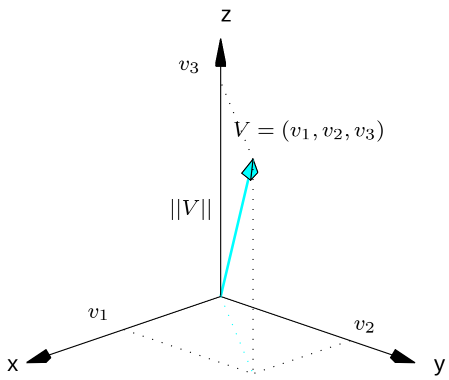


Figura 3.15: A norma de um vetor V no espaço

Exemplo 3.6. A norma do vetor $V = (1, -2, 3)$ é

$$||V|| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

A distância entre os pontos $P = (2, -3, 1)$ e $Q = (-1, 4, 5)$ é

$$\text{dist}(P, Q) = ||\overrightarrow{PQ}|| = ||(-1-2, 4-(-3), 5-1)|| = ||(-3, 7, 4)|| = \sqrt{(-3)^2 + 7^2 + 4^2} = \sqrt{74}.$$

Se $V = (v_1, v_2, v_3)$ e α é um escalar, então da definição da multiplicação de vetor por escalar e da norma de um vetor segue que

$$||\alpha V|| = ||(\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3)|| = \sqrt{(\alpha v_1)^2 + (\alpha v_2)^2 + (\alpha v_3)^2} = \sqrt{\alpha^2(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)},$$

ou seja,

$$\boxed{||\alpha V|| = |\alpha|\,||V||.} \tag{3.5}$$

Dado um vetor V **não nulo**, o vetor

$$\boxed{U = \left(\frac{1}{||V||}\right) V.}$$

é um **vetor unitário na direção de** V, pois por (3.5), temos que

$$||U|| = \left|\frac{1}{||V||}\right| ||V|| = 1.$$

Exemplo 3.7. Um vetor unitário na direção do vetor $V = (1, -2, 3)$ é o vetor

$$U = \left(\frac{1}{||V||}\right) V = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)(1, -2, 3) = (\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}).$$

O ângulo entre dois vetores não nulos, V e W, é definido pelo ângulo θ determinado por V e W que satisfaz $0 \leq \theta \leq \pi$, quando eles estão representados com a mesma origem.

Quando o ângulo θ entre dois vetores V e W é reto ($\theta = 90^o$), ou um deles é o vetor nulo, dizemos que os vetores V e W são **ortogonais** ou **perpendiculares entre si**.

Vamos definir, agora, um produto entre dois vetores, cujo resultado é um escalar. Por isso ele é chamado **produto escalar**. Este produto tem aplicação, por exemplo, em Física: o trabalho realizado por uma força é o produto escalar do vetor força pelo vetor deslocamento, quando a força aplicada é constante.

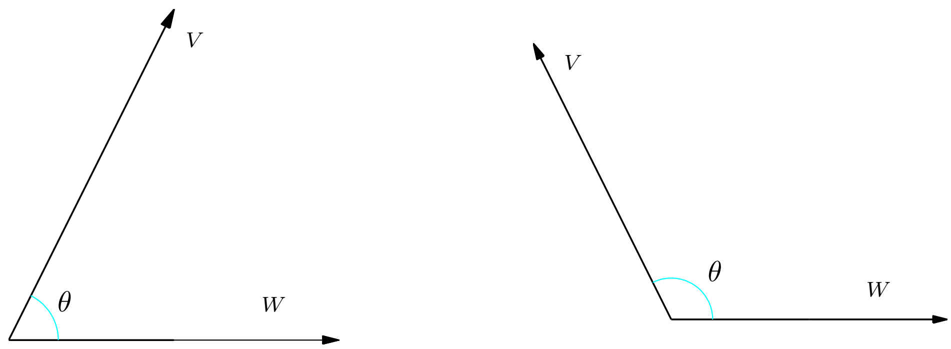


Figura 3.16: Ângulo entre dois vetores

Definição 3.1. O **produto escalar** ou **interno** de dois vetores V e W é definido por

$$V \cdot W = \begin{cases} 0, & \text{se } V \text{ ou } W \text{ é o vetor nulo,} \\ ||V||\,||W|| \cos\theta, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que θ é o ângulo entre eles.

Quando os vetores são dados em termos das suas componentes não sabemos diretamente o ângulo entre eles. Por isso, precisamos de uma forma de calcular o produto escalar que não necessite do ângulo entre os vetores.

Se V e W são dois vetores não nulos e θ é o ângulo entre eles, então pela lei dos cossenos,

$$||V - W||^2 = ||V||^2 + ||W||^2 - 2||V||\,||W|| \cos\theta.$$

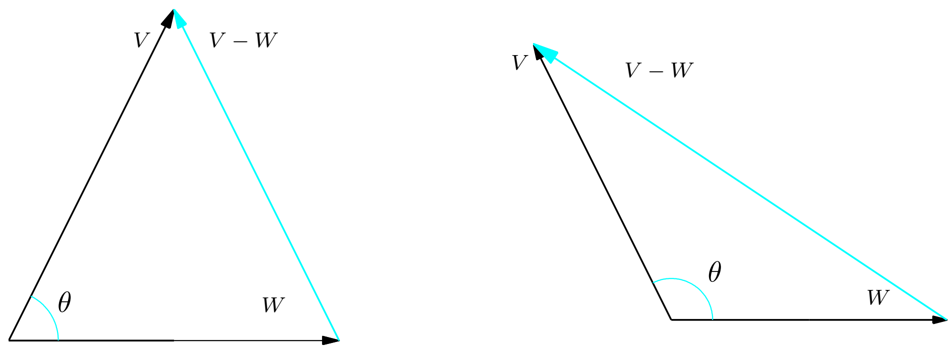


Figura 3.17: Ângulo entre dois vetores e a diferença entre eles

Assim,

$$V \cdot W = ||V||\,||W|| \cos\theta = \frac{1}{2}\left(||V||^2 + ||W||^2 - ||V-W||^2\right). \tag{3.6}$$

Já temos então uma fórmula para calcular o produto escalar que não depende diretamente do ângulo entre eles. Substituindo-se as coordenadas dos vetores em (3.6) obtemos uma expressão mais simples para o cálculo do produto interno.

Por exemplo, se $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$ são vetores no espaço, então substituindo-se $||V||^2 = v_1^2+v_2^2+v_3^2$, $||W||^2 = w_1^2+w_2^2+w_3^2$ e $||V-W||^2 = (v_1-w_1)^2+(v_2-w_2)^2+(v_3-w_3)^2$ em (3.6) os termos v_i^2 e w_i^2 são cancelados e obtemos

$$V \cdot W = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3.$$

Teorema 3.2. *O produto escalar ou interno, $V \cdot W$, entre dois vetores é dado por*

$$V \cdot W = v_1 w_1 + v_2 w_2,$$

se $V = (v_1, v_2)$ e $W = (w_1, w_2)$ são vetores no plano e por

$$V \cdot W = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3,$$

se $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$ são vetores no espaço.

Exemplo 3.8. Sejam $V = (0, 1, 0)$ e $W = (2, 2, 3)$. O produto escalar de V por W é dado por

$$V \cdot W = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 2\,.$$

Podemos usar o Teorema 3.2 para determinar o ângulo entre dois vetores não nulos, V e W. O cosseno do ângulo entre V e W é, então, dado por

$$\boxed{\cos\theta = \frac{V \cdot W}{||V||\,||W||}\,.}$$

Se V e W são vetores não nulos e θ é o ângulo entre eles, então

(a) θ é agudo ($0 \leq \theta < 90^o$) se, e somente se, $V \cdot W > 0$,

(b) θ é reto ($\theta = 90^o$) se, e somente se, $V \cdot W = 0$ e

(c) θ é obtuso ($90^o < \theta \leq 180^o$) se, e somente se, $V \cdot W < 0$.

Exemplo 3.9. Vamos determinar o ângulo entre uma diagonal de um cubo e uma de suas arestas. Sejam $V_1 = (1,0,0), V_2 = (0,1,0)$ e $V_3 = (0,0,1)$ (Figura 3.18). Uma diagonal do cubo é representada pelo vetor D dado por

$$D = V_1 + V_2 + V_3 = (1,1,1)\,.$$

Então o ângulo entre D e V_1 satisfaz

$$\cos\theta = \frac{D\cdot V_1}{||D||||V_1||} = \frac{1.1+0.1+0.1}{(\sqrt{1^2+1^2+1^2})(\sqrt{1^2+0^2+0^2})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ou seja,

$$\theta = \arccos(\frac{1}{\sqrt{3}}) \approx 54^{\mathrm{o}}\,.$$

Teorema 3.3. *Sejam U, V e W vetores e α um escalar. São válidas as seguintes propriedades:*

(a) *(comutatividade)* $U\cdot V = V\cdot U$;

(b) *(distributividade)* $U\cdot(V+W) = U\cdot V + U\cdot W$;

(c) *(associatividade)* $\alpha(U\cdot V) = (\alpha U)\cdot V = U\cdot(\alpha V)$;

(d) $V\cdot V = ||V||^2 \geq 0$, *para todo* V *e* $V\cdot V = 0$ *se, e somente se,* $V = \vec{0}$.

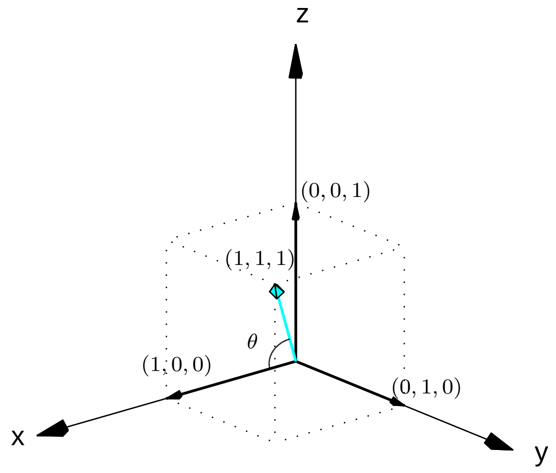


Figura 3.18: Ângulo entre a diagonal de um cubo e uma de suas arestas

Demonstração. Sejam $U = (u_1, u_2, u_3)$, $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$.

(a) $U \cdot V = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 = V \cdot U$;

(b) $U \cdot (V + W) = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3) = u_1(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2) + u_3(v_3 + w_3) = (u_1v_1 + u_1w_1) + (u_2v_2 + u_2w_2) + (u_3v_3 + u_3w_3) = (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) + (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3) = U \cdot V + U \cdot W$;

(c) $\alpha(U \cdot V) = \alpha(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) = (\alpha u_1)v_1 + (\alpha u_2)v_2 + (\alpha u_3)v_3 = (\alpha U) \cdot V$;

(d) $V \cdot V = ||V||^2$ é uma soma de quadrados, por isso é sempre maior ou igual a zero e é zero se, e somente se, todas as parcelas são iguais a zero. $\square$

3.2.2 Projeção Ortogonal

Podemos decompor um vetor V em uma soma de dois vetores, V_1 e V_2, sendo V_1 na direção de um vetor W e V_2 perpendicular a W (Figura 3.19).

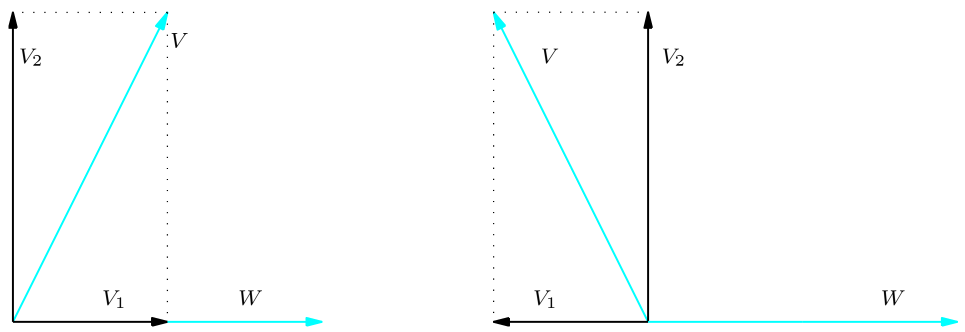


Figura 3.19: Decomposição de V em uma soma $V_1 + V_2$, em que V_1 é paralelo a W

O vetor V_1 é chamado **projeção ortogonal de V sobre W** e é denotado por $\mathrm{proj}_W V$.

Proposição 3.4. *Seja W um vetor não nulo. Então, a projeção ortogonal de um vetor V em W é dada por*

$$\mathrm{proj}_W V = \left(\frac{V \cdot W}{||W||^2}\right) W\,.$$

Demonstração. Sejam $V_1 = \text{proj}_W V$ e $V_2 = V - \text{proj}_W V$. Como V_1 é paralelo a W, então $V_1 = \alpha W$. Assim,

$$V = V_1 + V_2 = \alpha W + V_2\,.$$

Multiplicando-se escalarmente V por W e usando o Teorema 3.3 (d) obtemos

$$V \cdot W = \alpha ||W||^2 + V_2 \cdot W\,. \tag{3.7}$$

Mas, V_2 é perpendicular a W, então $V_2 \cdot W = 0$. Portanto, de (3.7) obtemos

$$\alpha = \frac{V \cdot W}{||W||^2}\,.$$

□

Exemplo 3.10. Sejam $V = (2, -1, 3)$ e $W = (4, -1, 2)$. Vamos encontrar dois vetores V_1 e V_2 tais que $V = V_1 + V_2$, V_1 é paralelo a W e V_2 é perpendicular a W (Figura 3.19). Temos que

$$V \cdot W = 2 \cdot 4 + (-1)(-1) + 3 \cdot 2 = 15$$

$$||W||^2 = 4^2 + (-1)^2 + 2^2 = 21\,.$$

$$V_1 = \text{proj}_W V = \left(\frac{V \cdot W)}{||W||^2}\right) W = \left(\frac{15}{21}\right)(4, -1, 2) = (\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7})$$

$$V_2 = V - V_1 = (2, -1, 3) - (\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}) = (-\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{11}{7})\,.$$

3.2.3 Produto Vetorial

Vamos, agora, definir um produto entre dois vetores, cujo resultado é um vetor. Por isso, ele é chamado **produto vetorial**. Este produto tem aplicação, por exemplo, em Física: a força exercida sobre uma partícula carregada mergulhada num campo magnético é o produto vetorial do vetor velocidade da partícula pelo vetor campo magnético, desde que o campo seja constante e a carga seja unitária.

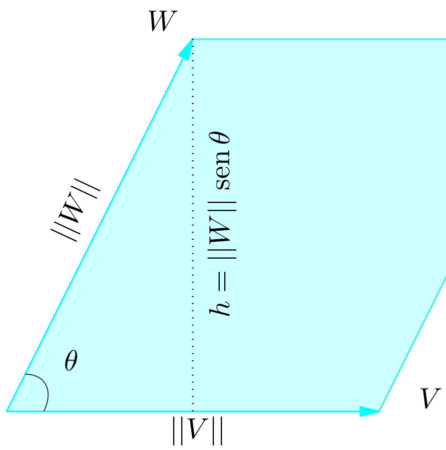


Figura 3.20: Área de um paralelogramo

Definição 3.2. Sejam V e W dois vetores no espaço. Definimos o **produto vetorial**, $V \times W$, como sendo o vetor com as seguintes características:

(a) Tem comprimento dado por

$$||V \times W|| = ||V||\,||W||\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

ou seja, a *norma* de $V \times W$ é igual à área do paralelogramo determinado por V e W.

(b) Tem direção perpendicular a V e a W.

(c) Tem o sentido dado pela regra da mão direita (Figura 3.21): Se o ângulo entre V e W é θ, giramos o vetor V de um ângulo θ até que coincida com W e acompanhamos este movimento com os dedos da mão direita, então o polegar vai apontar no sentido de $V \times W$.

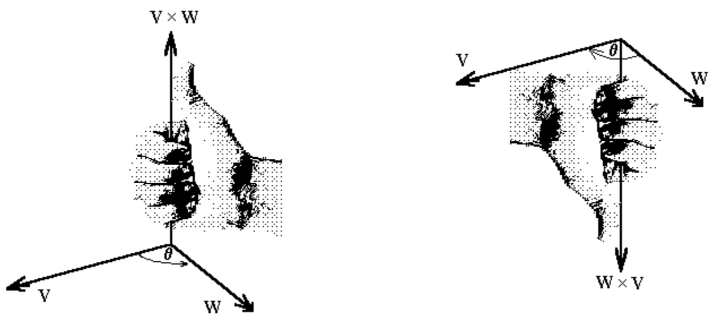


Figura 3.21: Regra da mão direita

Da forma como definimos o produto vetorial é difícil o seu cálculo, mas as propriedades que apresentaremos a seguir possibilitarão obter uma fórmula para o produto vetorial em termos das componentes dos vetores.

Teorema 3.5. *Sejam V, W e U vetores no espaço e α um escalar. São válidas as seguintes propriedades:*

(a) $V \times W = -(W \times V)$, *isto é, o produto vetorial é* **anti-comutativo**.

(b) $V \times W = \vec{0}$ *se, e somente se,* $V = \alpha W$ *ou* $W = \alpha V$.

(c) $V \cdot (V \times W) = W \cdot (V \times W) = 0$.

(d) $\alpha(V \times W) = (\alpha V) \times W = V \times (\alpha W)$.

(e) $(V \times W) \cdot U > 0$ *se, e somente se,* V, W *e* U *satisfazem a regra da mão direita, isto é, se o ângulo entre* V *e* W *é* θ, *giramos o vetor* V *de um ângulo* θ *até que coincida com* W *e acompanhamos este movimento com os dedos da mão direita, então o polegar vai apontar no sentido de* U.

(f) $|(V \times W) \cdot U|$ *é igual ao volume do paralelepípedo determinado por* V, W *e* U *(Figura 3.22 na página 134).*

(g) $(V \times W) \cdot U = V \cdot (W \times U)$, *ou seja, pode-se trocar os sinais* $\times$ *e* $\cdot$ *em* $(V \times W) \cdot U$.

(h) $V \times (W + U) = V \times W + V \times U$ *e* $(V + W) \times U = V \times U + W \times U$ *(Distributividade em relação a soma de vetores).*

Demonstração. (a) Trocando-se V por W troca-se o sentido de $V \times W$ (Figura 3.21).

(b) $||V \times W|| = 0$ se, e somente se, um deles é o vetor nulo ou $\operatorname{sen}\theta = 0$, em que θ é o ângulo entre V e W, ou seja, V e W são paralelos. Assim, $V \times W = \vec{0}$ se, e somente se, $V = \alpha W$ ou $W = \alpha V$.

(c) Segue imediatamente da definição do produto vetorial.

(d) Segue facilmente da definição do produto vetorial, por isso deixamos como exercício para o leitor.

(e) Como vemos na Figura 3.22 V, W e U satisfazem a regra da mão direita se, e somente se, $0 < \theta < \pi/2$ ou $\cos\theta > 0$, em que θ é o ângulo entre $V \times W$ e U. Como, $(V \times W) \cdot U = ||V \times W||||U||\cos\theta$, então V, W e U satisfazem a regra da mão direita se, e somente se, $(V \times W) \cdot U > 0$.

(f) O volume do paralelepípedo determinado por V, W e U é igual à área da base vezes a altura, ou seja, pela definição do produto vetorial, o volume é dado por

$$\text{Volume} = ||V \times W||\, h\,.$$

Mas, como vemos na Figura 3.22 a altura é $h = ||U|||\cos\theta|$, o que implica que

$$\text{Volume} = ||V \times W||\, ||U|||\cos\theta| = |U \cdot (V \times W)|\,.$$

(g) Como o produto escalar é comutativo, pelo item (f), $|(V \times W) \cdot U| = |V \cdot (W \times U)|$. Agora, pelo item (e), $(V \times W) \cdot U$ e $V \cdot (W \times U)$ têm o mesmo sinal, pois V, W e U satisfazem a regra da mão direita se, e somente se, W, U e V também satisfazem.

(h) Vamos provar a primeira igualdade e deixamos como exercício para o leitor a demonstração da segunda. Vamos mostrar que o vetor $Y = V \times (W + U) - V \times W - V \times U$ é o vetor nulo. Para isso, vamos mostrar que para qualquer vetor X no espaço $X \cdot Y = 0$.

Pela distributividade do produto escalar, Teorema 3.3 item (b) na página 125, temos que

$$X \cdot Y = X \cdot V \times (W + U) - X \cdot (V \times W) - X \cdot (V \times U).$$

Pelo item (g), temos que

$$\begin{aligned} X \cdot Y &= (X \times V) \cdot (W + U) - (X \times V) \cdot W - (X \times V) \cdot U \\ &= (X \times V) \cdot (W + U) - (X \times V) \cdot (W + U) = 0 \end{aligned}$$

Assim, $X \cdot Y = 0$, para todo vetor X, em particular para $X = Y$, temos que $Y \cdot Y = ||Y||^2 = 0$. Portanto, $Y = \vec{0}$, ou seja, $V \times (W + U) = V \times W + V \times U$.

□

Os **vetores canônicos**

$$\boxed{\vec{i} = (1, 0, 0), \qquad \vec{j} = (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad \vec{k} = (0, 0, 1)}$$

são vetores unitários (de norma igual a um) paralelos aos eixos coordenados. Todo vetor $V = (v_1, v_2, v_3)$ pode ser escrito em termos de uma soma de múltiplos escalares de $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ (combinação linear), pois

$$\begin{aligned} V = (v_1, v_2, v_3) &= (v_1, 0, 0) + (0, v_2, 0) + (0, 0, v_3) = \\ &= v_1(1, 0, 0) + v_2(0, 1, 0) + v_3(0, 0, 1) = \\ &= v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

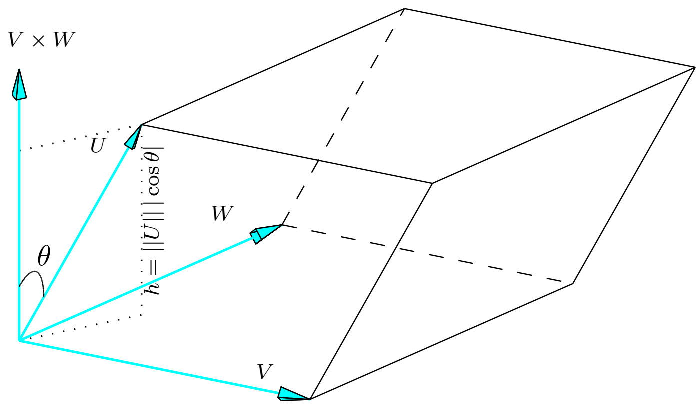


Figura 3.22: Volume do paralelepípedo determinado por V, W e U

Da definição de produto vetorial podemos obter facilmente as seguintes relações:

$$\begin{array}{lll} \vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}, & \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}, & \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}, \\ \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}. \end{array}$$

Agora, estamos prontos para obter uma fórmula que dê o produto vetorial de dois vetores em termos das sua componentes.

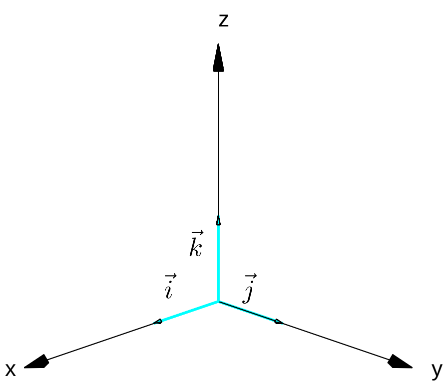


Figura 3.23: Vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$

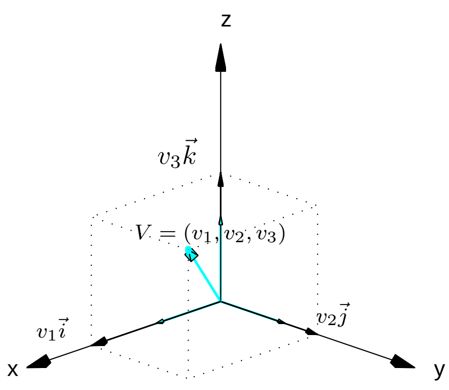


Figura 3.24: $V = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$

Teorema 3.6. *Sejam $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$ vetores no espaço. Então, o produto vetorial $V \times W$ é dado por*

$$V \times W = \left(\det \begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix}\right). \tag{3.9}$$

Demonstração. De (3.8) segue que podemos escrever $V = v_1\,\vec{i} + v_2\,\vec{j} + v_3\,\vec{k}$ e $W = w_1\,\vec{i} + w_2\,\vec{j} + w_3\,\vec{k}$. Assim, pela distributividade do produto vetorial em relação a soma temos que

$$\begin{aligned} V \times W &= (v_1\,\vec{i} + v_2\,\vec{j} + v_3\,\vec{k}) \times (w_1\,\vec{i} + w_2\,\vec{j} + w_3\,\vec{k}) \\ &= v_1w_1(\vec{i} \times \vec{i}) + v_1w_2(\vec{i} \times \vec{j}) + v_1w_3(\vec{i} \times \vec{k}) + \\ &\quad + v_2w_1(\vec{j} \times \vec{i}) + v_2w_2(\vec{j} \times \vec{j}) + v_2w_3(\vec{j} \times \vec{k}) + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +v_3w_1(\vec{k}\times\vec{i}) + v_3w_2(\vec{k}\times\vec{j}) + v_3w_3(\vec{k}\times\vec{k}) \\
= \; & (v_2w_3 - v_3w_2)\vec{i} + (v_1w_3 - v_3w_1)\vec{j} + (v_1w_2 - v_2w_1)\vec{k} \\
= \; & \det\begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix}\vec{i} - \det\begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix}\vec{j} + \det\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix}\vec{k} \\
= \; & \left(\det\begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix}, -\det\begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix}, \det\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

□

Para obter as componentes do produto vetorial $V \times W$ podemos proceder como segue:

- Escreva as componentes de V acima das componentes de W:

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix};$$

- Para calcular a primeira componente de $V \times W$, elimine a primeira coluna da matriz acima e calcule o determinante da sub-matriz resultante. A segunda componente é obtida, eliminando-se a segunda coluna e calculando-se o determinante da sub-matriz resultante com o sinal trocado. A terceira é obtida como a primeira, mas eliminando-se a terceira coluna.

Exemplo 3.11. Sejam $V = (1, 2, -2)$ e $W = (3, 0, 1)$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V \times W = \left(\det\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, -\det\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\right) = (2, -7, -6)\,.$$

Usando os vetores $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ o produto vetorial $V \times W$, pode ser escrito em termos do determinante simbólico

$$V \times W = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix} \vec{i} - \det \begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix} \vec{j} + \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} \vec{k}\,.$$

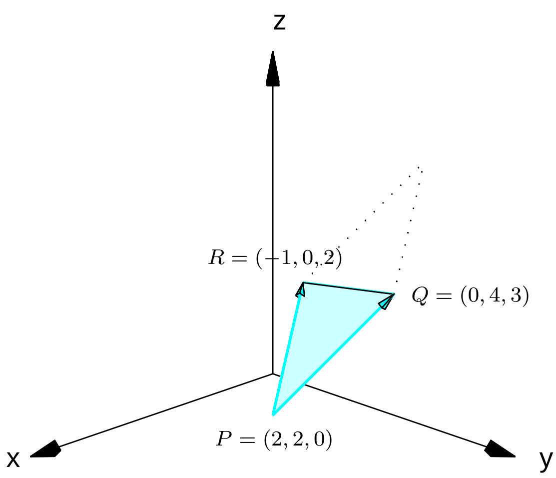


Figura 3.25: Área do triângulo PQR

Exemplo 3.12. Vamos calcular a área do triângulo determinado pelos pontos $P = (2, 2, 0), Q = (0, 4, 3)$ e $R = (-1, 0, 2)$ (Figura 3.25). Sejam

$$V = \overrightarrow{PQ} = (0 - 2, 4 - 2, 3 - 0) = (-2, 2, 3)$$

$$W = \overrightarrow{PR} = (-1-2, 0-2, 2-0) = (-3,-2,2)\,.$$

Então,

$$V \times W = (10,-5,10) \quad \text{e} \quad \text{Área} = \frac{1}{2}||V \times W|| = \frac{15}{2}.$$

3.2.4 Produto Misto

Teorema 3.7. *Sejam U, V e W vetores no espaço. Então,*

$$U \cdot (V \times W) = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Sejam $U = (u_1, u_2, u_3), V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$. Segue do Teorema 3.2 na página 124, do Teorema 3.6 na página 135 e da definição de determinante de uma matriz que

$$\begin{aligned} U \cdot (V \times W) &= (u_1,u_2,u_3) \cdot \left(\det \begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= u_1 \det \begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix} - u_2 \det \begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix} + u_3 \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

□

O produto $U \cdot (V \times W)$ é chamado de **produto misto** de U, V e W.

Exemplo 3.13. O produto misto dos vetores $U = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $V = -\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ e $W = 5\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ é

$$U \cdot (V \times W) = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix} = -84.$$

Pelo Teorema 3.5 item (f) na página 131 o volume de um paralelepípedo determinado por três vetores é igual ao valor absoluto do produto misto destes vetores.

Exemplo 3.14. Sejam $U = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}, V = \vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$ e $W = 3\vec{j} + 2\vec{k}$. O volume de um paralelepípedo com arestas determinadas por U, V e W é dado por

$$|U \cdot (V \times W)| = |\det \begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}| = |-49| = 49\,.$$

Segue imediatamente do Teorema 3.7 e do Teorema 3.5 item (f) na página 131 um critério para saber se três vetores são paralelos a um mesmo plano.

Corolário 3.8. *Sejam U, V e W vetores no espaço. Estes vetores são* **coplanares** *(isto é, são paralelos a um mesmo plano) ou dois deles são colineares (paralelos) ou um deles é o vetor nulo se, e somente se,*

$$U \cdot (V \times W) = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Exemplo 3.15. Vamos verificar que os pontos $P = (0, 1, 1)$, $Q = (1, 0, 2)$, $R = (1, -2, 0)$ e $S = (-2, 2, -2)$ são **coplanares**, isto é, pertencem a um mesmo plano. Com estes pontos podemos construir os vetores

$$\overrightarrow{PQ} = (1 - 0, 0 - 1, 2 - 1) = (1, -1, 1),$$

$$\overrightarrow{PR} = (1 - 0, -2 - 1, 0 - 1) = (1, -3, -1) \quad \text{e}$$

$$\overrightarrow{PS} = (-2 - 0, 2 - 1, -2 - 1) = (-2, 1, -3)$$

Os pontos P, Q, R e S pertencem a um mesmo plano se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ e $\overrightarrow{PS}$ são coplanares. E isto acontece se, e somente se, o produto misto entre eles é zero. Assim, P, Q, R e S são coplanares, pois

$$\overrightarrow{PQ} \cdot (\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PS}) = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = 0.$$

Exercícios Numéricos (respostas na página 326)

3.2.1. Sejam $V = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ e $W = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Determine vetores unitários paralelos aos vetores (a) $V + W$; (b) $V - W$; (c) $2V - 3W$.

3.2.2. Ache o vetor unitário da bissetriz do ângulo entre os vetores $V = 2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ e $W = 6\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. (Sugestão: observe que a soma de dois vetores está na direção da bissetriz se, e somente se, os dois tiverem o mesmo comprimento. Portanto, tome múltiplos escalares de V e W de forma que eles tenham o mesmo comprimento e tome o vetor unitário na direção da soma deles.)

3.2.3. Determine o valor de x para o qual os vetores $V = x\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ e $W = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ são perpendiculares.

3.2.4. Demonstre que não existe x tal que os vetores $V = x\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ e $W = x\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ são perpendiculares.

3.2.5. Ache o ângulo entre os seguintes pares de vetores:

(a) $2\vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{j} - \vec{k}$; (b) $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ e $-2\vec{j} - 2\vec{k}$; (c) $3\vec{i} + 3\vec{j}$ e $2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

3.2.6. Decomponha $W = (-1, -3, 2)$ como a soma de dois vetores W_1 e W_2, com W_1 paralelo ao vetor $(0, 1, 3)$ e W_2 ortogonal a este último. (Sugestão: revise o Exemplo 3.10 na página 128)

3.2.7. Verifique se os seguintes pontos pertencem a um mesmo plano:

(a) $A = (2, 2, 1), B = (3, 1, 2), C = (2, 3, 0)$ e $D = (2, 3, 2)$;

(b) $A = (2, 0, 2), B = (3, 2, 0), C = (0, 2, 1)$ e $D = (10, -2, 1)$;

3.2.8. Calcule o volume do paralelepípedo que tem um dos vértices no ponto $A = (2, 1, 6)$ e os três vértices adjacentes nos pontos $B = (4, 1, 3), C = (1, 3, 2)$ e $D = (1, 2, 1)$.

3.2.9. Calcule a área do paralelogramo em que três vértices consecutivos são $A = (1, 0, 1), B = (2, 1, 3)$ e $C = (3, 2, 4)$.

3.2.10. Calcule a área do triângulo com vértices $A = (1, 2, 1), B = (3, 0, 4)$ e $C = (5, 1, 3)$.

3.2.11. Ache X tal que $X \times (\vec{i}+\vec{k}) = 2(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})$ e $||X|| = \sqrt{6}$.

3.2.12. Sabe-se que o vetor X é ortogonal a $(1,1,0)$ e a $(-1,0,1)$, tem norma $\sqrt{3}$ e sendo θ o ângulo entre X e $(0,1,0)$, tem-se $\cos\theta > 0$. Ache X.

3.2.13. Mostre que $A = (3,0,2)$, $B = (4,3,0)$ e $C = (8,1,-1)$ são vértices de um triângulo retângulo. Em qual dos vértices está o ângulo reto?

Exercícios usando o MATLAB

`>> V=[v1,v2,v3]` cria um vetor `V`, usando as componentes numéricas `v1, v2, v3`. Por exemplo `>> V=[1,2,3]` cria o vetor $V = (1,2,3)$;

`>> subs(expr,x,num)` substitui `x` por `num` na expressão `expr`;

`>> solve(expr)` determina a solução da equação `expr=0`;

Comandos numéricos do pacote GAAL:

`>> V=randi(1,3)` cria um vetor aleatório com componentes inteiras;

`>> no(V)` calcula a norma do vetor `V`.

`>> pe(V,W)` calcula o produto escalar do vetor `V` pelo vetor `W`.

`>> pv(V,W)` calcula o produto vetorial do vetor `V` pelo vetor `W`.

Comandos gráficos do pacote GAAL:

`>> desvet(P,V)` desenha o vetor `V` com origem no ponto `P` e `>> desvet(V)` desenha o vetor `V` com origem no ponto $O = (0,0,0)$.

`>> po([P1;P2;...;Pn])` desenha os pontos `P1, P2, ..., Pn`.

>> `lineseg(P1,P2,'cor')` desenha o segmento de reta `P1P2`.

>> `eixos` desenha os eixos coordenados.

>> `box` desenha uma caixa em volta da figura.

>> `axiss` reescala os eixos com a mesma escala.

>> `rota` faz uma rotação em torno do eixo z.

>> `zoom3(fator)` amplifica a região pelo `fator`.

>> `tex(P,'texto')` coloca o `texto` no ponto `P`.

3.2.14. Digite no prompt

`demog21`,

(sem a vírgula!). Esta função demonstra as funções gráficas para vetores.

3.2.15. Coloque em duas variáveis V e W dois vetores bi-dimensionais ou tri-dimensionais a seu critério.

(a) Use a função `ilvijk(V)` para visualizar o vetor `V` como uma soma de múltiplos escalares (combinação linear) dos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$.

(b) Use a função `ilpv(V,W)` para visualizar o produto vetorial $V \times W$.

(c) Use a função `ilproj(W,V)` para visualizar a projeção de V em W.

3.2.16. Use o MATLAB para resolver os **Exercícios Numéricos**

Exercícios Teóricos

3.2.17. Se $V \cdot W = V \cdot U$, então $W = U$?

3.2.18. Mostre que se V é ortogonal a W_1 e W_2, então V é ortogonal a $\alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2$.

3.2.19. Demonstre que as diagonais de um losango são perpendiculares. (Sugestão: mostre que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, usando o fato de que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ e $|| \overrightarrow{AB} || = || \overrightarrow{BC} ||$.)

3.2.20. Sejam V um vetor não nulo no espaço e α, β e γ os ângulos que V forma com os vetores $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$, respectivamente. Demonstre que

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1\,.$$

(Sugestão: $\cos\alpha = \frac{V \cdot \vec{i}}{||V|| ||\vec{i}||}$, $\cos\beta = \frac{V \cdot \vec{j}}{||V|| ||\vec{j}||}$ e $\cos\gamma = \frac{V \cdot \vec{k}}{||V|| ||\vec{k}||}$)

3.2.21. Demonstre que, se V e W são vetores quaisquer, então:

(a) $V \cdot W = \dfrac{1}{4}\left(||V + W||^2 - ||V - W||^2\right)$;

(b) $||V||^2 + ||W||^2 = \dfrac{1}{2}\left(||V + W||^2 + ||V - W||^2\right)$.

(Sugestão: desenvolva os segundos membros das igualdades acima observando que $||V + W||^2 = (V + W) \cdot (V + W)$ e $||V - W||^2 = (V - W) \cdot (V - W)$)

3.2.22. Demonstre que se V e W são vetores quaisquer, então:

(a) $|V \cdot W| \leq ||V||\,||W||$;

(b) $||V + W|| \leq ||V|| + ||W||$;
(Sugestão: mostre que $||V + W||^2 = (V + W) \cdot (V + W) \leq (||V|| + ||W||)^2$, usando o item anterior)

(c) $\Big| ||V|| - ||W|| \Big| \leq ||V - W||$.
(Sugestão: defina $U = V - W$ e aplique o item anterior a U e W)

3.2.23. O produto vetorial é associativo? Justifique a sua resposta. (Sugestão: experimente com os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)

3.2.24. Demonstre que se V e W são vetores quaisquer no espaço, então

$$||V \times W|| \leq ||V||\,||W||.$$

3.2.25. Se U, V e W são vetores no espaço, prove que $|U \cdot (V \times W)| \leq ||U||\,||V||\,||W||$. (Sugestão: use o Teorema 3.2 na página 124 e o exercício anterior)

3.2.26. Mostre que $U \cdot (V \times W) = V \cdot (W \times U) = W \cdot (U \times V)$. (Sugestão: use as propriedades do determinante)

3.2.27. Mostre que

(a) $(\alpha U_1 + \beta U_2) \cdot (V \times W) = \alpha U_1 \cdot (V \times W) + \beta U_2 \cdot (V \times W)$;

(b) $U \cdot [(\alpha V_1 + \beta V_2) \times W] = \alpha U \cdot (V_1 \times W) + \beta U \cdot (V_2 \times W)$;

(c) $U \cdot [V \times (\alpha W_1 + \beta W_2)] = \alpha U \cdot (V \times W_1) + \beta U \cdot (V \times W2)$.

(d) $U \cdot (V \times W) = U \cdot [(V + \alpha U + \beta W) \times W]$.

(Sugestão: use as propriedades dos produtos escalar e vetorial)

3.2.28. Prove a identidade de Lagrange

$$||V \times W||^2 = ||V||^2||W||^2 - (V \cdot W)^2.$$

3.2.29. Mostre que a área do triângulo com vértices (x_i, y_i), para $i = 1, 2, 3$ é igual a $|\det(A)|/2$, em que

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Sugestão: Marque os pontos $P_1 = (x_1, y_1, 1)$, $P_2 = (x_2, y_2, 1)$, $P_3 = (x_3, y_3, 1)$ e $P_1' = (x_1, y_1, 0)$. O volume do paralelepípedo determinado por P_1, P_2, P_3 e P_1' é dado por $|\overrightarrow{P_1P_1'} \cdot \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}|$. Mas, a altura deste paralelepipedo é igual a 1. Assim, o seu volume é igual à área da base que é o paralelogramo determinado por P_1, P_2 e P_3. Observe que $\overrightarrow{OP_1'}, \overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ são paralelos ao plano xy.)

3.2.30. Sejam U_1, U_2 e U_3 três vetores unitários mutuamente ortogonais. Se $A = [\, U_1 \; U_2 \; U_3 \,]$ é uma matriz 3×3 cujas colunas são os vetores U_1, U_2 e U_3, então A é invertível e $A^{-1} = A^t$. (Sugestão: mostre que $A^t A = I_3$.)

Teste do Capítulo

---

1. Mostre que os pontos $A = (4, 0, 1)$, $B = (5, 1, 3)$, $C = (3, 2, 5)$, $D = (2, 1, 3)$ são vértices de um paralelogramo. Calcule a sua área.

---

2. Dado o triângulo de vértices $A = (0, 1, -1)$, $B = (-2, 0, 1)$ e $C = (1, -2, 0)$, determine a medida da altura relativa ao lado BC.

---

3. Sejam U e V vetores no espaço, com $V \neq \vec{0}$.

   (a) Determine o número α, tal que $U - \alpha V$ seja ortogonal a V.

   (b) Mostre que $(U + V) \times (U - V) = 2V \times U$.

---

4. Determine x para que $A = (x, 1, 2)$, $B = (2, -2, -3)$, $C = (5, -1, 1)$ e $D = (3, -2, -2)$ sejam coplanares.

Capítulo 4

Retas e Planos

4.1 Equações de Retas e Planos

4.1.1 Equação do Plano

Existe uma analogia entre uma reta no plano e um plano no espaço. No plano, a equação de uma reta é determinada se forem dados sua inclinação e um de seus pontos. No espaço, a inclinação de um plano é dada por um vetor perpendicular a ele e a equação de um plano é determinada se são dados um vetor perpendicular a ele e um de seus pontos.

Proposição 4.1. *A equação de um plano π que passa por um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e é perpendicular ao vetor $N = (a, b, c)$ é*

$$ax + by + cz + d = 0\,, \tag{4.1}$$

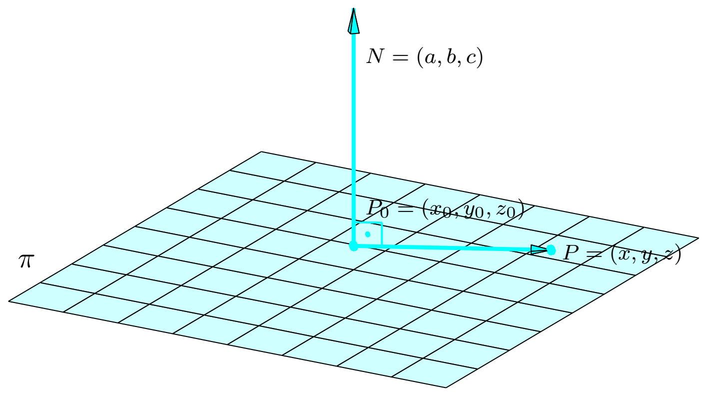


Figura 4.1: Plano perpendicular a $N = (a, b, c)$ e que passa por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

em que $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$. *A equação (4.1) é chamada* **equação geral** *do plano* π *e o vetor* N *é chamado* **vetor normal** *do plano.*

Demonstração. Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence ao plano π se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ for perpendicular ao vetor N, ou seja,

$$N \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0\,. \tag{4.2}$$

Como, $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, a equação (4.2) pode ser reescrita como

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

ou seja,

$$ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0\,.$$

$\square$

Exemplo 4.1. Vamos encontrar a equação do plano π que passa pelo ponto $P_0 = (3, -1, 7)$ e é perpendicular ao vetor $N = (4, 2, -5)$. Da proposição anterior, a equação do plano é da forma

$$ax + by + cz + d = 0\,,$$

em que os coeficientes de x, y e z são as componentes do vetor normal, ou seja, $a = 4$, $b = 2$ e $c = -5$. Assim, a equação de π é da forma

$$4x + 2y - 5z + d = 0\,.$$

Para determinar o coeficiente d, basta usarmos o fato de que $P_0 = (3, -1, 7)$ pertence a π. Mas, o ponto P_0 pertence a π se, e somente se, as suas coordenadas satisfazem a equação de π, ou seja,

$$4 \cdot 3 + 2(-1) - 5 \cdot 7 + d = 0\,.$$

Logo, $d = -12 + 2 + 35 = 25$. Finalmente, a equação do plano π é

$$4x + 2y - 5z + 25 = 0\,.$$

No plano, a equação de uma reta é determinada se forem dados dois pontos da reta. Analogamente, no espaço, a equação de um plano é determinada se são dados três pontos P_1, P_2 e P_3 não colineares (isto é, não pertencentes a uma mesma reta). Com os três pontos podemos "formar" os vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ (Figura 4.2).

Neste caso temos pelo menos duas maneiras de encontrarmos a equação do plano. Uma delas é observando que o produto vetorial $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}$ é perpendicular ao plano, ou seja, é um vetor normal ao plano. Assim, podemos tomar $N = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}$. Desta forma temos um ponto do plano e um vetor normal ao plano e aplicamos a técnica do exemplo anterior. A outra, é observando que com um ponto $P = (x, y, z)$ qualquer do plano, temos três vetores paralelos ao plano: $\overrightarrow{P_1P} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$. Como vimos anteriormente (Corolário 3.8 na página 139), os três vetores são coplanares se, e somente se, o produto misto entre eles é zero, ou seja,

$$\overrightarrow{P_1P} \cdot (\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}) = \det \begin{bmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix} = 0, \tag{4.3}$$

em que $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = \overrightarrow{P_1P_2}$ e $(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1) = \overrightarrow{P_1P_3}$. Assim, um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a um plano π que passa pelos pontos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ (não colineares) se, e somente se, a equação (4.3) é verdadeira. Isto pode ser usado para determinar a equação de um plano como mostra o próximo exemplo.

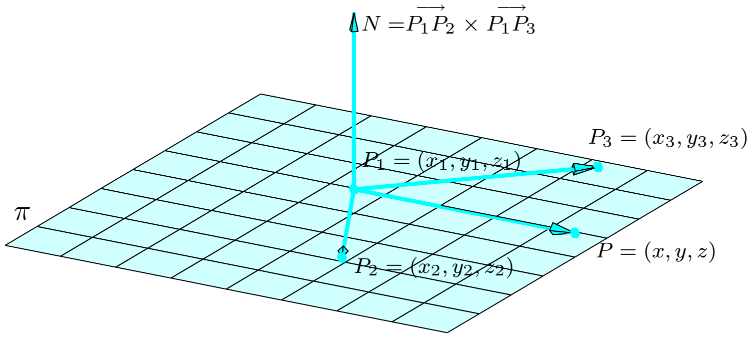


Figura 4.2: Plano que passa por três pontos

Exemplo 4.2. Vamos encontrar a equação do plano π que passa pelos pontos $P_1 = (1, 2, -1)$, $P_2 = (2, 3, 1)$ e $P_3 = (3, -1, 2)$. Com os três pontos podemos "formar" os vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$. Pelo Corolário 3.8 na página 139, um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a π se, e somente se,

$$\overrightarrow{P_1P} \cdot (\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}) = 0\,.$$

Mas,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P} &= (x-1, y-2, z-(-1)),\\ \overrightarrow{P_1P_2} &= (1, 1, 2),\\ \overrightarrow{P_1P_3} &= (2, -3, 3).\end{aligned}$$

Então, a equação do plano é

$$\det \begin{bmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix} = 9(x-1) + (y-2) - 5(z+1) = 9x + y - 5z - 16 = 0\,.$$

Alternativamente, podemos encontrar a equação do plano da seguinte forma. O vetor $N = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (9, 1, -5)$ é um vetor normal ao plano. Assim, a equação do plano é da forma

$$9x + y - 5z + d = 0,$$

em que os coeficientes de x, y e z são as componentes do vetor N. Para determinar o coeficiente d, vamos usar o fato de que o ponto $P_1 = (1, 2, -1)$ pertence ao plano π. Mas, o ponto P_1 pertence a π se, e somente se, as suas coordenadas satisfazem a equação de π, ou seja,

$$9 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 5 \cdot (-1) + d = 0\,.$$

Logo, $d = -9 - 2 - 5 = -16$. Finalmente, a equação do plano π é $9x + y - 5z - 16 = 0$.

A equação do plano também é determinada se ao invés de serem dados três pontos, forem dados um ponto P_1 e dois vetores paralelos ao plano, $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$, desde que eles sejam não paralelos entre si.

Neste caso temos novamente pelo menos duas maneiras de encontrarmos a equação do plano. Uma delas é observando que o vetor $N = V \times W$ é um vetor normal ao plano. Desta forma temos um ponto do plano e um vetor normal ao plano. A outra é observando que temos três vetores paralelos ao plano: $\overrightarrow{P_1P} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, V e W. Como vimos anteriormente (Corolário 3.8 na página 139), os três vetores são coplanares se, e somente se, o produto misto entre eles é zero, ou seja,

$$\overrightarrow{P_1P} \cdot (V \times W) = \det \begin{bmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = 0\,. \tag{4.4}$$

Assim, um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a um plano π que passa pelo ponto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e é paralelo aos vetores $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$ (não paralelos) se, e somente se, a equação (4.4) é verdadeira.

Observação. Não faz sentido dizer que um vetor pertence a um plano. Pois, por um lado, um plano é um conjunto de pontos e por outro, os vetores são "livres", podem ser "colocados" em qualquer ponto. O correto é dizer que um vetor é paralelo a um plano.

4.1.2 Equações da Reta

Vamos supor que uma reta r é paralela a um vetor $V = (a, b, c)$ não nulo e que passa por um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a reta r se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é paralelo

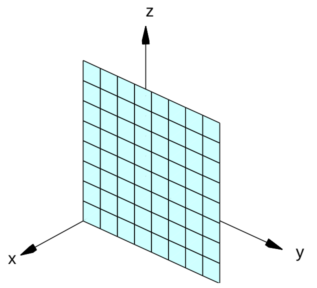


Figura 4.3: Plano $ax = -d$

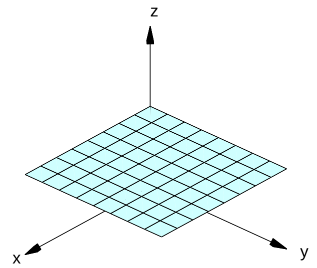


Figura 4.4: Plano $cz = -d$

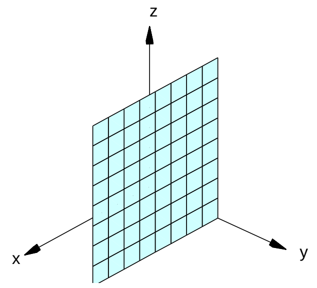


Figura 4.5: Plano $by = -d$

ao vetor V, isto é, se o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é um múltiplo escalar de V, ou seja,

$$\overrightarrow{P_0P} = t\,V\,. \tag{4.5}$$

Em termos de componentes, (4.5) pode ser escrito como

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (ta, tb, tc).$$

Logo, $x - x_0 = t\,a$, $y - y_0 = t\,b$ e $z - z_0 = t\,c$. Isto prova o resultado seguinte.

Proposição 4.2. *As equações*

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_0 + t\,a \\ y & = & y_0 + t\,b \\ z & = & z_0 + t\,c \end{array}\right. \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R} \tag{4.6}$$

são de uma reta r que passa por um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e é paralela ao vetor $V = (a, b, c)$. As equações (4.6) são chamadas **equações paramétricas da reta** *r. O vetor $V = (a, b, c)$ é chamado* **vetor diretor da reta** *r.*

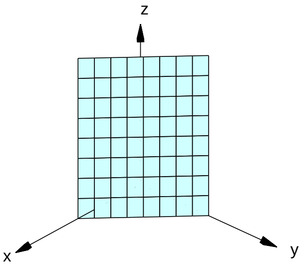


Figura 4.6: Plano $ax+by=-d$

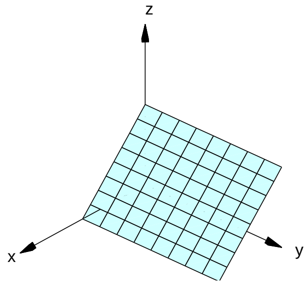


Figura 4.7: Plano $ax+cz=-d$

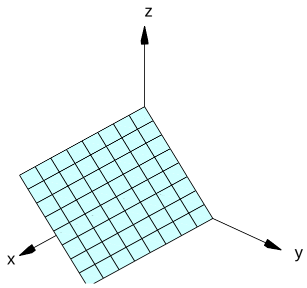


Figura 4.8: Plano $by+cz=-d$

O parâmetro t pode ser interpretado como o instante de tempo, se o ponto $P = (x, y, z)$ descreve o movimento de uma partícula em movimento retilíneo uniforme com vetor velocidade $V = (a, b, c)$. Observe que para $t = 1$, $P = (x, y, z) = (x_0 + a, y_0 + b, z_0 + c)$, para $t = 2$, $P = (x, y, z) = (x_0 + 2a, y_0 + 2b, z_0 + 2c)$ e assim por diante.

As equações (4.6), podem ser reescritas como $(x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$.

Observação. Não faz sentido dizer que o vetor está contido na reta. Por um lado, a reta é um conjunto de pontos e por outro um vetor não tem posição fixa.

Exemplo 4.3. A reta que passa por $P_0 = (1, 2, 3)$ e é paralela ao vetor $V = (4, 5, -7)$ tem equações

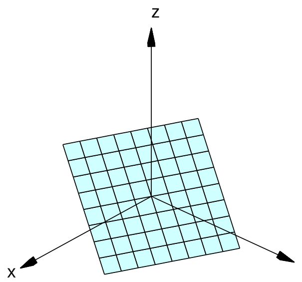


Figura 4.9: Plano $ax + by + cz = 0$

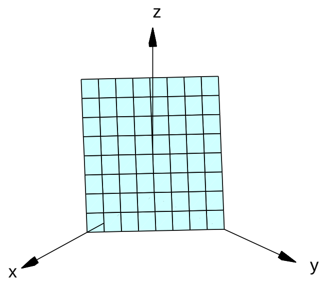


Figura 4.10: Plano $ax + by + cz + d = 0$

paramétricas

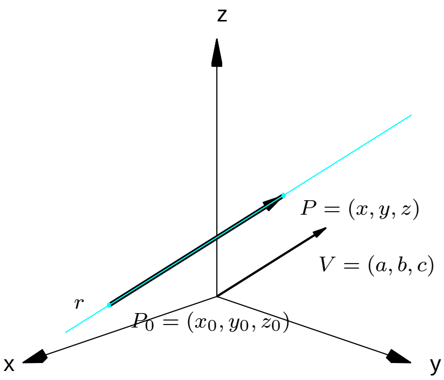
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1 + 4\,t \\ y & = & 2 + 5\,t \\ z & = & 3 - 7\,t \end{array} \right. \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}$$

Se todas componentes do vetor diretor da reta r são não nulos, podemos resolver cada equação em (4.6) para t e igualar os resultados obtendo o que chamamos de **equações na forma simétrica** de r:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.}$$

No Exemplo 4.3 as equações de r na forma simétrica são:

$$\frac{x - 1}{4} = \frac{y - 2}{5} = \frac{3 - z}{7}\,.$$



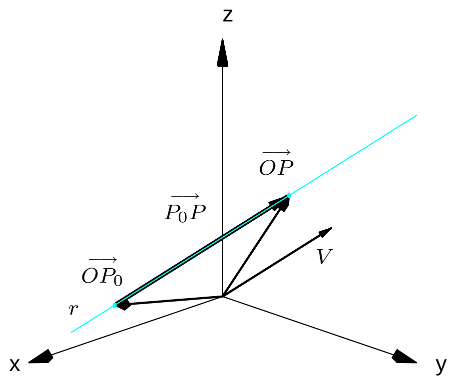


Figura 4.11: Reta paralela ao vetor $V = (a, b, c)$

Exemplo 4.4. Vamos encontrar as equações paramétricas da reta r que passa pelos pontos $P_1 = (2, 4, -1)$ e $P_2 = (5, 0, 7)$. O vetor

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (5 - 2, 0 - 4, 7 - (-1)) = (3, -4, 8)$$

é paralelo a r e o ponto $P_1 = (2, 4, -1)$ pertence a r. Portanto, as equações paramétricas de r são

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 + 3\,t \\ y & = & 4 - 4\,t \\ z & = & -1 + 8\,t \end{array}\right. \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Podemos também encontrar a interseção da reta r com os planos coordenados xy, yz e xz. A equação do plano xy é $z = 0$, do plano yz é $x = 0$ e do plano xz é $y = 0$. Substituindo $z = 0$ nas equações de r, obtemos $t = \frac{1}{8}$, $x = \frac{19}{8}$ e $y = \frac{7}{2}$, ou seja, o ponto de interseção de r com o plano xy é

$$(x, y, z) = (19/8, 7/2, 0)\,.$$

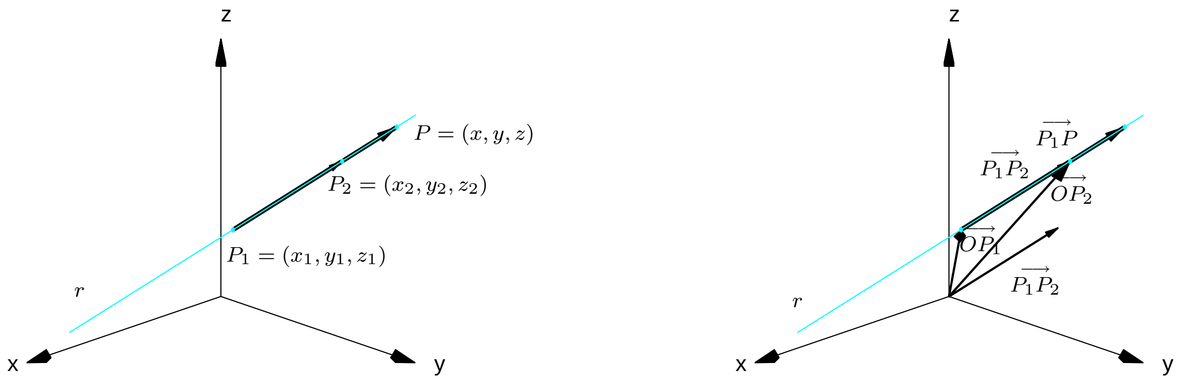


Figura 4.12: Reta que passa pelos pontos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$

De forma análoga, encontramos que $(x, y, z) = (0, \frac{20}{3}, -\frac{19}{3})$ é o ponto de interseção de r com o plano yz e $(x, y, z) = (5, 0, 7)$ é o ponto de interseção de r com o plano xz.

Exemplo 4.5. Vamos encontrar as equações paramétricas da reta r, interseção dos planos

$$\begin{array}{lrl} \pi_1 : & 3x - y + z & = 0\,, \\ \pi_2 : & x + 2y - z & = 1\,. \end{array}$$

Os vetores normais destes planos são

$$N_1 = (3, -1, 1) \text{ e } N_2 = (1, 2, -1)\,.$$

A reta r está contida em ambos os planos, portanto é perpendicular a ambos os vetores normais (Figura 4.13). Assim, a reta r é paralela ao produto vetorial $N_1 \times N_2$ (Teorema 3.5 (c) na página

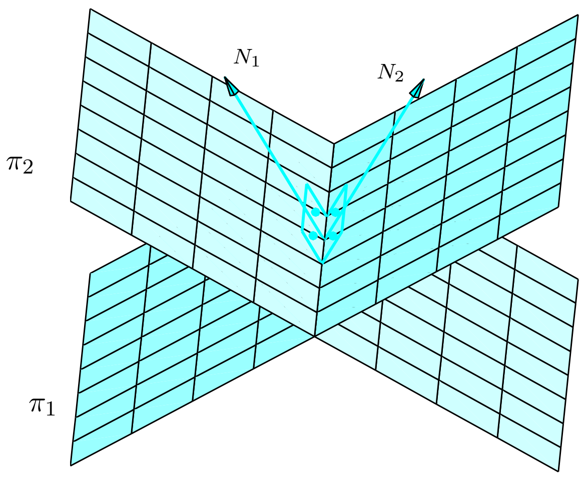


Figura 4.13: Reta interseção de dois planos

131).

$$N_1 \times N_2 = \left(\det\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, -\det\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \det\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\right) = (-1, 4, 7)\,.$$

Assim, $V = N_1 \times N_2 = (-1, 4, 7)$ é um vetor diretor de r. Agora, precisamos encontrar um ponto da reta r. Este ponto é uma solução particular do sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} 3x & - & y & + & z & = 0 \\ x & + & 2y & - & z & = 1 \end{array}\right. \tag{4.7}$$

para isto, atribuimos um valor a uma das incógnitas (neste exemplo podemos fazer $x = 0$) e resolvemos o sistema obtido, que é de duas equações e duas incógnitas

$$\begin{cases} -y & + & z = 0 \\ 2y & - & z = 1 \end{cases}$$

Obtemos então, $y = 1$ e $z = 1$, ou seja, o ponto $P_0 = (0, 1, 1)$ é um ponto da reta r, pois é uma solução particular do sistema (4.7). Assim, as equações paramétricas de r são

$$\begin{cases} x &=& 0+ & (-1)\,t &=& -t \\ y &=& 1+ & 4\,t &=& 1+4t \\ z &=& 1+ & 7\,t &=& 1+7t \end{cases} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{4.8}$$

Alternativamente, podemos encontrar as equações paramétricas de r determinando a solução geral do sistema (4.7). Para isto devemos escalonar a matriz do sistema (4.7):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Vamos escolher para pivô o elemento de posição 2 1. Precisamos "colocá-lo" na primeira linha, para isto, trocamos a 2ª linha com a 1ª.

$\boxed{\text{1ª linha} \longleftrightarrow \text{2ª linha}}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Agora, precisamos "zerar" o outro elemento da 1ª coluna, que é a coluna do pivô, para isto, adicionamos à 2ª linha, -3 vezes a 1ª linha.

$\boxed{-3{*}\text{1ª linha} + \text{2ª linha} \longrightarrow \text{2ª linha}}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 4 & -3 \end{array}\right]$$

Agora, já podemos obter facilmente a solução geral do sistema dado, já que ele é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & -7y & + & 4z & = & -3 \end{cases}$$

A variável z é uma variável livre. Podemos dar a ela um valor arbitrário, digamos t, para $t \in \mathbb{R}$ qualquer. Assim, a solução geral do sistema dado é

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{7} - \frac{1}{7}\,t \\ y & = & \frac{3}{7} + \frac{4}{7}\,t \\ z & = & t \end{array}\right. \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{4.9}$$

Estas equações são diferentes das equações (4.8), mas representam a mesma reta, pois os vetores diretores obtidos das duas equações são paralelos e o ponto $P_0 = (0,1,1)$ satisfaz também as equações (4.9). Poderíamos dizer que (4.8) e (4.9) representam retas coincidentes.

Exercícios Numéricos (respostas na página 328)

4.1.1. Ache a equação do plano paralelo ao plano $2x-y+5z-3=0$ e que passa por $P=(1,-2,1)$.

4.1.2. Encontre a equação do plano que passa pelo ponto $P=(2,1,0)$ e é perpendicular aos planos $x+2y-3z+2=0$ e $2x-y+4z-1=0$.

4.1.3. Encontrar a equação do plano que passa pelos pontos $P=(1,0,0)$ e $Q=(1,0,1)$ e é perpendicular ao plano $y=z$.

4.1.4. Dadas as retas

$$r: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} = z \qquad \text{e} \qquad s: x-2 = y = z\,,$$

obtenha uma equação geral para o plano determinado por r e s.

4.1.5. Sejam $P=(4,1,-1)$ e $r: (x,y,z) = (2,4,1) + t\,(1,-1,2)$.

(a) Mostre que $P \notin r$;

(b) Obtenha uma equação geral do plano determinado por r e P.

4.1.6. Dados os planos $\pi_1 : x - y + z + 1 = 0$ e $\pi_2 : x + y - z - 1 = 0$, determine o plano que contém $\pi_1 \cap \pi_2$ e é ortogonal ao vetor $(1, 1, 1)$.

4.1.7. Quais dos seguintes pares de planos se cortam segundo uma reta?

(a) $x + 2y - 3z - 4 = 0$ e $x - 4y + 2z + 1 = 0$;

(b) $2x - y + 4z + 3 = 0$ e $4x - 2y + 8z = 0$;

(c) $x - y = 0$ e $x + z = 0$.

4.1.8. Encontre as equações da reta que passa pelo ponto $Q = (1, 2, 1)$ e é perpendicular ao plano $x - y + 2z - 1 = 0$.

4.1.9. Ache a equação da reta que passa pelo ponto $P = (1, 0, 1)$ e é paralela aos planos $2x + 3y + z + 1 = 0$ e $x - y + z = 0$.

4.1.10. Seja r a reta determinada pela interseção dos planos $x + y - z = 0$ e $2x - y + 3z - 1 = 0$. Ache a equação do plano que passa por $A = (1, 0, -1)$ e contém a reta r.

4.1.11. Sejam r e s retas reversas passando por $A = (0, 1, 0)$ e $B = (1, 1, 0)$ e por $C = (-3, 1, -4)$ e $D = (-1, 2, -7)$, respectivamente. Obtenha uma equação da reta concorrente com r e s e paralela ao vetor $V = (1, -5, -1)$.

4.1.12. (a) Mostre que os planos $2x - y + z = 0$ e $x + 2y - z = 1$ se interceptam segundo uma reta r;

(b) Ache a equação da reta que passa pelo ponto $A = (1, 0, 1)$ e intercepta a reta r ortogonalmente.

Exercícios usando o MATLAB

`>> V=[v1,v2,v3]` cria um vetor `V`, usando as componentes numéricas `v1, v2, v3`. Por exemplo `>> V=[1,2,3]` cria o vetor $V = (1, 2, 3)$;

`>> V+W` é a soma de `V` e `W`; `>> V-W` é a diferença `V` menos `W`; `>> num*V` é o produto do vetor `V` pelo escalar `num`;

`>> subs(expr,x,num,)` substitui `x` por `num` na expressão `expr`;

`>> solve(expr)` determina a solução da equação `expr=0`;

Comandos numéricos do pacote GAAL:

`>> no(V)` calcula a norma do vetor `V`.

`>> pe(V,W)` calcula o produto escalar do vetor `V` pelo vetor `W`.

`>> pv(V,W)` calcula o produto vetorial do vetor `V` pelo vetor `W`.

Comandos gráficos do pacote GAAL:

`>> lin(P,V)` desenha a reta que passa por `P` com direção `V`.

`>> lin(P1,V1,P2,V2)` desenha retas que passam por `P1, P2`, direções `V1, V2`.

`>> plan(P,N)` desenha o plano que passa por `P` com normal `N`.

`>> plan(P1,N1,P2,N2)` desenha planos que passam por `P1, P2`, normais `N1, N2`.

`>> plan(P1,N1,P2,N2,P3,N3)` desenha planos que passam por `P1`, `P2` e `P3` com normais `N1`, `N2` e `N3`.

`>> poplan(P1,P2,N2)` desenha ponto `P1` e plano passando por `P2` com normal `N2`.

`>> poline(P1,P2,V2)` desenha ponto `P2` e reta passando por `P2` com direção `V2`.

>> `lineplan(P1,V1,P2,N2)` desenha reta passando por `P1` com direção `V1` e plano passando por `P2` com normal `N2`.

>> `axiss` reescala os eixos com a mesma escala.

>> `rota` faz uma rotação em torno do eixo z.

4.1.13. Digite no prompt `demog22`, (sem a vírgula!). Esta função demonstra as funções gráficas para visualização de retas e planos.

4.1.14. Use o MATLAB para resolver os **Exercícios Numéricos**

Exercício Teórico

4.1.15. Seja $ax + by + cz + d = 0$ a equação de um plano π que não passa pela origem e corta os três eixos.

(a) Determine a interseção de π com os eixos;

(b) Se $P_1 = (p_1, 0, 0)$, $P_2 = (0, p_2, 0)$ e $P_3 = (0, 0, p_3)$ são as interseções de π com os eixos, a equação de π pode ser posta sob a forma

$$\frac{x}{p_1} + \frac{y}{p_2} + \frac{z}{p_3} = 1\,.$$

4.2 Ângulos e Distâncias

4.2.1 Ângulos

Ângulo entre Retas

Com duas retas no espaço pode ocorrer um dos seguintes casos:

(a) As retas se interceptam em um ponto, ou seja, são **concorrentes**;

(b) As retas são paralelas (ou coincidentes);

(c) As retas são **reversas**, isto é, não são paralelas mas também não se interceptam.

Se as retas se interceptam, então elas determinam quatro ângulos, dois a dois opostos pelo vértice. O ângulo entre elas é definido como sendo o menor destes ângulos.

Se as retas r_1 e r_2 são reversas, então por um ponto P de r_1 passa um reta r_2' que é paralela a r_2. O ângulo entre r_1 e r_2 é definido como sendo o ângulo entre r_1 e r_2' (Figura 4.14).

Se as retas são paralelas o ângulo entre elas é igual a zero.

Em qualquer dos casos, se V_1 e V_2 são vetores paralelos a r_1 e r_2 respectivamente, então o cosseno do ângulo entre elas é

$$\cos(r_1, r_2) = |\cos\theta|\,,$$

em que θ é o ângulo entre V_1 e V_2.

Lembrando que da definição de produto escalar (Definição 3.1 na página 122), podemos encontrar o cosseno do ângulo entre dois vetores, ou seja,

$$\cos\theta = \frac{V_1 \cdot V_2}{||V_1||\,||V_2||}\,.$$

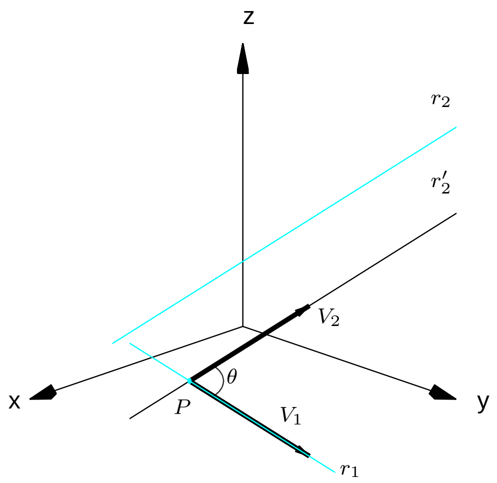


Figura 4.14: O Ângulo entre duas retas reversas r_1 e r_2

Isto prova o resultado seguinte.

Proposição 4.3. *Sejam duas retas*

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_1 + t\, a_1 \\ y & = & y_1 + t\, b_1 \\ z & = & z_1 + t\, c_1 \end{array} \right. \qquad r_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_2 + t\, a_2 \\ y & = & y_2 + t\, b_2 \\ z & = & z_2 + t\, c_2 \end{array} \right. \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

O cosseno do ângulo entre r_1 *e* r_2 *é*

$$\cos(r_1, r_2) = |\cos\theta| = \frac{|V_1 \cdot V_2|}{||V_1||\,||V_2||},$$

em que $V_1 = (a_1, b_1, c_1)$ *e* $V_2 = (a_2, b_2, c_2)$.

Exemplo 4.6. Encontrar o ângulo entre a reta

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & - & z & + & 1 & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & & & = & 0 \end{array} \right.$$

e a reta

$$r_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 2\,t \\ y & = & 1 - t \\ z & = & 2 + 3\,t \end{array} \right. \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Vamos encontrar vetores paralelos a estas retas. A reta r_1 é dada como a interseção de pois planos, portanto o produto vetorial dos vetores normais dos dois planos é paralelo a r_1.

$$N_1 = (1, 1, -1),$$
$$N_2 = (2, -1, 1),$$
$$V_1 = N_1 \times N_2 = \left(\det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \right) = (0, -3, -3)$$

é paralelo a r_1 e $V_2 = (2, -1, 3)$ é paralelo a r_2. Assim,

$$\begin{aligned} \cos(r_1, r_2) &= \frac{|V_1 \cdot V_2|}{||V_1||\,||V_2||} = \frac{|0 \cdot 2 + (-3)(-1) + (-3) \cdot 3|}{\sqrt{0^2 + (-3)^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} \\ &= \frac{|-6|}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{7}}. \end{aligned}$$

Portanto, o ângulo entre r_1 e r_2 é

$$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) \approx 67^\circ.$$

Ângulo entre Planos

Sejam π_1 e π_2 dois planos com vetores normais $N_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $N_2 = (a_2, b_2, c_2)$, respectivamente. O ângulo entre π_1 e π_2 é definido como o ângulo entre duas retas perpendiculares a eles. Como toda reta perpendicular a π_1 tem N_1 como vetor diretor e toda reta perpendicular a π_2 tem N_2 como vetor diretor, então o cosseno do ângulo entre eles é dado por

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = |\cos\theta|\,,$$

em que θ é o ângulo entre os vetores normais N_1 e N_2 de π_1 e π_2, respectivamente (Figura 4.15).

Portanto, o cosseno do ângulo entre π_1 e π_2 é $\cos(\pi_1, \pi_2) = \dfrac{|N_1 \cdot N_2|}{||N_1||\,||N_2||}$. O que prova o resultado seguinte.

Proposição 4.4. *Sejam dois planos*

$$\begin{aligned} \pi_1 : \quad a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0\,, \\ \pi_2 : \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

O cosseno do ângulo entre π_1 e π_2 é

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = \frac{|N_1 \cdot N_2|}{||N_1||\,||N_2||}\,,$$

em que $N_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $N_2 = (a_2, b_2, c_2)$ são os vetores normais de π_1 e π_2, respectivamente.

Dois planos π_1 e π_2 ou são paralelos ou se cortam segundo um reta. Eles são paralelos se, e somente se, os vetores normais de π_1 e π_2, são paralelos, ou seja, um vetor é um múltiplo escalar do outro. Assim, π e π_2 são paralelos se, e somente se, o ângulo entre eles é igual a zero.

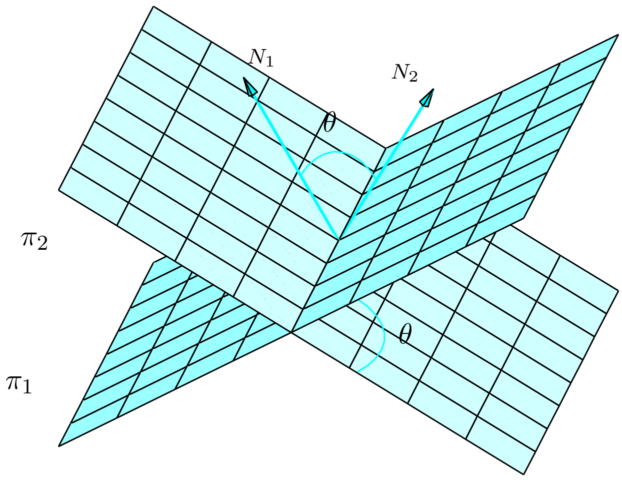


Figura 4.15: Ângulo entre dois planos

Exemplo 4.7. Determinar o ângulo entre os planos cujas equações são

$$\begin{aligned} \pi_1 : \quad x + y + z &= 0\,, \\ \pi_2 : \quad x - y - z &= 0\,. \end{aligned}$$

Os vetores normais a estes planos são os vetores cujas componentes são os coeficientes de x, y e z nas equações dos planos, ou seja,

$$N_1 = (1, 1, 1) \text{ e } N_2 = (1, -1, -1)\,.$$

Assim, o cosseno do ângulo entre π_1 e π_2 é

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = \frac{|N_1 \cdot N_2|}{||N_1||\,||N_2||} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}\,.$$

Portanto, o ângulo entre eles é

$$\arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70^\circ\,.$$

O próximo exemplo mostra como encontrar a equação da reta que é perpendicular a duas retas reversas.

Exemplo 4.8. Achar as equações da reta r que intercepta as retas

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1+t \\ y & = & 2+3\,t \\ z & = & 4\,t \end{array} \right. \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

e

$$r_2 : \; x+1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{3}\,.$$

e é perpendicular a ambas.

Um ponto qualquer da reta r_1 é descrito por $P_{r_1} = (1+t, 2+3t, 4t)$ e um ponto qualquer da reta r_2 é da forma $P_{r_2} = (-1+s, 1+2s, -2+3s)$. O vetor $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (-2+s-t, -1+2s-3t, -2+3s-4t)$ "liga" um ponto qualquer de r_1 a um ponto qualquer de r_2. Vamos determinar t e s tais que o vetor $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}$ seja perpendicular ao vetor diretor de r_1, $V_1 = (1,3,4)$, e ao vetor diretor de r_2, $V_2 = (1,2,3)$, ou seja, temos que resolver o sistema

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} \cdot V_1 & = & -13+19s-26t & = & 0 \\ \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} \cdot V_2 & = & -10+14s-19t & = & 0 \end{array} \right.$$

A solução deste sistema é $t = 8/3$, $s = 13/3$. Logo $P_{r_1} = (11/3, 10, 32/3)$ e $P_{r_2} = (10/3, 29/3, 11)$ e as equações paramétricas da reta procurada são

$$r_3 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 11/3-t \\ y & = & 10-t \\ z & = & 32/3+t \end{array} \right. \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

4.2.2 Distâncias

Distância de Um Ponto a Um Plano

Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer e $\pi \; : \; ax + by + cz + d = 0$ um plano. A distância de P_0 a π é definida como sendo a distância de P_0 até o ponto de π mais próximo de P_0.

Dado um ponto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ de π, podemos decompor o vetor $\overrightarrow{P_1P_0}$ em duas parcelas, uma na direção do vetor normal de π, $N = (a, b, c)$ e outra perpendicular a ele. A componente na direção do vetor N é a projeção ortogonal de $\overrightarrow{P_1P_0}$ em N. Como vemos na Figura 4.16, a distância de P_0 a π é igual à norma da projeção, ou seja,

$$\mathrm{dist}(P_0, \pi) = ||\mathrm{proj}_N \; \overrightarrow{P_1P_0} \; || \, .$$

Mas, pela Proposição 3.4 na página 127, temos que

$$||\mathrm{proj}_N \; \overrightarrow{P_1P_0} \; || = \left\| \left(\frac{\overrightarrow{P_1P_0} \cdot N}{||N||^2} \right) N \right\| = \frac{| \; \overrightarrow{P_1P_0} \cdot N|}{||N||} \, .$$

O que prova o resultado seguinte.

Proposição 4.5. *Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer e $\pi : \; ax + by + cz + d = 0$ um plano. A distância de P_0 a π é*

$$\mathrm{dist}(P_0, \pi) = ||\mathrm{proj}_N \; \overrightarrow{P_1P_0} \; || = \frac{| \; \overrightarrow{P_1P_0} \cdot N|}{||N||} \, ,$$

em que $N = (a, b, c)$ e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ é um ponto de π (isto é, um ponto que satisfaz a equação de π).

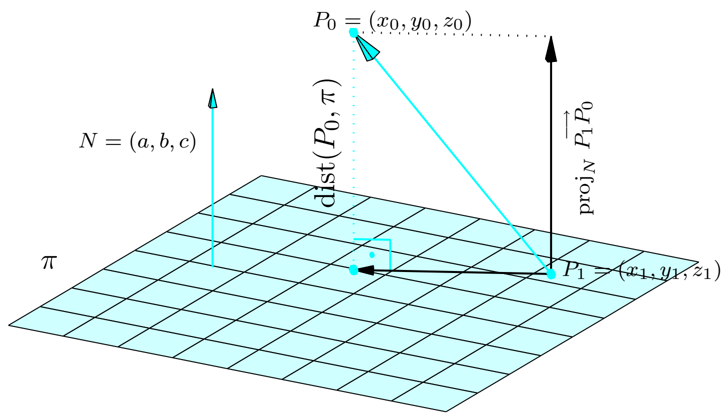


Figura 4.16: Distância de um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a um plano π

Exemplo 4.9. Calcular a distância entre o ponto $P_0 = (1, 2, 3)$ ao plano

$$\pi : x - 2y + z - 1 = 0.$$

Fazendo $z = 0$ e $y = 0$ na equação de π, obtemos $x = 1$. Assim, o ponto $P_1 = (1, 0, 0)$ pertence a π.

$$\overrightarrow{P_1P_0} = (1 - 1, 2 - 0, 3 - 0) = (0, 2, 3)$$

e

$$N = (1, -2, 1)\,.$$

Assim,

$$\text{dist}(P_0, \pi) = ||\text{proj}_N \overrightarrow{P_1P_0}\,|| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot N|}{||N||} = \frac{|0 \cdot 1 + 2(-2) + 3 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Distância de Um Ponto a Uma Reta

Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer e r uma reta. A distância de P_0 a r é definida como a distância de P_0 ao ponto de r mais próximo de P_0.

Dado um ponto qualquer $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ de r podemos decompor o vetor $\overrightarrow{P_1P_0}$ em duas parcelas, uma na direção do vetor diretor V de r e outra perpendicular a ele. A componente na direção do vetor V é a projeção ortogonal de $\overrightarrow{P_1P_0}$ em V. Como vemos na Figura 4.17,

$$(\text{dist}(P_0, r))^2 + ||\text{proj}_V \overrightarrow{P_1P_0}\,||^2 = ||\overrightarrow{P_1P_0}\,||^2,$$

ou seja,

$$(\text{dist}(P_0, r))^2 = ||\overrightarrow{P_1P_0}\,||^2 - ||\text{proj}_V \overrightarrow{P_1P_0}\,||^2. \tag{4.10}$$

Mas, pela Proposição 3.4 na página 127, temos que

$$||\text{proj}_V \overrightarrow{P_1P_0}\,||^2 = \left\| \left(\frac{\overrightarrow{P_1P_0} \cdot V}{||V||^2} \right) V \right\|^2 = \frac{(\overrightarrow{P_1P_0} \cdot V)^2}{||V||^2}.$$

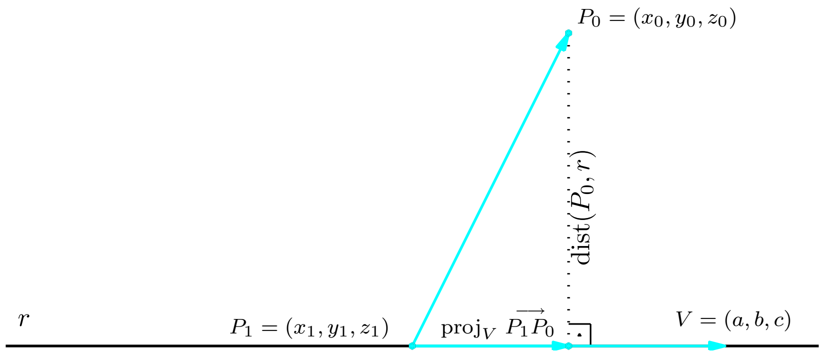


Figura 4.17: Distância de um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a uma reta r

Substituindo esta expressão em (4.10) e usando a definição do produto escalar na página 122 e da norma do produto vetorial na página 129 obtemos

$$\begin{aligned}(\mathrm{dist}(P_0, r))^2 &= ||\overrightarrow{P_1P_0}||^2 - \frac{(\overrightarrow{P_1P_0} \cdot V)^2}{||V||^2} = \frac{||\overrightarrow{P_1P_0}||^2||V||^2 - (\overrightarrow{P_1P_0} \cdot V)^2}{||V||^2} \\ &= \frac{||\overrightarrow{P_1P_0}||^2||V||^2 - ||\overrightarrow{P_1P_0}||^2||V||^2\cos^2\theta}{||V||^2} \\ &= \frac{||\overrightarrow{P_1P_0}||^2||V||^2\mathrm{sen}^2\theta}{||V||^2} = \frac{||\overrightarrow{P_1P_0} \times V||^2}{||V||^2}.\end{aligned}$$

Isto prova o resultado seguinte.

Proposição 4.6. *Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer e*

$$r : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_1 + t\,a \\ y & = & y_1 + t\,b \\ z & = & z_1 + t\,c \end{array} \right. \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}$$

uma reta. A distância de P_0 a r é

$$\mathrm{dist}(P_0, r) = \frac{||\overrightarrow{P_1P_0} \times V||}{||V||}.$$

em que $V = (a, b, c)$ é um vetor diretor e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ é um ponto da reta r.

Exemplo 4.10. Calcular a distância do ponto $P_0 = (1, -1, 2)$ à reta

$$r : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 + 2t \\ y & = & -t \\ z & = & 2 - 3t \end{array} \right. \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Um vetor diretor da reta r é $V = (2, -1, -3)$ e um ponto de r é $P_1 = (1, 0, 2)$. Assim,

$$\overrightarrow{P_1P_0} = (1 - 1, -1 - 0, 2 - 2) = (0, -1, 0)\,,$$

$$\overrightarrow{P_1P_0} \times V = (3, 0, 2)\,,$$

$$||\overrightarrow{P_1P_0} \times V|| = \sqrt{13} \;\text{ e }\; ||V|| = \sqrt{14}\,.$$

Portanto,

$$\mathrm{dist}(P_0, r) = \frac{||\overrightarrow{P_1P_0} \times V||}{||V||} = \sqrt{\frac{13}{14}}\,.$$

Distância entre Dois Planos

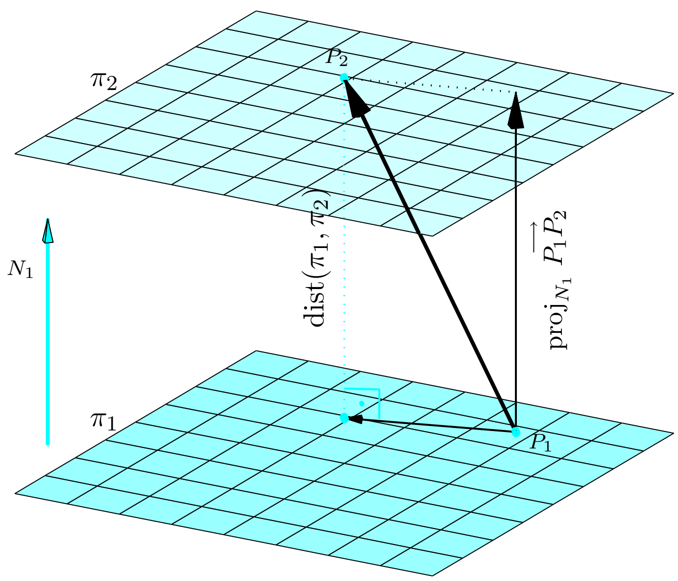


Figura 4.18: Distância entre dois planos

Sejam dois planos π_1 e π_2 quaisquer. A distância entre π_1 e π_2 é definida como a menor distância entre dois pontos, um de π_1 e outro de π_2.

Se os seus vetores normais **não** são paralelos, então os planos são concorrentes e neste caso a distância entre eles é zero. Se os seus vetores normais são paralelos, então os planos são paralelos (ou coincidentes) e a distância entre π_1 e π_2 é igual à distância entre um ponto de um deles, por exemplo P_2 de π_2, e o ponto de π_1, mais próximo de P_2 (Figura 4.18). Mas, esta distância é igual à distância de P_2 a π_1. Vamos ver isto em um exemplo.

Exemplo 4.11. Os planos $\pi_1 : x + 2y - 2z - 3 = 0$ e $\pi_2 : 2x + 4y - 4z - 7 = 0$ são paralelos, pois os seus vetores normais $N_1 = (1, 2, -2)$ e $N_2 = (2, 4, -4)$ são paralelos (um é múltiplo escalar do outro). Vamos encontrar a distância entre eles.

Vamos encontrar dois pontos quaisquer de cada um deles. Fazendo $z = 0$ e $y = 0$ em ambas as equações obtemos $x_1 = 3$ e $x_2 = 7/2$. Assim, $P_1 = (3, 0, 0)$ pertence a π_1 e $P_2 = (7/2, 0, 0)$ pertence a π_2. Portanto, pela Proposição 4.5 temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}(\pi_1, \pi_2) &= \mathrm{dist}(\pi_1, P_2) = ||\mathrm{proj}_{N_1} \overrightarrow{P_1P_2}\,|| = \frac{|\,\overrightarrow{P_1P_2} \cdot N_1|}{||N_1||} \\ &= \frac{|(7/2 - 3, 0 - 0, 0 - 0) \cdot (1, 2, -2)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|(1/2) \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0(-2)|}{\sqrt{9}} = \frac{1}{6}\,. \end{aligned}$$

Distância entre Duas Retas

Sejam r_1 e r_2 duas retas quaisquer. A distância entre r_1 e r_2 é definida como a menor distância entre dois pontos, um de r_1 e outro de r_2.

Para calcular a distância entre duas retas, vamos dividir em dois casos:

(a) Se os **vetores diretores são paralelos**, então as retas r_1 e r_2 são paralelas (ou coincidentes). Neste caso, a distância entre elas é igual à distância entre um ponto de r_2 e a reta r_1, ou vice-versa, entre um ponto de r_1 e a reta r_2 (Figura 4.19). Assim, pela Proposição 4.6 na página 175, temos que

$$\mathrm{dist}(r_1, r_2) = \mathrm{dist}(P_1, r_2) = \frac{||\,\overrightarrow{P_1P_2} \times V_2||}{||V_2||}\,, \tag{4.11}$$

em que P_1 e P_2 são pontos de r_1 e r_2 e V_1 e V_2 são vetores diretores de r_1 e r_2, respectivamente.

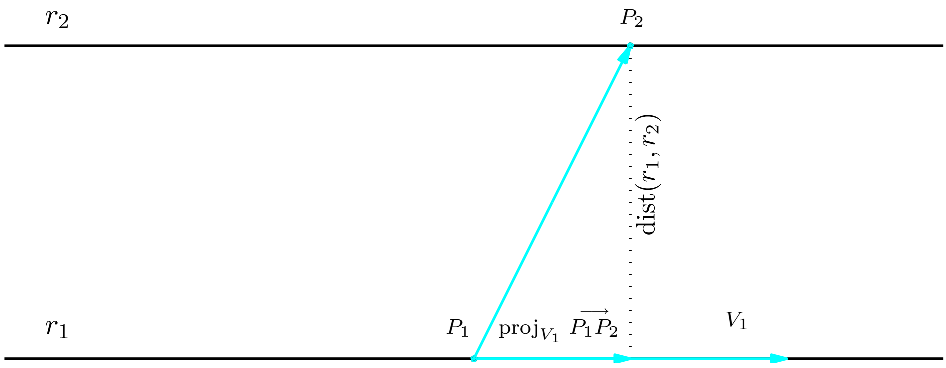


Figura 4.19: Distância entre duas retas paralelas

(b) Se **os vetores diretores não são paralelos**, então elas são reversas ou concorrentes. Os dois casos podem ser resolvidos da mesma forma. Estas retas definem dois planos paralelos (que podem ser coincidentes, no caso em que elas são concorrentes). Um é o plano que contém r_1 e é paralelo a r_2, vamos chamá-lo de π_1. O outro, contém r_2 e é paralelo a r_1, π_2. O vetor $N = V_1 \times V_2$, é normal (ou perpendicular) a ambos os planos, em que V_1 e V_2 são os vetores diretores de r_1 e r_2 respectivamente. Assim, a distância entre as retas é igual à distância entre estes dois planos (Figura 4.20), ou seja,

$$\text{dist}(r_1, r_2) = \text{dist}(\pi_1, \pi_2) = \text{dist}(\pi_1, P_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot N|}{||N||} = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (V_1 \times V_2)|}{||V_1 \times V_2||} \qquad (4.12)$$

em que P_1 e P_2 são pontos de r_1 e r_2 e V_1 e V_2 são vetores diretores de r_1 e r_2, respectivamente. Observe que se as retas são concorrentes a distância entre elas é zero, pois os vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$, V_1 e V_2 são coplanares e $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (V_1 \times V_2) = 0$ (Corolário 3.8 na página 139).

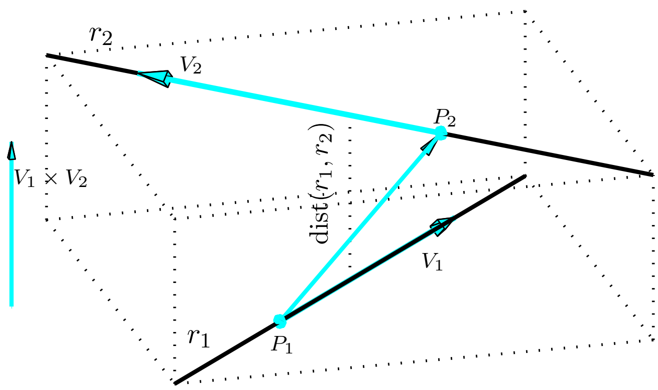


Figura 4.20: Distância entre duas retas reversas

Exemplo 4.12. Vamos determinar a distância entre as retas

$$r_1 : \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{-6}.$$

e

$$r_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1+2\,t \\ y & = & -t \\ z & = & 2-3\,t \end{array} \right. \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

As retas são paralelas, pois seus vetores diretores $V_1 = (4, -2, -6)$ e $V_2 = (2, -1, -3)$ (Exemplo 4.3 na página 155) são paralelos (um é um múltiplo escalar do outro, ou ainda as componentes correspondentes são proporcionais). Além disso, o ponto $P_1 = (1, -1, 2)$ pertence à reta r_1. Como dissemos acima, a distância de r_1 a r_2 é igual à distância entre um ponto de r_2 e a reta r_1 (Figura

4.19). Assim, pela Proposição 4.6 na página 175, temos que

$$\text{dist}(r_1, r_2) = \text{dist}(P_1, r_2) = \frac{||\overrightarrow{P_1P_2} \times V_2||}{||V_2||} = \sqrt{\frac{13}{14}}\,.$$

As contas são as mesmas do Exemplo 4.10 na página 175.

Exemplo 4.13. Determinar a distância entre as retas

$$r_1 : \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = z\,.$$

e

$$r_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} x &=& t \\ y &=& 2\,t \\ z &=& 1-t \end{array} \right. \quad \text{para qualquer } t \in \mathbb{R}.$$

As retas r_1 e r_2 são paralelas aos vetores $V_1 = (3, 2, 1)$ e $V_2 = (1, 2, -1)$ e passam pelos pontos $P_1 = (-1, 1, 0)$ e $P_2 = (0, 0, 1)$, respectivamente. As retas não são paralelas, pois seus vetores diretores não são paralelos (observe que a 1ª componente de V_1 é 3 vezes a 1ª componente de V_2, mas as 2ª's componentes são iguais). Logo,

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (0-(-1), 0-1, 1-0) = (1, -1, 1)\,.$$

Um vetor perpendicular a ambas as retas é

$$N = V_1 \times V_2 = (-4, 4, 4)\,.$$

Este vetor é normal aos planos π_1 (que contém r_1 e é paralelo a r_2) e π_2 (que contém r_2 e é paralelo a r_1) (veja a Figura 4.20). Assim,

$$\begin{aligned} \text{dist}(r_1, r_2) &= \text{dist}(\pi_1, \pi_2) = \text{dist}(\pi_1, P_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot N|}{||N||} \\ &= \frac{|1(-4) + (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 4|}{\sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 4^2}} = \frac{|-4|}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Exercícios Numéricos (respostas na página 329)

4.2.1. Considere os vetores $V = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $W = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $U = \vec{i} - 2\vec{j}$. Seja π um plano paralelo aos vetores W e U e r uma reta perpendicular ao plano π. Ache a projeção ortogonal do vetor V sobre a reta r, ou seja, a projeção ortogonal de V sobre o vetor diretor da reta r.

4.2.2. Encontrar o ângulo entre o plano $2x - y + z = 0$ e o plano que passa pelo ponto $P = (1, 2, 3)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

4.2.3. Seja π_1 o plano que passa pelos pontos $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (1, 1, 0)$ e π_2 o plano que passa pelos pontos $P = (0, 0, 1)$ e $Q = (0, 0, 0)$ e é paralelo ao vetor $\vec{i} + \vec{j}$. Ache o ângulo entre π_1 e π_2.

4.2.4. Ache uma reta que passa pelo ponto $(1, -2, 3)$ e que forma ângulos de 45^o e 60^o com os eixos x e y respectivamente.

4.2.5. Obtenha os vértices B e C do triângulo equilátero ABC, sendo $A = (1, 1, 0)$ e sabendo que o lado BC está contido na reta $r : (x, y, z) = t\,(0, 1, -1)$. (Sugestão: Determine os pontos P_r da reta r tais que $\overrightarrow{P_rA}$ faz ângulo de 60^o e 120^o com o vetor diretor da reta r)

4.2.6. Seja π o plano que passa pela origem e é perpendicular à reta que une os pontos $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, 1, 0)$. Encontre a distância do ponto $C = (1, 0, 1)$ ao plano π.

4.2.7. Seja r_1 a reta que passa pelos pontos $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, 2, 0)$, e r_2 a reta

$$x - 2 = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}.$$

(a) Encontre as equações da reta perpendicular às retas r_1 e r_2;

(b) Calcule a distância entre r_1 e r_2.

4.2.8. Dados $A = (0, 2, 1)$, $r : X = (0, 2, -2) + t\,(1, -1, 2)$, ache os pontos de r que distam $\sqrt{3}$ de A. A distância do ponto A à reta r é maior, menor ou igual a $\sqrt{3}$? Por que?

4.2.9. Dada a reta $r : X = (1, 0, 0) + t\,(1, 1, 1)$ e os pontos $A = (1, 1, 1)$ e $B = (0, 0, 1)$, ache o ponto de r equidistante de A e B.

4.2.10. Encontre a equação do lugar geométrico dos pontos equidistantes de $A = (1, -1, 2)$ e $B = (4, 3, 1)$. Este plano passa pelo ponto médio de AB? Ele é perpendicular ao segmento AB?

4.2.11. Considere as retas $(x, y, z) = t(1, 2, -3)$ e $(x, y, z) = (0, 1, 2) + s(2, 4, -6)$. Encontre a equação geral do plano que contem estas duas retas.

4.2.12. Ache as equações dos planos em $\mathbb{R}^3$ ortogonais ao vetor $(2, 2, 2)$, que distam $\sqrt{3}$ do ponto $(1, 1, 1)$.

4.2.13. Obtenha uma equação geral do plano π, que contém a reta

$$r : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & - & 5y & + & 7z & = & 0 \end{array} \right.$$

e forma com o plano $\pi_1 : x + z = 0$ um ângulo de 60^o.

Exercícios usando o MATLAB

4.2.14. Use o MATLAB para resolver os **Exercícios Numéricos**

Exercícios Teóricos

4.2.15. Prove que o lugar geométrico dos pontos do espaço que equidistam de dois pontos distintos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ é um plano que passa pelo ponto médio do segmento AB e é perpendicular a ele. Esse plano é chamado **plano mediador** do segmento AB.

4.2.16. Mostre que a distância de um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a um plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$ é

$$\mathrm{dist}(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,.$$

4.2.17. Mostre que a distância entre dois planos paralelos $\pi_1 : ax + by + cz + d_1 = 0$ e $\pi_2 : ax + by + cz + d_2 = 0$ é

$$\mathrm{dist}(\pi_1, \pi_2) = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,.$$

4.2.18. Mostre que a distância entre duas retas não paralelas $r_1 : (x, y, z) = (x_1 + ta_1, y_1 + tb_1, z_1 + tc_1)$ e $r_2 : (x, y, z) = (x_2 + ta_2, y_2 + tb_2, z_2 + tc_2)$ é

$$\frac{\left|\det\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}\right|}{\sqrt{\left(\det\begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix}\right)^2 + \left(\det\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}\right)^2 + \left(\det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\right)^2}}$$

Teste do Capítulo

1. Ache os pontos do plano $\pi : y = x$ que equidistam dos pontos $A = (1, 1, 0)$ e $B = (0, 1, 1)$.

2. Quais são as coordenadas do ponto P', simétrico do ponto $P = (1, 0, 0)$ em relação à reta $r : \ (x, y, z) = t(1, 1, 1)$?

3. (a) Encontre a equação do plano π que passa pelos pontos $A = (0, 0, -1)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (1, 0, 1)$.
   (b) Encontre a distância da origem ao plano π.

4. (a) Mostre que os planos $x - y = 0$ e $y - z = 1$ se interceptam segundo uma reta r.
   (b) Ache a equação do plano que passa pelo ponto $A = (1, 0, -1)$ e é perpendicular à reta r.

Capítulo 5

Espaços Euclidianos

5.1 Independência Linear

Já vimos que os vetores no plano são definidos por pares ordenados de números reais e que vetores no espaço são definidos por ternos ordenados de números reais. Muito do que estudamos sobre vetores no Capítulo 3 pode ser estendido para n-uplas de números reais, em que n pode ser um número inteiro positivo. Para cada n, o conjunto das n-uplas de números reais é chamado **espaço euclidiano**.

5.1.1 Os Espaços R-n

Definição 5.1. Para cada inteiro positivo n, o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é definido pelo conjunto de todas as n-uplas ordenadas $X = (x_1, \ldots, x_n)$ de números reais.

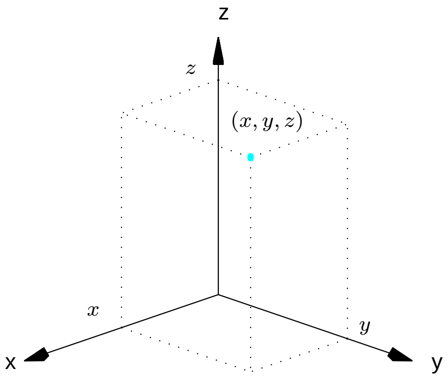


Figura 5.1: Coordenadas (x, y, z)

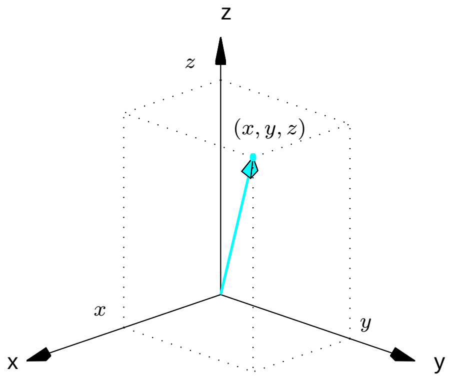


Figura 5.2: Componentes (x, y, z)

O conjunto $\mathbb{R}^1$ é simplesmente o conjunto dos números reais. O conjunto $\mathbb{R}^2$ é o conjunto dos pares de números reais e o $\mathbb{R}^3$ é o conjunto dos ternos de números reais.

No $\mathbb{R}^3$ o terno de números (x_1, x_2, x_3) pode ser interpretado geometricamente de duas maneiras: pode ser visto como um ponto, neste caso x_1, x_2 e x_3 são as coordenadas do ponto (Figura 5.1), ou como um vetor, neste caso x_1, x_2 e x_3 são as componentes do vetor (Figura 5.2). Também no $\mathbb{R}^n$ uma n-úpla pode ser pensada como um vetor ou como um ponto. Por exemplo, a quíntupla $X = (1, -2, 3, 5, 4)$ pode ser pensada como um ponto no $\mathbb{R}^5$, quando consideramos X como um elemento do conjunto $\mathbb{R}^5$, ou como um vetor do $\mathbb{R}^5$, quando fazemos operações com X, como as que iremos definir adiante. Vamos chamar os elementos do $\mathbb{R}^n$ de pontos ou de vetores dependendo da situação.

Dois vetores $V = (v_1, \ldots, v_n)$ e $W = (w_1, \ldots, w_n)$ no $\mathbb{R}^n$ são considerados **iguais** se $v_1 = w_1, \ldots, v_n = w_n$. As operações de soma de vetores e multiplicação de vetor por escalar no $\mathbb{R}^n$ são definidas de maneira análoga ao que fizemos no plano e no espaço.

Definição 5.2. (a) A **soma** de dois vetores $V = (v_1, \ldots, v_n)$ e $W = (w_1, \ldots, w_n)$ do $\mathbb{R}^n$ é definida por

$$V + W = (v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n); \tag{5.1}$$

(b) A **multiplicação** de um vetor $V = (v_1, \ldots, v_n)$ do $\mathbb{R}^n$ por um escalar α é definida por

$$\alpha\, V = (\alpha\, v_1, \ldots, \alpha\, v_n). \tag{5.2}$$

O **vetor nulo** do $\mathbb{R}^n$ é denotado por $\bar{0}$ e é definido por $\bar{0} = (0, \ldots, 0)$. Se $V = (v_1, \ldots, v_n)$ é um vetor do $\mathbb{R}^n$, então o **simétrico de** V é denotado por $-V$ e é definido por $-V = (-v_1, \ldots, -v_n)$. A **diferença** de dois vetores no $\mathbb{R}^n$ é definida por $V - W = V + (-W)$. Se V e W são vetores do $\mathbb{R}^n$ tais que $W = \alpha V$, para algum escalar α, então dizemos que W é um **múltiplo escalar** de V.

Um vetor $V = (v_1, \ldots, v_n)$ do $\mathbb{R}^n$ pode também ser escrito na notação matricial como uma **matriz linha** ou como uma **matriz coluna**:

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad V = \begin{bmatrix} v_1 & \ldots & v_n \end{bmatrix}.$$

Estas notações podem ser justificadas pelo fato de que as operações matriciais

$$V+W=\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_1+w_1 \\ \vdots \\ v_n+w_n \end{bmatrix}, \quad \alpha V=\alpha\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha v_1 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{bmatrix}$$

ou

$$V+W=\begin{bmatrix} v_1 & \ldots & v_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} w_1 & \ldots & w_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_1+w_1 & \ldots & v_n+w_n \end{bmatrix},$$
$$\alpha V=\alpha\begin{bmatrix} v_1 & \ldots & v_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha v_1 & \ldots & \alpha v_n \end{bmatrix}$$

produzem os mesmos resultados que as operações vetoriais

$$V+W=(v_1,\ldots,v_n)+(w_1,\ldots,w_n)=(v_1+w_1,\ldots,v_n+w_n)$$
$$\alpha V=\alpha(v_1,\ldots,v_n)=(\alpha v_1,\ldots,\alpha v_n).$$

No teorema seguinte enunciamos as propriedades mais importantes da soma de vetores e multiplicação de vetores por escalar no $\mathbb{R}^n$.

Teorema 5.1. *Sejam $U=(u_1,\ldots,u_n)$, $V=(v_1,\ldots,v_n)$ e $W=(w_1,\ldots,w_n)$ vetores do $\mathbb{R}^n$ e α e β escalares. São válidas as seguintes propriedades:*

(a) $U+V=V+U$;

(b) $(U+V)+W=U+(V+W)$;

(c) $U+\bar{0}=U$;

(d) $U+(-U)=\bar{0}$;

(e) $\alpha(\beta U)=(\alpha\beta)U$;

(f) $\alpha(U+V)=\alpha U+\alpha V$;

(g) $(\alpha+\beta)U=\alpha U+\beta U$;

(h) $1U=U$.

Demonstração. Segue diretamente das propriedades da álgebra matricial (Teorema 1.1 na página 7). □

5.1.2 Combinação Linear

Uma combinação linear de vetores $V_1, \ldots, V_k$, é simplesmente uma soma de múltiplos escalares de $V_1, \ldots, V_k$.

Definição 5.3. Um vetor V é uma **combinação linear** dos vetores $V_1, \ldots, V_k$, se a equação vetorial

$$x_1 V_1 + x_2 V_2 + \ldots + x_k V_k = V \tag{5.3}$$

possui solução, ou seja, se existem escalares $x_1, \ldots, x_k$ que satisfazem a equação (5.3). Neste caso, dizemos também que V pode ser escrito como uma combinação linear de $V_1, \ldots, V_k$.

Se $k = 1$, então a equação (5.3) se reduz a $x_1 V_1 = V$, ou seja, V é uma combinação linear de V_1 se, e somente se, V é um múltiplo escalar de V_1.

Exemplo 5.1. Sejam $V_1 = (1, 0, 0)$ e $V_2 = (1, 1, 0)$, vetores de $\mathbb{R}^3$. O vetor $V = (2, 3, 2)$ **não** é uma combinação linear de V_1 e V_2, pois a equação

$$x_1 V_1 + x_2 V_2 = V, \tag{5.4}$$

que pode ser escrita como

$$x_1(1, 0, 0) + x_2(1, 1, 0) = (2, 3, 2),$$

ou ainda,

$$(x_1 + x_2, x_2, 0) = (2, 3, 2),$$

é equivalente ao sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ & & x_2 & = & 3 \\ & & 0 & = & 2 \end{array}\right.$$

que **não** possui solução.

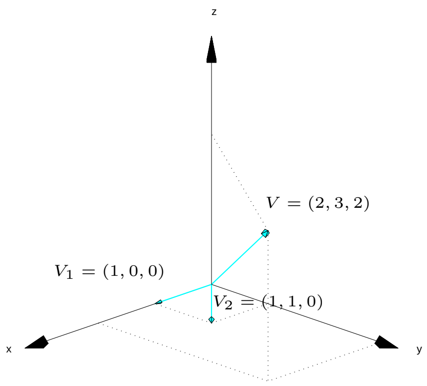


Figura 5.3: O vetor V **não** é combinação linear de V_1 e V_2

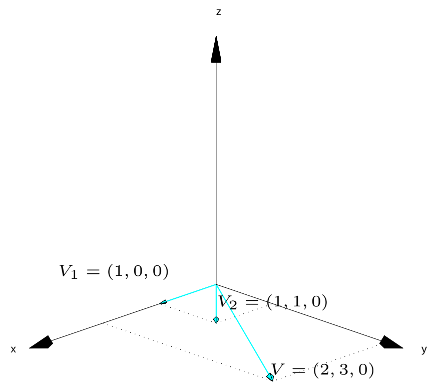


Figura 5.4: O vetor V é combinação linear de V_1 e V_2

Exemplo 5.2. O vetor $V = (2,3,0)$ é uma combinação linear de $V_1 = (1,0,0)$ e $V_2 = (1,1,0)$, pois a equação

$$x_1V_1 + x_2V_2 = V \tag{5.5}$$

ou

$$x_1(1,0,0) + x_2(1,1,0) = (2,3,0)$$

ou ainda,

$$(x_1 + x_2, x_2, 0) = (2, 3, 0),$$

é equivalente ao sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ & & x_2 & = & 3 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

que possui solução.

Exemplo 5.3. O vetor nulo $\bar{0}$ é sempre combinação linear de quaisquer vetores $V_1, \ldots, V_k$, pois

$$\bar{0} = 0V_1 + \ldots + 0V_k.$$

Exemplo 5.4. Todo vetor $V = (a, b, c)$ do $\mathbb{R}^3$ é uma combinação linear de

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \quad \vec{j} = (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad \vec{k} = (0, 0, 1).$$

Pois,

$$(a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$

Para verificarmos se um vetor B é combinação linear de um conjunto de vetores $\{A_1, \ldots, A_n\}$, escrevemos a equação vetorial

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_nA_n = B\,, \tag{5.6}$$

e verificamos se ela tem solução. Se $A_1, \ldots, A_n$ são vetores do $\mathbb{R}^m$, a equação (5.6), pode ser escrita como

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

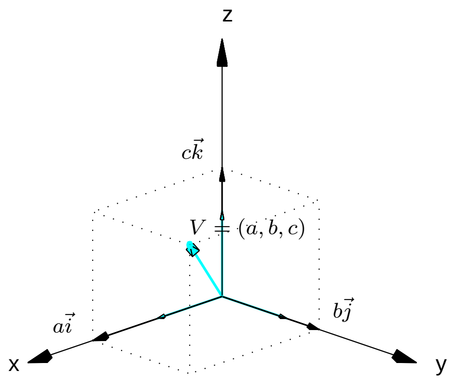


Figura 5.5: $(a, b, c) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

que é equivalente ao sistema linear

$$AX = B,$$

em que as colunas de A são os vetores A_i escritos como matrizes colunas, ou seja, $A = [A_1 \ldots A_n]$ e $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Isto prova o seguinte resultado.

Proposição 5.2. *Sejam A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $m \times 1$. O vetor B é combinação linear das colunas de A se, e somente se, o sistema $AX = B$ tem solução.*

5.1.3 Independência Linear

Definição 5.4. Dizemos que um conjunto $\mathcal{S} = \{V_1, \ldots, V_k\}$ de vetores é **linearmente independente (L.I.)** se a equação vetorial

$$x_1V_1 + x_2V_2 + \ldots + x_kV_k = \bar{0} \tag{5.7}$$

só possui a solução trivial, ou seja, se a única forma de escrever o vetor nulo como combinação linear dos vetores $V_1, \ldots, V_k$ é aquela em que todos os escalares são iguais a zero. Caso contrário, isto é, se (5.7) possui solução **não** trivial, dizemos que o conjunto $\mathcal{S}$ é **linearmente dependente (L.D.).**

Exemplo 5.5. Um conjunto finito que contém o vetor nulo é L.D., pois se $\{V_1, \ldots, V_k\}$ é tal que $V_j = \bar{0}$, para algum j, então $0V_1 + \ldots + 0V_{j-1} + 1V_j + 0V_{j+1} + \ldots + V_k = \bar{0}$.

Exemplo 5.6. Um conjunto formado por um único vetor, $\{V_1\}$, **não nulo** é L.I., pois $x_1V_1 = \bar{0}$ é equivalente a $x_1 = 0$ ou $V_1 = \bar{0}$. Mas, $V_1 \neq \bar{0}$; portanto $x_1 = 0$.

Exemplo 5.7. Se $\{V_1, \ldots, V_k\}$ é um conjunto de vetores L.D., então qualquer conjunto finito de vetores que contenha $V_1, \ldots, V_k$ é também L.D., pois a equação

$$x_1V_1 + \ldots + x_kV_k + 0\,W_1 + \ldots + 0\,W_m = \bar{0}$$

admite solução não trivial.

Exemplo 5.8. Um conjunto formado por dois vetores, $\{V_1, V_2\}$ é L.D. se, e somente se, a equação $x_1V_1 + x_2V_2 = \bar{0}$ possui solução não trivial. Mas se isto acontece, então um dos escalares x_1 ou x_2 pode ser diferente de zero. Se $x_1 \neq 0$, então $V_1 = (-x_2/x_1)V_2$ e se $x_2 \neq 0$, então $V_2 = (-x_1/x_2)V_1$. Ou seja, se $\{V_1, V_2\}$ é L.D., então um dos vetores é múltilplo escalar do outro.

Reciprocamente, se um vetor é múltiplo escalar do outro, digamos se $V_1 = \alpha V_2$, então $1\,V_1 - \alpha V_2 = \bar{0}$ e assim eles são L.D. Portanto, podemos dizer que dois vetores são L.D. se, e somente se, um é um múltiplo escalar do outro.

Por exemplo, o conjunto $S = \{V_1, V_2\}$, em que $V_1 = (1, 0, 1)$ e $V_2 = (0, 1, 1)$, é L.I., pois um vetor não é múltiplo escalar do outro.

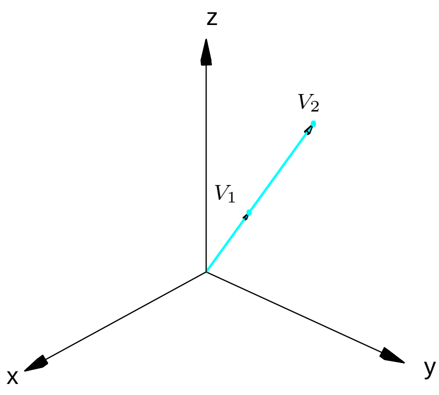


Figura 5.6: Dois vetores linearmente dependentes

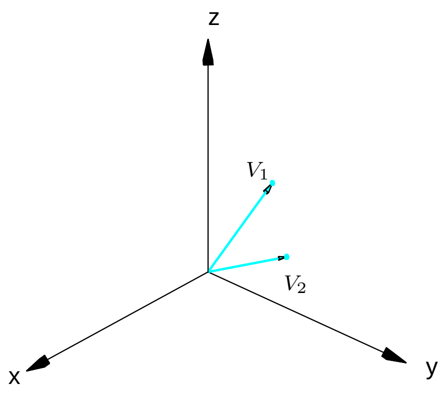


Figura 5.7: Dois vetores linearmente independentes

Exemplo 5.9. Um conjunto formado por três vetores, $\{V_1, V_2, V_3\}$ é L.D. se, e somente se, a equação $x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3 = \bar{0}$ possui solução não trivial. Mas se isto acontece, então um

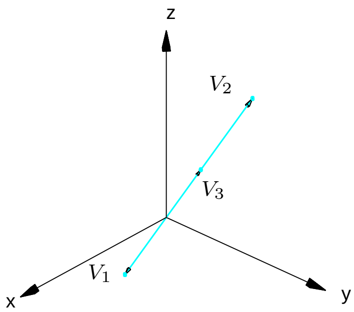


Figura 5.8: Três vetores linearmente dependentes (paralelos)

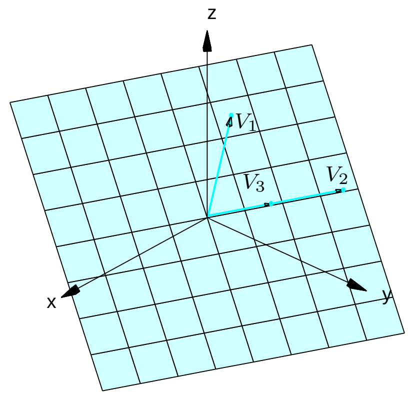


Figura 5.9: Três vetores linearmente dependentes (dois paralelos)

dos escalares x_1 ou x_2 ou x_3 pode ser diferente de zero. Se $x_1 \neq 0$, então $V_1 = (-x_2/x_1)V_2 + (-x_3/x_1)V_3$, ou seja, o vetor V_1 é combinação linear de V_2 e V_3. De forma semelhante, se $x_2 \neq 0$, então V_2 é combinação linear de V_1 e V_3 e se $x_3 \neq 0$, então V_3 é combinação linear de V_1 e V_2. Assim, se três vetores V_1, V_2 e V_3 do $\mathbb{R}^n$ são L.D., então um deles é uma combinação linear dos outros dois, ou seja, em deles é uma soma de múltiplos escalares dos outros dois. No $\mathbb{R}^3$ temos que se três vetores não nulos são L.D., então ou os três são paralelos (Figura 5.8), ou dois deles são paralelos (Figura 5.9) ou os três são coplanares, isto é, são paralelos a um mesmo plano (Figura 5.10).

Reciprocamente, se um vetor é uma combinação linear dos outros dois, digamos se $V_1 = \alpha V_2 + \beta V_3$, então $1\,V_1 - \alpha V_2 - \beta V_3 = \bar{0}$ e assim eles são L.D. Portanto, podemos dizer que três vetores são L.D. se, e somente se, um deles é uma combinação linear dos outros dois. No $\mathbb{R}^3$, se três vetores são L.I., então eles não são coplanares (Figura 5.11).

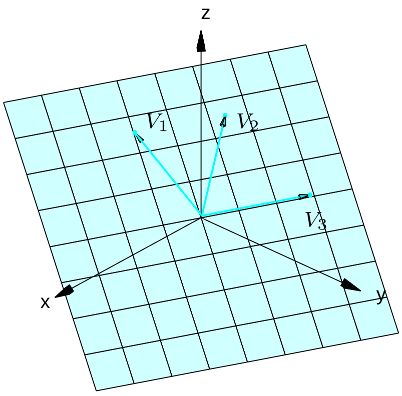


Figura 5.10: Três vetores linearmente dependentes (coplanares)

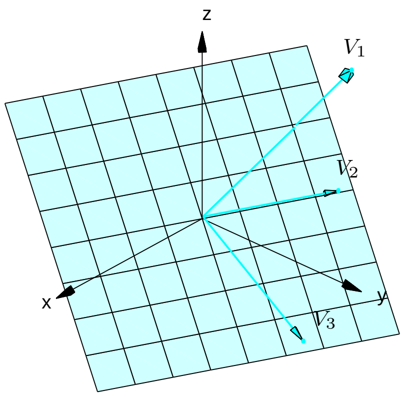


Figura 5.11: Três vetores linearmente independentes

Exemplo 5.10. Vamos mostrar que os vetores $E_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ E_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ E_n = (0, \ldots, 0, 1)$ são L.I. em particular os vetores $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$ são L.I. A equação

$$x_1 E_1 + \ldots + x_n E_n = \bar{0}$$

pode ser escrita como

$$x_1(1, 0, \ldots, 0) + \ldots + x_n(0, \ldots, 0, 1) = (0, \ldots, 0)\,.$$

Logo, $(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$, que é equivalente ao sistema

$$x_1 = 0,\ \ldots,\ x_n = 0\,.$$

Para descobrir se um conjunto de vetores $\{A_1, \ldots, A_n\}$ é L.I. precisamos saber se a equação vetorial

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_n A_n = \bar{0} \tag{5.8}$$

tem somente a solução trivial. Se $A_1, \ldots, A_n$ são vetores do $\mathbb{R}^m$, a equação (5.8), pode ser escrita como

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

que é equivalente ao sistema linear homogêneo $AX = \bar{0}$, em que as colunas de A são os vetores A_i escritos como matrizes colunas, ou seja, $A = [A_1 \ldots A_n]$ e $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Isto prova o seguinte resultado.

Proposição 5.3. *Seja A uma matriz $m \times n$.*

(a) *As colunas de A são linearmente independentes se, e somente se, o sistema $AX = \bar{0}$ tem somente a solução trivial.*

(b) *Se $m = n$, então as colunas de A são linearmente independentes se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.*

Exemplo 5.11. Três ou mais vetores no $\mathbb{R}^2$, assim como quatro ou mais vetores no $\mathbb{R}^3$ e mais de n vetores no $\mathbb{R}^n$ são sempre L.D. Pois, nestes casos, o problema de verificar se eles são ou não L.I. leva a um sistema linear homogêneo com mais incógnitas do que equações, que pelo Teorema 1.6 na página 39 tem sempre solução não trivial.

Exemplo 5.12. Considere os vetores $X_1 = (1, 0, 1)$, $X_2 = (0, 1, 1)$ e $X_3 = (1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$. Para sabermos se eles são L.I. ou L.D. escrevemos a equação

$$x_1X_1 + x_2X_2 + x_3X_3 = \bar{0}.$$

Esta equação vetorial é equivalente ao sistema linear $AX = \bar{0}$, em que

$$A = [\,X_1\ X_2\ X_3\,] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Escalonando a matriz $[\,A\,|\,\bar{0}\,]$ podemos obter a sua forma escalonada reduzida

$$[\,R\,|\bar{0}\,] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Concluimos, então que o sistema $A\,X = \bar{0}$ possui somente a solução trivial $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Portanto os vetores X_1, X_2 e X_3 são L.I.

Exemplo 5.13. Sejam $V_1 = (1, 2, 5)$, $V_2 = (7, -1, 5)$ e $V_3 = (1, -1, -1)$ vetores do $\mathbb{R}^3$. Para sabermos se eles são L.I. ou L.D. escrevemos a equação

$$x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3 = \bar{0}. \tag{5.9}$$

Esta equação vetorial é equivalente ao sistema linear $AX = \bar{0}$, em que

$$A = [\, V_1 \; V_2 \; V_3 \,] = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 5 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

A matriz $[\, A \,|\, \bar{0} \,]$ é equivalente por linhas à matriz escalonada reduzida

$$[\, R \,|\, \bar{0} \,] = \left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & -2/5 & 0 \\ 0 & 1 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{5.10}$$

Assim a variável x_3 pode ser uma variável livre que pode, portanto, assumir qualquer valor. Concluimos que o sistema $A\,X = \bar{0}$ e a equação vetorial (5.9) têm solução não trivial. Portanto, V_1, V_2 e V_3 são L.D.

A expressão "linearmente dependente" sugere que os vetores dependem uns dos outros em algum sentido. O teorema seguinte mostra que este realmente é o caso.

Teorema 5.4. *Um conjunto $\mathcal{S} = \{V_1, \ldots, V_k\}$ $(k > 1)$ de vetores é linearmente dependente (L.D.) se, e somente se, pelo menos um dos vetores, V_j, for combinação linear dos outros vetores de $\mathcal{S}$.*

Demonstração. Vamos dividir a demonstração em duas partes:

(a) Se V_j é uma combinação linear dos demais vetores do conjunto $\mathcal{S}$, isto é, se existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_k$ tais que

$$\alpha_1 V_1 + \ldots + \alpha_{j-1} V_{j-1} + \alpha_{j+1} V_{j+1} + \ldots + \alpha_k V_k = V_j,$$

então somando-se $-V_j$ a ambos os membros ficamos com

$$\alpha_1 V_1 + \ldots + \alpha_{j-1} V_{j-1} - V_j + \alpha_{j+1} V_{j+1} + \ldots + \alpha_k V_k = \bar{0}. \tag{5.11}$$

Isto implica que a equação $x_1 V_1 + \ldots + x_k V_k = \bar{0}$ admite solução não trivial, pois o coeficiente de V_j em (5.11) é -1. Portanto, $\mathcal{S}$ é L.D.

(b) Se $\mathcal{S}$ é L.D., então a equação

$$x_1 V_1 + x_2 V_2 + \ldots + x_k V_k = \bar{0} \tag{5.12}$$

admite solução não trivial, o que significa que pelo menos um x_j é diferente de zero. Então, multiplicando-se a equação (5.12) por $1/x_j$ e subtraindo-se $(\frac{x_1}{x_j})V_1 + \ldots + (\frac{x_k}{x_j})V_k$ obtemos

$$V_j = -\left(\frac{x_1}{x_j}\right) V_1 - \ldots - \left(\frac{x_{j-1}}{x_j}\right) V_{j-1} - \left(\frac{x_{j+1}}{x_j}\right) V_{j+1} - \ldots - \left(\frac{x_k}{x_j}\right) V_k\,.$$

Portanto, um vetor V_j é combinação linear dos outros vetores de $\mathcal{S}$. $\square$

Observação. Na demonstração da segunda parte, vemos que o vetor, cujo escalar na combinação linear, puder ser diferente de zero, pode ser escrito como combinação linear dos outros.

Exemplo 5.14. Sejam $V_1 = (1, 2, 5)$, $V_2 = (7, -1, 5)$ e $V_3 = (1, -1, -1)$ vetores do $\mathbb{R}^3$. Vamos escrever um dos vetores como combinação linear dos outros dois. Vimos no Exemplo 5.13 que estes vetores são L.D. De (5.10) segue que

$$x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3 = \bar{0}$$

se, e somente se, $x_1 = (2/5)\alpha$, $x_2 = -(1/5)\alpha$ e $x_3 = \alpha$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Substituindo-se os valores de x_1, x_2 e x_3 na equação acima, ficamos com

$$(2/5)\alpha V_1 - (1/5)\alpha V_2 + \alpha V_3 = \bar{0}$$

Tomando-se $\alpha = 1$, obtemos

$$(2/5)V_1 - (1/5)V_2 + V_3 = \bar{0}$$

multiplicando-se por -5 e somando-se $2V_1 + 5V_3$, temos que $V_2 = 2V_1 + 5V_3$. Observe que, neste exemplo, qualquer dos vetores pode ser escrito como combinação linear dos outros. O próximo exemplo mostra que isto nem sempre acontece.

Exemplo 5.15. Sejam $V_1 = (-2, -2, 2)$, $V_2 = (-3, 3/2, 0)$ e $V_3 = (-2, 1, 0)$. $\{V_1, V_2, V_3\}$ é L.D., mas V_1 não é combinação linear de V_2 e V_3 (Figura 5.9 na página 195).

5.1.4 Posições Relativas de Retas e Planos

Posições Relativas de Duas Retas

Vamos estudar a posição relativa de duas retas, usando a dependência linear de vetores. Sejam $r_1 : (x, y, z) = (x_1 + ta_1, y_1 + tb_1, z_1 + tc_1)$ e $r_2 : (x, y, z) = (x_2 + ta_2, y_2 + tb_2, z_2 + tc_2)$ as equações de duas retas.

(a) Se os **vetores diretores** $V_1 = (a_1, b_1, c_1)$ **e** $V_2 = (a_2, b_2, c_2)$ **são L.D.**, então as retas são paralelas ou coincidentes. Além de paralelas elas são coincidentes, se um ponto de uma delas pertence a outra, por exemplo se $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ pertence a r_2 ou se $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ pertence a r_1.

  (i) Se V_1, V_2 e $\overrightarrow{P_1P_2}$ são L.D. (com V_1 e V_2 L.D.), então elas são coincidentes.

  (ii) Se V_1, V_2 e $\overrightarrow{P_1P_2}$ são L.I. (com V_1 e V_2 L.D.), então elas são paralelas distintas.

(b) Se os **vetores diretores** $V_1 = (a_1, b_1, c_1)$ **e** $V_2 = (a_2, b_2, c_2)$ **são L.I.** então as retas são reversas ou concorrentes.

  (i) Se $\overrightarrow{P_1P_2}$, V_1 e V_2 são L.D. (com V_1 e V_2 L.I.), então as retas são concorrentes.

  (ii) Se $\overrightarrow{P_1P_2}$, V_1 e V_2 são L.I., então as retas são reversas (Figura 5.12).

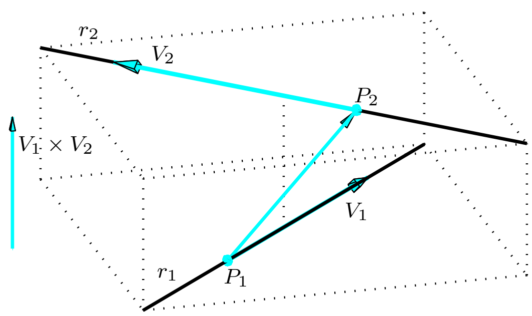


Figura 5.12: Duas retas reversas

Posições Relativas de Dois Planos

Vamos estudar a posição relativa dos dois planos usando a dependência linear de vetores. Sejam $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ as equações de dois planos.

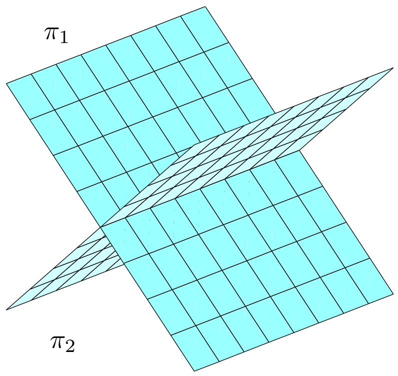


Figura 5.13: Dois planos que se interceptam segundo uma reta

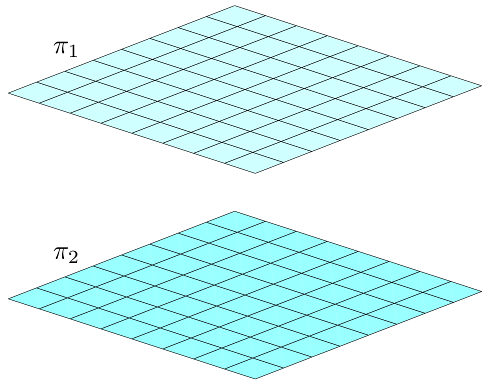


Figura 5.14: Dois planos paralelos

(a) Se os **vetores normais** $N_1 = (a_1, b_1, c_1)$ **e** $N_2 = (a_2, b_2, c_2)$ **são L.D.**, então os planos são paralelos distintos ou coincidentes. Além de paralelos, eles são coincidentes se, e somente se, todo ponto que satisfaz a equação de um deles, satisfaz também a equação do outro.

  (i) Se os vetores (a_1, b_1, c_1, d_1) e (a_2, b_2, c_2, d_2) são L.D., então as equações são proporcionais e os planos são coincidentes.

  (ii) Se os vetores (a_1, b_1, c_1, d_1) e (a_2, b_2, c_2, d_2) são L.I. (com N_1 e N_2 L.D.), então os planos são paralelos distintos (Figura 5.14).

(b) Se os **vetores normais** $N_1 = (a_1, b_1, c_1)$ **e** $N_2 = (a_2, b_2, c_2)$ **são L.I.**, então os planos são concorrentes (Figura 5.13).

Exercícios Numéricos (respostas na página 332)

5.1.1. Quais dos seguintes vetores são combinação linear de $X_1 = (4, 2, -3)$, $X_2 = (2, 1, -2)$ e $X_3 = (-2, -1, 0)$?

(a) $(1, 1, 1)$;
(b) $(4, 2, -6)$;
(c) $(-2, -1, 1)$;
(d) $(-1, 2, 3)$.

5.1.2. Sejam $r_1 : (x, y, z) = (1 + 2t, t, 2 + 3t)$ e $r_2 : (x, y, z) = (t, 1 + mt, -1 + 2mt)$ duas retas.

(a) Determine m para que as retas sejam coplanares (não sejam reversas).

(b) Para o valor de m encontrado, determine a posição relativa entre r_1 e r_2.

(c) Determine a equação do plano determinado por r_1 e r_2.

5.1.3. Quais dos seguintes conjuntos de vetores são linearmente dependentes?

(a) $\{(1, 1, 2), (1, 0, 0), (4, 6, 12)\}$;
(b) $\{(1, -2, 3), (-2, 4, -6)\}$;
(c) $\{(1, 1, 1), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}$;
(d) $\{(4, 2, -1), (6, 5, -5), (2, -1, 3)\}$.

5.1.4. Para quais valores de λ o conjunto de vetores $\{(3, 1, 0), (\lambda^2 + 2, 2, 0)\}$ é L.D.?

Exercícios Teóricos

5.1.5. Suponha que $S = \{X_1, X_2, X_3\}$ é um conjunto linearmente independente de vetores do $\mathbb{R}^n$. Responda se $T = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$ é linearmente dependente ou independente nos seguintes casos:

(a) $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_1 + X_3$ e $Y_3 = X_2 + X_3$;

(b) $Y_1 = X_1$, $Y_2 = X_1 + X_3$ e $Y_3 = X_1 + X_2 + X_3$.

5.1.6. Suponha que $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ é um conjunto de vetores do $\mathbb{R}^n$ linearmente independente. Mostre que se A é uma matriz $n \times n$ não singular, então $\{AX_1, AX_2, \ldots, AX_n\}$ também é um conjunto linearmente independente.

5.1.7. Se os vetores não nulos U, V e W são L.D., então W é uma combinação linear de U e V?

5.1.8. Sejam $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ a equação de uma plano e $r_2 : \ (x, y, z) = (x_2 + ta_2, y_2 + tb_2, z_2 + tc_2)$ a equação de uma reta. Estude a posição relativa entre o plano e a reta usando a dependência linear de vetores.

5.1.9. Considere um plano π, um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ pertencente a π e dois vetores $V_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $V_2 = (a_2, b_2, c_2)$ L.I. paralelos a π. Mostre que um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a π se, e somente se, satisfaz as equações

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & x_0 + ta_1 + sa_2 \\ y & = & y_0 + tb_1 + sb_2 \\ z & = & z_0 + tc_1 + sc_2 \end{array}\right. \qquad \text{para todos } t, s \in \mathbb{R}.$$

Estas equações são chamadas **equações paramétricas do plano**.

5.2 Subespaços

Alguns subconjuntos do espaço $\mathbb{R}^n$ se comportam como se fossem eles próprios espaços, no sentido de que as operações de soma de vetores e multiplicação por escalar são fechadas, ou seja, fazendo quaisquer destas operações com elementos do subconjunto não saimos dele. Com relação a estas operações, podemos "viver" nele sem termos que sair. Por isso, eles são chamados de subespaços.

Definição 5.5. Um subconjunto não vazio, $\mathbb{W}$, do $\mathbb{R}^n$ é um **subespaço (vetorial)** de $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, as seguintes propriedades são satisfeitas:

(0) Se $X, Y \in \mathbb{W}$, então $X + Y \in \mathbb{W}$;

(0') Se $X \in \mathbb{W}$ e α é um escalar, então $\alpha X \in \mathbb{W}$.

Se $\mathbb{W}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ que contém um vetor $V \neq \bar{0}$, então ele contém o conjunto

$$\{X = \alpha V \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Assim, todo subespaço de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ que contenha um vetor $V \neq \bar{0}$, contem a reta que passa pela origem e tem vetor diretor igual a V.

Se $\mathbb{W}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ que contém dois vetores V e W linearmente independentes, então $\mathbb{W}$ contém o conjunto de todas as combinações lineares de V e W,

$$\{X = \alpha V + \beta W \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Assim, todo subespaço de $\mathbb{R}^3$ que contém dois vetores V e W linearmente independentes, contém o plano que passa pela origem e tem vetor normal $N = V \times W$.

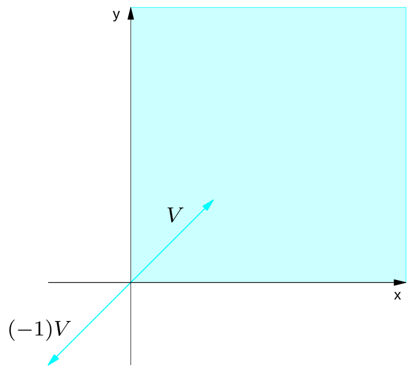


Figura 5.15: $\mathcal{A}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x\geq 0, y\geq 0\}$

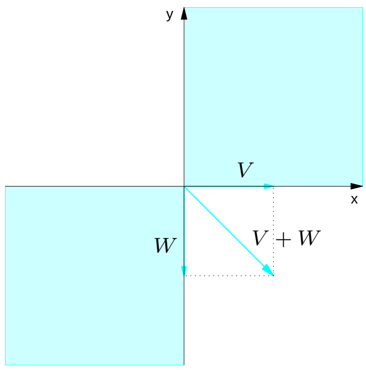


Figura 5.16: $\mathcal{B}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy\geq 0\}$

Exemplo 5.16. O conjunto $\mathbb{R}^2$ **não** é um subespaço de $\mathbb{R}^3$, pois $\mathbb{R}^2$ **não** é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 5.17. Os subconjuntos $\mathcal{A}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0, y\geq 0\}$ e $\mathcal{B}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy\geq 0\}$ **não** são subespaços de $\mathbb{R}^2$. Pois, para o primeiro, enquanto $V=(1,1)\in\mathcal{A}$, $-V=(-1)V=(-1,-1)\not\in\mathcal{A}$. Enquanto para o segundo, $V=(1,0), W=(0,-1)\in\mathcal{B}$, $V+W=(1,-1)\not\in\mathcal{B}$.

Exemplo 5.18. O $\mathbb{R}^n$ é um subespaço dele mesmo. O subconjunto formado apenas pelo vetor nulo, $\mathbb{W}=\{\bar{0}\}$, é claramente um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 5.19. Seja $V=(a,b,c)$ um vetor do $\mathbb{R}^3$ (fixado), então

$$\mathbb{W}=\{(x,y,z)=t(a,b,c) \mid t\in\mathbb{R}\},$$

que é uma reta que passa pela origem com vetor diretor $V=(a,b,c)$ é um subespaço do $\mathbb{R}^3$. Vamos verificar as Propriedades (0) e (0'):

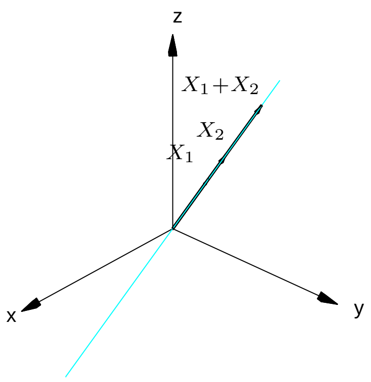


Figura 5.17: Soma de vetores da reta $(x, y, z) = (at, bt, ct)$

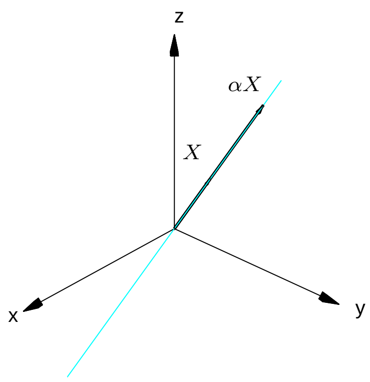


Figura 5.18: Multiplicação de vetor por escalar da reta $(x, y, z) = (at, bt, ct)$

(0) Se $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $X_2 = (x_2, y_2, z_2)$ pertencem a $\mathbb{W}$, então $X_1 = (at_1, bt_1, ct_1)$ e $X_2 = (at_2, bt_2, ct_2)$ para t_1 e t_2 números reais e portanto,

$$X_1 + X_2 = (at_1 + at_2, bt_1 + bt_2, ct_1 + ct_2) = (a(t_1 + t_2), b(t_1 + t_2), c(t_1 + t_2))\,,$$

que portanto pertencem a $\mathbb{W}$.

(0') Se $X = (x, y, z)$ pertence a $\mathbb{W}$, então $X = (at, bt, ct)$ para algum t real. E portanto,

$$\alpha X = \alpha(at, bt, ct) = (a(\alpha t), b(\alpha t), c(\alpha t))$$

que pertence a $\mathbb{W}$.

Por outro lado, se uma reta com vetor diretor $V = (a, b, c)$,

$$\mathbb{W} = \{(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

é um subespaço, então ela tem que passar pela origem e neste caso podemos tomar $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$.

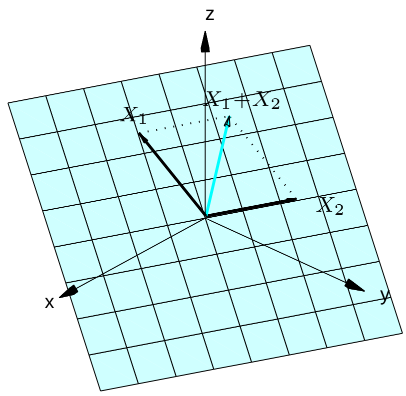


Figura 5.19: Soma de vetores do plano $ax + by + cz = 0$

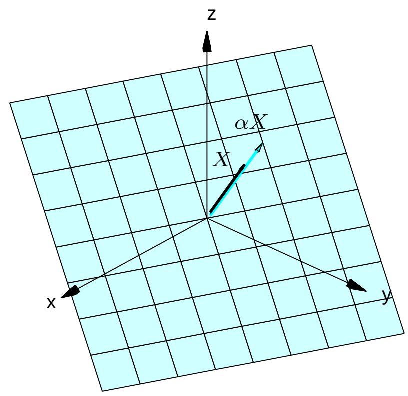


Figura 5.20: Multiplicação de vetor por escalar do plano $ax + by + cz = 0$

Exemplo 5.20. Além das retas que passam pela origem, também os planos que passam pela origem são subespaços do $\mathbb{R}^3$. Seja $N = (a, b, c)$ um vetor não nulo do $\mathbb{R}^3$ (fixado), então

$$\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$$

que é um plano que passa pela origem com vetor normal $N = (a, b, c)$ é um subespaço do $\mathbb{R}^3$.

Vamos verificar as propriedades (0) e (0'):

(0) Se $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $X_2 = (x_2, y_2, z_2)$ pertencem a $\mathbb{W}$, então $ax_1 + by_1 + cz_1 = 0$ e $ax_2 + by_2 + cz_2 = 0$ e portanto $X_1 + X_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ também pertence a $\mathbb{W}$,

pois

$$a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2)+c(z_1+z_2)=(ax_1+by_1+cz_1)+(ax_2+by_2+cz_2)=0+0=0$$

(0') Se $X=(x,y,z)$ pertence a $\mathbb{W}$, então $\alpha X=(\alpha x,\alpha y,\alpha z)$ também pertence a $\mathbb{W}$, pois

$$a(\alpha x)+b(\alpha y)+c(\alpha z)=\alpha(ax+by+cz)=\alpha 0=0\,.$$

Por outro lado, suponha que um plano que tem vetor normal $N=(a,b,c)$,

$$\mathbb{W}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=d\},$$

seja um subespaço. Se $X\in\mathbb{W}$, então $0X=\bar{0}$ também pertence a $\mathbb{W}$, ou seja, o plano tem que passar pela origem e substituindo-se $\bar{0}=(0,0,0)$ na equação do plano, obtemos que $d=0$.

O Exemplo 5.20 é um caso particular do que é tratado na proposição seguinte.

Proposição 5.5. *O conjunto solução de um sistema linear $AX=B$, em que*

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & \dots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\quad \text{e}\quad B=\begin{bmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}.$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, $B=\bar{0}$, ou seja, se, e somente se, o sistema linear é homogêneo.

Demonstração. Suponhamos, em primeiro lugar, que $B = \bar{0}$. Podemos ver as matrizes colunas X como elementos do $\mathbb{R}^n$ e assim, escrever o conjunto solução do sistema homogêneo na forma

$$\mathbb{W} = \{X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid AX = \bar{0}\}\,.$$

Precisamos verificar as propriedades (0) e (0') da definição de subespaço:

(0) Se X e Y são soluções do sistema homogêneo $AX = \bar{0}$, então $AX = \bar{0}$ e $AY = \bar{0}$ e portanto $X + Y$ também é solução pois, $A(X + Y) = AX + AY = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$.

(0') Se X é solução do sistema homogêneo $AX = \bar{0}$, então αX também o é, pois $A(\alpha X) = \alpha AX = \alpha\bar{0} = \bar{0}$.

Por outro lado, suponha que $\mathbb{W} = \{X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid AX = B\}$ é um subespaço. Então, $\mathbb{W}$ é não vazio e portanto existe $X \in \mathbb{W}$. Logo, $0X = \bar{0} \in \mathbb{W}$, ou seja, $B = A\,\bar{0} = \bar{0}$ e o sistema linear tem que ser homogêneo. ☐

Exemplo 5.21. Considere os sistemas lineares

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & -8 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & -8 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Todos são sistemas homogêneos, portanto os conjuntos solução são subespaços do $\mathbb{R}^3$.

(a) A solução geral do primeiro sistema é $x = 2s - 3t$, $y = s$ e $z = t$ ou $x = 2y - 3z$, que é um plano que passa pela origem, com vetor normal $N = (1, -2, 3)$ (verifique!);

(b) A solução geral do segundo sistema é $x = -5t, y = -t$ e $z = t$ que é a equação de uma reta que passa pela origem, com vetor diretor $V = (-5, -1, 1)$.

(c) A solução do terceiro sistema é $x = 0, y = 0$ e $z = 0$, que é somente a origem $\{\bar{0}\}$.

O conjunto solução de um sistema homogêneo também é chamado de **espaço solução** do sistema homogêneo.

5.2.1 Vetores Geradores

No Exemplo 5.4 na página 191 vimos que qualquer vetor do $\mathbb{R}^3$ pode ser escrito como combinação linear de $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$. Neste caso, dizemos que $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ geram o $\mathbb{R}^3$.

Definição 5.6. Dizemos que um conjunto $\mathcal{S} = \{V_1, \ldots, V_k\}$ de vetores de um subespaço $\mathbb{W}$, **gera** $\mathbb{W}$, se qualquer vetor de $\mathbb{W}$ é combinação linear dos vetores de S, ou seja, se a equação vetorial

$$x_1V_1 + x_2V_2 + \ldots + x_kV_k = V$$

possui solução para todo V em $\mathbb{W}$. Notação: $\mathbb{W} = [\mathcal{S}]$ ou $\mathbb{W} = [V_1, \ldots, V_k]$. Neste caso, dizemos que $\mathbb{W}$ é o **subespaço gerado por** $V_1, \ldots, V_k$.

Exemplo 5.22. Considere o subespaço de $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbb{W} = \{(\alpha, \beta, \alpha + \beta) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

O conjunto $S = \{V_1, V_2\}$, em que $V_1 = (1,0,1)$ e $V_2 = (0,1,1)$, gera $\mathbb{W}$, pois

$$x_1V_1 + x_2V_2 = (\alpha, \beta, \alpha+\beta) \tag{5.13}$$

é equivalente ao sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & & & = & \alpha \\ & & x_2 & = & \beta \\ x_1 & + & x_2 & = & \alpha+\beta \end{array}\right.$$

que possui solução para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Portanto, a equação (5.13) possui solução para qualquer vetor $(\alpha, \beta, \alpha+\beta)$ de $\mathbb{W}$. Portanto, $\mathbb{W}$ é um plano que passa pela origem e é paralelo aos vetores V_1 e V_2, pois ele é o conjunto das combinações lineares de V_1 e V_2.

Exemplo 5.23. Vamos verificar que os vetores $V_1 = (1,1,0)$, $V_2 = (0,1,1)$, $V_3 = (1,0,1)$ e $V_4 = (1,2,1)$ geram o $\mathbb{R}^3$. A equação vetorial

$$x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3 + x_4V_4 = (a,b,c)$$

é equivalente ao sistema de equações lineares

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & a \\ x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & = & b \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & c \end{array}\right. ,$$

cuja matriz aumentada é equivalente por linhas à matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{a+b-c}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{b+c-a}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{a+c-b}{2} \end{array}\right].$$

Portanto, V_1, V_2, V_3 e V_4 geram o $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 5.24. Considere o sistema linear homogêneo $AX = \bar{0}$, em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Já vimos que o conjunto solução de um sistema homogêneo é um subespaço. Vamos encontrar um conjunto de vetores que gere este subespaço. Escalonando a matriz aumentada do sistema acima, obtemos a matriz escalonada reduzida

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

E assim a solução geral do sistema pode ser escrita como

$$x_1 = -\alpha - 2\beta,\ x_2 = \alpha,\ x_3 = \beta,\ x_4 = \beta$$

para todos os valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ou seja, o conjunto solução do sistema $AX = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-\alpha - 2\beta, \alpha, \beta, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Agora, um elemento qualquer de $\mathbb{W}$ pode ser escrito como uma soma de vetores de $\mathbb{W}$, sendo que cada vetor depende apenas de um parâmetro, obtendo

$$(-\alpha - 2\beta, \alpha, \beta, \beta) = (-\alpha, \alpha, 0, 0) + (-2\beta, 0, \beta, \beta) = \alpha(-1, 1, 0, 0) + \beta(-2, 0, 1, 1).$$

Assim, todo vetor de $\mathbb{W}$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $X_1 = (-1, 1, 0, 0)$ e $X_2 = (-2, 0, 1, 1)$ pertencentes a $\mathbb{W}$ (X_1 é obtido fazendo-se $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ e X_2, fazendo-se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$). Portanto, $X_1 = (-1, 1, 0, 0)$ e $X_2 = (-2, 0, 1, 1)$ geram $\mathbb{W}$ que é um subespaço do $\mathbb{R}^4$.

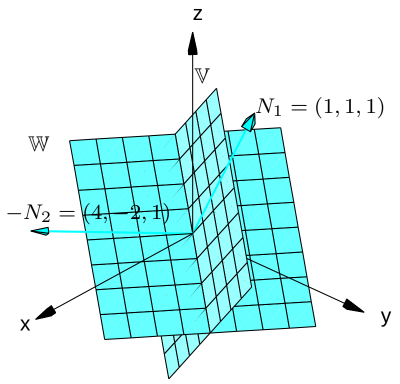


Figura 5.21: Os subespaços $\mathbb{W}, \mathbb{V}$ e $\mathbb{V} \cap \mathbb{W}$ do Exemplo 5.25

Exemplo 5.25. Sejam $\mathbb{W}$ o subespaço gerado por $V_1 = (-1,1,0)$ e $V_2 = (-1,0,1)$, $\mathbb{W} = [V_1, V_2]$, e $\mathbb{V}$ o subespaço gerado por $V_3 = (1,0,-4)$ e $V_4 = (0,1,-2)$, $\mathbb{V} = [V_3, V_4]$. O conjunto $\mathbb{W}$ é um plano que passa pela origem, paralelo aos vetores V_1 e V_2 e $\mathbb{V}$ é um plano que passa pela origem paralelo aos vetores V_3 e V_4. Assim, o plano $\mathbb{W}$ tem vetor normal $N_1 = V_1 \times V_2 = (1,1,1)$ e o plano $\mathbb{V}$ tem vetor normal $N_2 = V_3 \times V_4 = (-4,2,-1)$. A interseção $\mathbb{W} \cap \mathbb{V}$ é a reta cujo vetor diretor é $V = N_1 \times N_2 = (-1,3,-2)$ (Exemplo 4.5 na página 158) e que passa pela origem. Assim, a reta que é a interseção, $\mathbb{V} \cap \mathbb{W}$, tem equação $(x,y,z) = t(-1,3,-2)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, que é também um subespaço. Isto não acontece com a união, $\mathbb{V} \cup \mathbb{W}$ (verifique!).

Alternativamente, podemos encontrar a interseção de $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ da seguinte forma. Devemos encontrar os vetores que são combinações lineares de V_1 e V_2 que são também combinações lineares de V_3 e V_4, ou seja, devemos encontrar vetores V que satisfazem as duas equações:

$$V = xV_1 + yV_2 \tag{5.14}$$

$$V = zV_3 + wV_4 \tag{5.15}$$

Para isso, podemos resolver a equação

$$xV_1 + yV_2 = zV_3 + wV_4, \quad \text{ou}$$

$$xV_1 + yV_2 + z(-V_3) + w(-V_4) = \bar{0}.$$

Esta equação é equivalente ao sistema linear $AX = \bar{0}$, em que

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

A forma escalonada reduzida da matriz aumentada $[A\,|\,\bar{0}]$ é

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 \end{array}\right].$$

Assim, a solução do sistema linear é $w = t, z = -t/3, y = -2t/3$ e $x = t$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Substituindo-se x e y em (5.14), obtemos que a interseção $\mathbb{V} \cap \mathbb{W}$ é formada por vetores da forma

$$V = tV_1 - \frac{2t}{3}V_2 = t(V_1 - \frac{2}{3}V_2) = t(-1/3, 1, -2/3)$$

ou substituindo-se z e w em (5.15),

$$V = -\frac{t}{3}V_3 + tV_4 = t(-\frac{1}{3}V_3 + V_4) = t(-1/3, 1, -2/3).$$

Exercícios Numéricos (respostas na página 333)

5.2.1. Considere os seguintes conjuntos de vetores. Quais deles são subespaços de $\mathbb{R}^3$?

(a) (x, y, z); em que $z = x^3$

(b) (x, y, z), em que $z = x + y$;

(c) (x, y, z), em que $z > 0$;

(d) (x, y, z), em que $z = 0$ e $xy > 0$;

(e) (x, y, z), em que $x = z = 0$;

(f) (x, y, z), em que $x = -z$;

(g) (x, y, z), em que $y = 2x + 1$;

(h) (x, y, z), em que $z^2 = x^2 + y^2$.

5.2.2. Considere os seguintes conjuntos de vetores. Quais deles são subespaços de $\mathbb{R}^4$?

(a) (x, y, z, w), em que $x - y = 2$;

(b) (x, y, z, w), em que $z = x = 2y$ e $w = x - 3y$;

(c) (x, y, z, w), em que $x = y = 0$;

(d) (x, y, z, w), em que $x = 0$ e $y = -w$;

5.2.3. Quais dos seguintes conjuntos de vetores geram o $\mathbb{R}^3$?

(a) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\}$;

(b) $\{(1, 2, 1), (1, 1, -1), (2, 3, 0)\}$;

(c) $\{(6, 4, -2), (2, 0, 0), (3, 2, -1), (5, 6, -3)\}$;

(d) $\{(1, 1, 0), (1, 2, -1), (0, 0, 1)\}$;

5.2.4. Encontre um conjunto de vetores que gera o espaço solução do sistema homogêneo $AX = \bar{0}$, em que

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

5.2.5. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

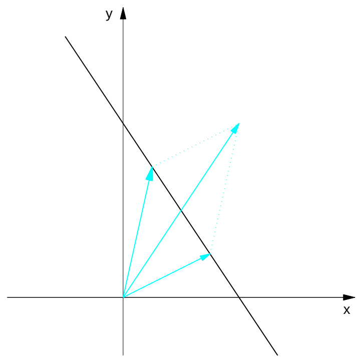
$$\mathbb{V} = [(-1,2,3),(1,3,4)] \quad \text{e} \quad \mathbb{W} = [(1,2,-1),(0,1,1)].$$

Encontre a equação paramétrica da reta $\mathbb{V} \cap \mathbb{W}$. A notação $[V_1, V_2]$ significa o subespaço gerado por V_1 e V_2, ou seja, o conjunto de todas as combinações lineares de V_1 e V_2.

Exercícios Teóricos

5.2.6. Sejam V e W vetores do $\mathbb{R}^n$. Mostre que o conjunto dos vetores da forma $\alpha V + \beta W$ é um subespaço do $\mathbb{R}^n$.

5.2.7. Mostre que se uma reta em $\mathbb{R}^2$ ou em $\mathbb{R}^3$ não passa pela origem, então ela não é um subespaço. (Sugestão: se ela fosse um subespaço, então ...)



5.2.8. Sejam A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $m \times 1$. Mostre que o conjunto dos vetores B para os quais o sistema $A\,X = B$ tem solução é um subespaço de $\mathbb{R}^m$. Ou seja, mostre que o conjunto

$$\mathcal{I}(A) = \{B \in \mathbb{R}^m \,|\, B = A\,X, \text{para algum } X \in \mathbb{R}^n\}$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^m$.

5.2.9. Sejam V_1, V_2 e V_3 vetores do $\mathbb{R}^n$, tais que $\{V_1, V_2\}$ é linearmente independente. Mostre que se V_3 não pertence ao subespaço gerado por $\{V_1, V_2\}$, então $\{V_1, V_2, V_3\}$ é linearmente independente. (Sugestão: Considere a equação $x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3 = \bar{0}$. Se $x_3 = 0$, então $x_1 = x_2 = 0$.)

5.2.10. Sejam $V_1, \ldots, V_{k+1}$ vetores do $\mathbb{R}^n$, tais que $\{V_1, \ldots, V_k\}$ é linearmente independente. Mostre que se V_{k+1} não pertence ao subespaço gerado por $\{V_1, \ldots, V_k\}$, então $\{V_1, \ldots, V_{k+1}\}$ é linearmente independente. (Sugestão: Considere a equação $x_1V_1 + \ldots + x_{k+1}V_{k+1} = \bar{0}$. Separe em dois casos: $x_{k+1} = 0$ e $x_{k+1} \neq 0$.)

5.2.11. Sejam $\mathbb{W}_1$ e $\mathbb{W}_2$ dois subespaços.

(a) Mostre que $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$ é um subespaço.

(b) Mostre que $\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2$ é um subespaço se, e somente se, $\mathbb{W}_1 \subseteq \mathbb{W}_2$ ou $\mathbb{W}_2 \subseteq \mathbb{W}_1$.

(c) Definimos a **soma dos subespaços** $\mathbb{W}_1$ e $\mathbb{W}_2$ por

$$\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 = \{V_1 + V_2 \mid V_1 \in \mathbb{W}_1 \text{ e } V_2 \in \mathbb{W}_2\}.$$

Mostre que $\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$ é um subespaço que contém $\mathbb{W}_1$ e $\mathbb{W}_2$.

5.3 Base e Dimensão

Já vimos que um conjunto $S = \{V_1, \ldots, V_k\}$ gera um subespaço $\mathbb{W}$, se qualquer elemento de $\mathbb{W}$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores de S. Vimos também que se S é um conjunto linearmente dependente, então um dos vetores de S pode ser escrito como combinação linear dos outros vetores de S. Portanto, se S é um conjunto linearmente dependente, então podemos tirar um ou mais vetores do conjunto S até que os que restarem sejam linearmente independentes. Este conjunto é um conjunto mínimo de vetores que gera o subespaço $\mathbb{W}$ e chamamos de base de $\mathbb{W}$.

5.3.1 Base de Subespaços

Definição 5.7. Dizemos que um subconjunto $\{V_1, \ldots, V_k\}$ de um subespaço $\mathbb{W}$ é uma **base** de $\mathbb{W}$, se

(a) $\{V_1, \ldots, V_k\}$ gera $\mathbb{W}$ e

(b) $\{V_1, \ldots, V_k\}$ é L.I.

Exemplo 5.26. Um vetor qualquer do $\mathbb{R}^n$ é da forma $V = (a_1, \ldots, a_n)$ e pode ser escrito como uma soma de vetores, sendo um vetor para cada parâmetro e cada vetor depende apenas de um parâmetro, obtendo

$$\begin{aligned} V = (a_1, \ldots, a_n) &= (a_1, 0, \ldots, 0) + (0, a_2, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, \ldots, 0, a_n) \\ &= a_1(1, 0, \ldots, 0) + a_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \ldots + a_n(0, \ldots, 0, 1). \end{aligned}$$

Assim, os vetores $E_1 = (1,0,\ldots,0), E_2 = (0,1,0,\ldots,0),\ldots,E_n = (0,\ldots,0,1)$ geram o $\mathbb{R}^n$. Vimos no Exemplo 5.10 na página 196 que E_1, E_2, $\ldots E_n$ são L.I. Esses vetores formam a chamada **base canônica de** $\mathbb{R}^n$. No caso do $\mathbb{R}^3$, $E_1 = \vec{i}$, $E_2 = \vec{j}$ e $E_3 = \vec{k}$.

Exemplo 5.27. Seja $\mathbb{V} = \{(\alpha,\beta,\alpha+\beta)\,|\,\alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$ um subespaço do $\mathbb{R}^3$. Qualquer elemento V de $\mathbb{V}$ pode ser escrito como uma soma de vetores de $\mathbb{V}$, sendo um vetor para cada parâmetro e cada vetor depende apenas de um parâmetro, obtendo

$$V = (\alpha,\beta,\alpha+\beta) = (\alpha,0,\alpha) + (0,\beta,\beta) = \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,1).$$

Logo $V_1 = (1,0,1)$ e $V_2 = (0,1,1)$ geram $\mathbb{V}$. Além disso, eles são L.I. pois um não é múltiplo escalar do outro. Portanto, $\{V_1,V_2\}$ é uma base de $\mathbb{V}$.

Exemplo 5.28. Seja $\mathbb{W} = \{(x,y,z) = t(a,b,c) \mid t \in \mathbb{R}\}$ uma reta que passa pela origem. Como o vetor diretor $V = (a,b,c)$ é não nulo e gera todos os pontos da reta, então $\{V\}$ é uma base de $\mathbb{W}$.

Exemplo 5.29. Seja $\mathbb{W} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz = 0\}$ um plano que passa pela origem. Vamos supor que $a \neq 0$. Um ponto (x,y,z) satisfaz a equação $ax+by+cz=0$ se, e somente se,

$$z = \alpha, y = \beta, x = -\frac{1}{a}(c\alpha + b\beta), \quad \text{para todos } \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

Assim, o plano $\mathbb{W}$ pode ser descrito como $\mathbb{W} = \{(-\frac{c}{a}\alpha - \frac{a}{b}\beta,\beta,\alpha) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$. Assim, todo vetor de $\mathbb{W}$ pode ser escrito como uma soma de vetores, sendo um para cada parâmetro, obtendo

$$(-\frac{c}{a}\alpha - \frac{a}{b}\beta,\beta,\alpha) = \alpha(-\frac{c}{a},0,1) + \beta(-\frac{b}{a},1,0).$$

Assim, todo vetor de $\mathbb{W}$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores $V_1 = (-\frac{c}{a}, 0, 1)$ e $V_2 = (-\frac{b}{a}, 1, 0)$ pertencentes a $\mathbb{W}$ (V_1 é obtido fazendo-se $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ e V_2, fazendo-se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$). Portanto, $V_1 = (-\frac{c}{a}, 0, 1)$ e $V_2 = (-\frac{b}{a}, 1, 0)$ geram o plano $\mathbb{W}$. Como V_1 e V_2 são L.I., pois um não é múltiplo escalar do outro, então $\{V_1, V_2\}$ é uma base do plano $\mathbb{W}$. Deixamos como exercício para o leitor encontrar uma base de $\mathbb{W}$ para o caso em que $b \neq 0$ e também para o caso em que $c \neq 0$.

Exemplo 5.30. Vamos determinar uma base para o espaço solução do sistema homogêneo

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

A matriz aumentada deste sistema é

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Resolvendo o sistema pelo método de Gauss-Jordan, transformamos a matriz aumentada na sua forma reduzida escalonada, obtendo

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Portanto, o sistema dado é equivalente ao seguinte sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

cuja solução é dada por $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-\alpha - \beta, \alpha, -\beta, \beta)$, para todos os números α e β reais. Assim, o espaço solução do sistema é

$$\mathbb{V} = \{(-\alpha - \beta, \alpha, -\beta, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Agora, vamos determinar uma base para este subespaço. Qualquer vetor V de $\mathbb{V}$ pode ser escrito como uma soma de vetores, sendo um vetor para cada parâmetro e cada vetor depende apenas de um parâmetro, obtendo

$$\begin{aligned}(-\alpha - \beta, \alpha, -\beta, \beta) &= (-\alpha, \alpha, 0, 0) + (-\beta, 0, -\beta, \beta) \\ &= \alpha(-1, 1, 0, 0) + \beta(-1, 0, -1, 1)\end{aligned}$$

Assim, todo vetor de $\mathbb{V}$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $V_1 = (-1, 1, 0, 0)$ e $V_2 = (-1, 0, -1, 1)$ pertencentes a $\mathbb{V}$ (V_1 é obtido fazendo-se $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ e V_2, fazendo-se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$). Portanto, $V_1 = (-1, 1, 0, 0)$ e $V_2 = (-1, 0, -1, 1)$ geram $\mathbb{V}$. Além disso, eles são L.I., pois se

$$\alpha(-1, 1, 0, 0) + \beta(-1, 0, -1, 1) = (-\alpha - \beta, \alpha, -\beta, \beta) = (0, 0, 0, 0),$$

então $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. Portanto, V_1 e V_2 formam uma base de $\mathbb{V}$.

Exemplo 5.31. Seja $\mathbb{V} = \{(a + c, b + c, a + b + 2c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ um subespaço de $\mathbb{R}^3$. Qualquer elemento V de $\mathbb{V}$ pode ser escrito como uma soma de vetores, sendo um vetor para cada parâmetro e cada vetor depende apenas de um parâmetro, obtendo

$$\begin{aligned}V = (a + c, b + c, a + b + 2c) &= (a, 0, a) + (0, b, b) + (c, c, 2c) \\ &= a(1, 0, 1) + b(0, 1, 1) + c(1, 1, 2).\end{aligned}$$

Logo, definindo $V_1 = (1, 0, 1)$, $V_2 = (0, 1, 1)$ e $V_3 = (1, 1, 2)$, então $\{V_1, V_2, V_3\}$ gera $\mathbb{V}$. Para sabermos se $\{V_1, V_2, V_3\}$ é base de $\mathbb{V}$, precisamos verificar se V_1, V_2 e V_3 são L.I. Para isto temos que saber se a equação vetorial

$$xV_1 + yV_2 + zV_3 = \bar{0} \tag{5.16}$$

só possui a solução trivial, ou equivalentemente, se o sistema $A\,X = \bar{0}$ só possui a solução trivial, onde $A = [V_1\ V_2\ V_3]$. Escalonando a matriz $[\,A\,|\,\bar{0}\,]$, obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A solução de (5.16) é dada por $x = -\alpha, y = \alpha$ e $z = \alpha$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Substiuindo-se esta solução em (5.16) obtemos

$$-\alpha V_1 + \alpha V_2 + \alpha V_3 = \bar{0}$$

Tomando-se $\alpha = 1$ e somando-se $V_1 - V_2$ obtemos $V_3 = V_2 + V_1$. Assim o vetor V_3 pode ser descartado na geração de $\mathbb{V}$, pois ele é combinação linear dos outros dois. Logo, apenas V_1 e V_2 são suficientes para gerar $\mathbb{V}$. Como além disso, os vetores V_1 e V_2 são tais que um não é múltiplo escalar do outro, então eles são L.I. e portanto $\{V_1, V_2\}$ é uma base de $\mathbb{V}$.

Teorema 5.6. *Seja $\{V_1, \ldots, V_m\}$ uma base de um subespaço $\mathbb{W}$. Então, um conjunto com mais de m vetores em $\mathbb{W}$ é L.D.*

Demonstração. Seja $\{W_1, \ldots, W_p\}$ um subconjunto de $\mathbb{W}$, com $p > m$. Vamos mostrar que $\{W_1, \ldots, W_p\}$ é L.D. Considere a combinação linear nula de $W_1, \ldots, W_p$

$$x_1 W_1 + x_2 W_2 + \ldots + x_p W_p = \bar{0}. \tag{5.17}$$

Como $\{V_1, \ldots, V_m\}$ é uma base, qualquer elemento do subespaço pode ser escrito como combinação linear de $V_1, \ldots, V_m$. Em particular,

$$W_j = a_{1j}V_1 + a_{2j}V_2 + \ldots + a_{mj}V_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}V_i\,, \quad \text{para } j = 1, \ldots, p\,. \tag{5.18}$$

Assim, substituindo (5.18) em (5.17) e agrupando os termos que contém V_i, para $i = 1, \ldots, m$, obtemos

$$(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1p}x_p)V_1 + \ldots + (a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mp}x_p)V_m = \bar{0}. \tag{5.19}$$

Como $\{V_1, \ldots, V_m\}$ é base, $V_1, \ldots, V_m$ são L.I. e portanto os escalares na equação (5.19) são iguais a zero. Isto leva ao sistema linear

$$AX = \bar{0},$$

onde $A = (a_{ij})_{m\times p}$. Mas, este é um sistema homogêneo que tem mais incógnitas do que equações, portanto possui solução não trivial, (Teorema 1.6 na página 39), como queríamos provar. ☐

Corolário 5.7. *Se $\{V_1, \ldots, V_m\}$ e $\{W_1, \ldots, W_p\}$ são bases de um mesmo subespaço $\mathbb{W}$, então*

$$m = p.$$

Demonstração. Suponha por contradição que $p > m$. Pelo Teorema 5.6, segue que $\{W_1, \ldots, W_p\}$ é L.D., o que é impossível. O caso $p < m$ pode ser tratado de forma análoga. ☐

5.3.2 Dimensão de Subespaços

Do corolário anterior segue que um subespaço vetorial $\mathbb{W}$ pode ter bases diferentes, mas todas possuem o mesmo número de elementos. Este número de elementos é uma característica do subespaço $\mathbb{W}$ e é chamado de dimensão de $\mathbb{W}$.

Definição 5.8. A **dimensão** de um subespaço $\mathbb{W}$ é o número de vetores de uma de suas bases. A dimensão do subespaço $\{\bar{0}\}$ é igual a zero. A dimensão de um subespaço $\mathbb{W}$ é denotada por $\dim(\mathbb{W})$.

Exemplo 5.32. A dimensão do $\mathbb{R}^n$ é n, pois como foi mostrado no Exemplo 5.26 na página 220, $E_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $E_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $E_n = (0, \ldots, 0, 1)$ formam uma base do $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 5.33. A dimensão do subespaço $\mathbb{V} = \{(\alpha, \beta, \alpha + \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ do $\mathbb{R}^3$ é 2, pois como foi mostrado no Exemplo 5.27 na página 221, $\{V_1 = (1, 0, 1), V_2 = (0, 1, 1)\}$ é uma base para $\mathbb{V}$.

Exemplo 5.34. A dimensão do subespaço $\mathbb{V} = \{(a + c, b + c, a + b + 2c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ é 2 pois como foi mostrado no Exemplo 5.31, $\{V_1 = (1, 0, 1), V_2 = (0, 1, 1)\}$ é uma base para $\mathbb{V}$.

Exemplo 5.35. Pelo Exemplo 5.28 na página 221 uma reta que passa pela origem tem dimensão 1 e pelo Exemplo 5.29 na página 221 um plano que passa pela origem tem dimensão 2.

Teorema 5.8. *Seja $\mathbb{W}$ um subespaço de dimensão $m > 0$. Se $V_1, \ldots, V_m \in \mathbb{W}$ são L.I., então eles geram o subespaço $\mathbb{W}$ e portanto formam uma base de $\mathbb{W}$.*

Demonstração. Sejam $V_1, \ldots, V_m$ vetores L.I. e seja V um vetor qualquer do subespaço $\mathbb{W}$. Vamos mostrar que V é combinação linear de $V_1, \ldots, V_m$. Considere a equação vetorial

$$x_1V_1 + x_2V_2 + \ldots + x_mV_m + x_{m+1}V = \bar{0} \tag{5.20}$$

Pelo Teorema 5.6, $V_1, \ldots, V_m, V$ são L.D., pois são $m+1$ vetores em um subespaço de dimensão m. Então a equação (5.20) admite solução não trivial, ou seja, pelo menos um $x_i \neq 0$. Mas, $x_{m+1} \neq 0$, pois caso contrário, $V_1, \ldots, V_m$ seriam L.D. Então, multiplicando-se a equação (5.20) por $1/x_{m+1}$ e subtraindo $(x_1/x_{m+1})V_1 + (x_2/x_{m+1})V_2 + \ldots + (x_m/x_{m+1})V_m$, obtemos

$$V = -\left(\frac{x_1}{x_{m+1}}\right)V_1 - \ldots - \left(\frac{x_m}{x_{m+1}}\right)V_m\,.$$

$\square$

Dos resultados anteriores, vemos que se a dimensão de um subespaço, $\mathbb{W}$, é $m > 0$, então basta conseguirmos m vetores L.I. em $\mathbb{W}$, que teremos uma base (Teorema 5.8) e não podemos conseguir mais que m vetores L.I. (Teorema 5.6).

Exemplo 5.36. Do Teorema 5.8 segue que n vetores L.I. do $\mathbb{R}^n$ formam uma base de $\mathbb{R}^n$. Por exemplo, 3 vetores L.I. do $\mathbb{R}^3$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

Exercícios Numéricos (respostas na página 334)

5.3.1. Quais dos seguintes conjuntos de vetores formam uma base para o $\mathbb{R}^3$?

(a) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\}$;

(b) $\{(1, -1, 0), (3, -1, 2)\}$;

(c) $\{(0, 0, 1), (-1, 1, 1), (1, 1, 0)\}$;

5.3.2. Encontre as dimensões dos seguintes subespaços do $\mathbb{R}^3$:

(a) Todos os vetores da forma (a, b, c), onde $b = a$;

(b) Todos os vetores da forma (a, b, c), onde $a = 0$;

(c) Todos os vetores da forma $(a - b, b + c, 2a - b + c)$.

5.3.3. Encontre as dimensões dos seguintes subespaços do $\mathbb{R}^4$:

(a) Todos os vetores da forma (a, b, c, d), onde $d = a + b$;

(b) Todos os vetores da forma (a, b, c, d), onde $c = a - b$ e $d = a + b$;

(c) Todos os vetores da forma $(a + c, a - b, b + c, -a + b)$.

5.3.4. Determine os valores de a para os quais $\{(a^2, 0, 1), (0, a, 2), (1, 0, 1)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$.

5.3.5. Encontre os valores de λ tais que o sistema homogêneo $(A - \lambda I_n)X = \bar{0}$ tem solução não trivial e para estes valores de λ, encontre uma base para o espaço solução, para as matrizes A dadas:

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$;

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$;

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

5.3.6. Sejam $V_1 = (2, 1, 3)$, $V_2 = (3, -1, 4)$ e $V_3 = (2, 6, 4)$.

(a) Mostre que V_1, V_2 e V_3 são L.D.

(b) Mostre que V_1 e V_2 são L.I.

(c) Qual a dimensão do subespaço gerado por V_1, V_2 e V_3, $[V_1, V_2, V_3]$.

(d) Dê uma interpretação geométrica para o subespaço $[V_1, V_2, V_3]$.

5.3.7. Dados $V_1 = (1, 1, 1)$ e $V_2 = (3, -1, 4)$:

(a) Os vetores V_1 e V_2 geram o $\mathbb{R}^3$? Justifique.

(b) Seja V_3 um terceiro vetor do $\mathbb{R}^3$. Quais as condições sobre V_3, para que $\{V_1, V_2, V_3\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^3$?

(c) Encontre um vetor V_3 que complete junto com V_1 e V_2 uma base do $\mathbb{R}^3$.

5.3.8. Seja $\mathbb{W}$ o plano $x + 2y + 4z = 0$. Obtenha uma base $\{V_1, V_2, V_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que V_1 e V_2 pertençam a $\mathbb{W}$.

Exercícios usando o MATLAB

5.3.9. (a) Defina os vetores `V1=[1;2;3]`, `V2=[3;4;5]` e `V3=[5;6;7]`. Defina o vetor `V=randi(3,1)`. Verifique se `V` é combinação linear de `V1`, `V2` e `V3`.

(b) Defina `M=randi(3,5)`. Verifique se os vetores definidos pelas colunas de `M` são combinação linear de `V1`, `V2` e `V3`. Tente explicar o resultado.

(c) Verifique se `V1`, `V2` e `V3` são linearmente independentes. Se eles forem linearmente dependentes, escreva um deles como combinação linear dos outros e verifique o resultado.

5.3.10. Defina `A=randi(3,2)*randi(2,5,2)`. Verifique se as colunas de `A` são linearmente independentes. Se elas forem linearmente dependentes, escreva três das colunas de `A` como combinação linear das outras duas.

5.3.11. Defina a matriz `A=randi(4,3)*randi(3,5,2)`. Considere o subespaço gerado pelas colunas de `A`. Extraia das colunas de `A` uma base para este subespaço.

5.3.12. Defina a matriz `A=randi(4,2)`. Verifique que as colunas de A são L.I. Considere o conjunto formado pelas colunas de `A`. Complete este conjunto até obter uma base do $\mathbb{R}^4$.

5.3.13. (a) Defina a matriz `A=randi(4,3)*randi(3,5,2)`. Considere o subespaço gerado pelas colunas de `A`. Obtenha uma base para este subespaço, cujo primeiro vetor é a soma das duas primeiras colunas de `A`.

(b) Defina a matriz `B=A*randi(5,2)`. Sejam `V1`, `V2` as colunas de `B`, complete a uma base do subespaço gerado pelas colunas de `A`.

Exercícios Teóricos

5.3.14. Se V_1, V_2 e V_3 são vetores do $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{W}$ é o subespaço gerado por V_1, V_2 e V_3, então dimensão de $\mathbb{W}$ é igual a 3?

5.3.15. Suponha que $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ é uma base do $\mathbb{R}^n$. Mostre que se A é uma matriz $n \times n$ não singular, então $\{AX_1, AX_2, \ldots, AX_n\}$ também é uma base de $\mathbb{R}^n$. E se A for singular?

5.3.16. Mostre que se $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ são subespaços do $\mathbb{R}^3$ de dimensão 2, então $\mathbb{V} \cap \mathbb{W} \neq \{\bar{0}\}$. O mesmo seria verdade se estes fossem subespaços do $\mathbb{R}^4$? (Sugestão: $x_1V_1 + x_2 = y_1W_1 + y_2W_2 \in \mathbb{V} \cap \mathbb{W}$ se, e somente se, $x_1V_1 + x_2V_2 - y_1W_1 - y_2W_2 = \bar{0}$.)

5.3.17. Mostre que em um subespaço de dimensão m, um conjunto de vetores L.I. tem no máximo m vetores.

5.4 Produto Escalar em R-n

5.4.1 Produto Interno

Vimos que podemos estender a soma e a multiplicação de vetores por escalar para o $\mathbb{R}^n$. Podemos estender também os conceitos de produto escalar e ortogonalidade.

Definição 5.9. (a) Definimos o **produto escalar ou interno** de dois vetores $X = (x_1, \ldots, x_n)$ e $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ por

$$X \cdot Y = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i\,.$$

(b) Definimos a **norma** de um vetor $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ por

$$||X|| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,.$$

Escrevendo os vetores como matrizes colunas, o produto interno de dois vetores $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ pode ser escrito em termos do produto de matrizes como $X \cdot Y = X^tY$.

Exemplo 5.37. Sejam $V = (1, -2, 4, 3, 5)$ e $W = (5, 3, -1, -2, 1)$ vetores do $\mathbb{R}^5$. O produto escalar entre V e W é dado por

$$V \cdot W = (1)(5) + (-2)(3) + (4)(-1) + (3)(-2) + (5)(1) = -6.$$

As normas de V e W são dadas por

$$||V|| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{55},$$

$$||W|| = \sqrt{5^2 + 3^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{40}.$$

São válidas as seguintes propriedades para o produto escalar e a norma de vetores do $\mathbb{R}^n$.

Proposição 5.9. *Se X, Y e Z são vetores de $\mathbb{R}^n$ e α é um escalar, então*

(a) $(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$;

(b) $(\alpha X) \cdot Y = \alpha(X \cdot Y) = X \cdot (\alpha Y)$;

(c) $X \cdot Y = Y \cdot X$;

(d) $X \cdot X = ||X||^2 \geq 0$ *e* $||X|| = 0$ *se, e somente se,* $X = \bar{0}$;

(e) $|X \cdot Y| \leq ||X||||Y||$ *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)*;

(f) $||X + Y|| \leq ||X|| + ||Y||$ *(Desigualdade Triangular)*.

Demonstração. Sejam $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Usando o fato de que se os vetores são escritos como matrizes colunas, então o produto escalar pode ser escrito como o produto de matrizes, $X \cdot Y = X^t Y$, e as propriedades da álgebra matricial (Teorema 1.1 na página 7), temos que

(a) $X \cdot (Y + Z) = X^t(Y + Z) = X^t Y + X^t Z = X \cdot Y + X \cdot Z$;

(b) $\alpha(X \cdot Y) = \alpha(X^t Y) = (\alpha X^t)Y = (\alpha X)^t Y = (\alpha X) \cdot Y$; a outra igualdade é inteiramente análoga;

(c) $X \cdot Y = X^t Y = (X^t Y)^t = Y^t X = Y \cdot X$; pois $X^t Y$ é uma matriz 1×1 que é igual a sua transposta.

(d) $X \cdot X$ é uma soma de quadrados, por isso é sempre maior ou igual a zero e é zero se, e somente se, todas as parcelas são iguais a zero.

(e) A norma de $\lambda X + Y$ é maior ou igual a zero, para qualquer λ real. Assim,

$$0 \leq ||\lambda X + Y||^2 = (\lambda X + Y) \cdot (\lambda X + Y) = (||X||^2)\lambda^2 + (2X \cdot Y)\lambda + ||Y||^2,$$

para qualquer λ real. Logo, o discriminante deste trinômio tem que ser menor ou igual a zero. Ou seja, $4(X \cdot Y)^2 - 4||X||^2||Y||^2 \leq 0$. Logo, $X \cdot Y \leq ||X||\,||Y||$.

(f) Pelo item anterior temos que

$$\begin{aligned} ||X + Y||^2 &= (X + Y) \cdot (X + Y) = ||X||^2 + 2X \cdot Y + ||Y||^2 \\ &\leq ||X||^2 + 2|X \cdot Y| + ||Y||^2 \\ &\leq ||X||^2 + 2||X||||Y|| + ||Y||^2 \\ &\leq (||X|| + ||Y||)^2; \end{aligned}$$

Tomando a raiz quadrada, segue o resultado. □

Podemos, agora, estender o conceito de ângulo entre vetores para vetores do $\mathbb{R}^n$. Definimos o **ângulo entre dois vetores não nulos** $X = (x_1, \ldots, x_n)$ e $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ como sendo o número real θ entre 0 e π tal que

$$\cos\theta = \frac{X \cdot Y}{||X||\,||Y||}\,.$$

Segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz que o ângulo θ está bem definido, ou seja, que existe um tal número real θ e é único (verifique!).

Dizemos que dois vetores X e Y são **ortogonais** se $X \cdot Y = 0$. As propriedades do produto escalar permitem introduzir o conceito de bases ortogonais no $\mathbb{R}^n$. Antes temos o seguinte resultado.

Proposição 5.10. *Se $V_1, \ldots, V_k$ são vetores* **não nulos** *de $\mathbb{R}^n$* **ortogonais**, *isto é, $V_i \cdot V_j = 0$, para $i \neq j$, então $V_1, \ldots, V_k$ são L.I.*

Demonstração. Considere a equação vetorial

$$x_1 V_1 + \ldots + x_k V_k = \bar{0}\,. \tag{5.21}$$

Fazendo o produto escalar de ambos os membros de (5.21) com V_i, $i = 1, \ldots, k$ e aplicando as propriedades do produto escalar, obtemos

$$x_1(V_1 \cdot V_i) + \ldots + x_i(V_i \cdot V_i) + \ldots + x_k(V_k \cdot V_i) = 0\,. \tag{5.22}$$

Mas, $V_i \cdot V_j = 0$, se $i \neq j$. Assim, de (5.22) obtemos que

$$x_i ||V_i||^2 = 0\,.$$

Mas, como $V_i \neq \bar{0}$, então $||V_i|| \neq 0$ e $x_i = 0$, para $i = 1 \ldots, k$. $\square$

5.4.2 Bases Ortonormais

Definição 5.10. Seja $\{V_1, \ldots, V_m\}$ uma base de um subespaço vetorial.

a) Dizemos que $\{V_1, \ldots, V_m\}$ é uma **base ortogonal**, se $V_i \cdot V_j = 0$, para $i \neq j$, ou seja , se quaisquer dois vetores da base são ortogonais;

b) Dizemos que $\{V_1, \ldots, V_m\}$ é uma **base ortonormal**, se além de ser uma base ortogonal, $||V_i|| = 1$, ou seja, o vetor V_i é **unitário**, para $i = 1, \ldots m$.

Exemplo 5.38. A **base canônica do** $\mathbb{R}^n$, que é formada pelos vetores $E_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $E_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, ..., $E_n = (0, \ldots, 0, 1)$ é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^n$.

Vamos mostrar mais adiante que a partir de uma base qualquer de um subespaço do $\mathbb{R}^n$, podemos encontrar uma base deste subespaço que seja ortonormal. Para isto é fundamental a **projeção ortogonal** de um vetor V sobre um vetor não nulo W, que definimos por

$$\boxed{\operatorname{proj}_W V = \left(\frac{V \cdot W}{||W||^2}\right) W.}$$

Observe que a projeção ortogonal de um vetor V sobre um vetor não nulo W é um múltiplo escalar do vetor W. Além disso temos o seguinte resultado.

Proposição 5.11. *Seja $W \in \mathbb{R}^n$ um vetor não nulo. Então, $V - \mathrm{proj}_W V$ é ortogonal a W, para qualquer vetor $V \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Precisamos calcular o produto escalar de W com $V - \mathrm{proj}_W V$:

$$(V - \mathrm{proj}_W V) \cdot W = V \cdot W - \left(\frac{V \cdot W}{||W||^2}\right) W \cdot W = 0.$$

Portanto, $V - \mathrm{proj}_W V$ é ortogonal a W. □

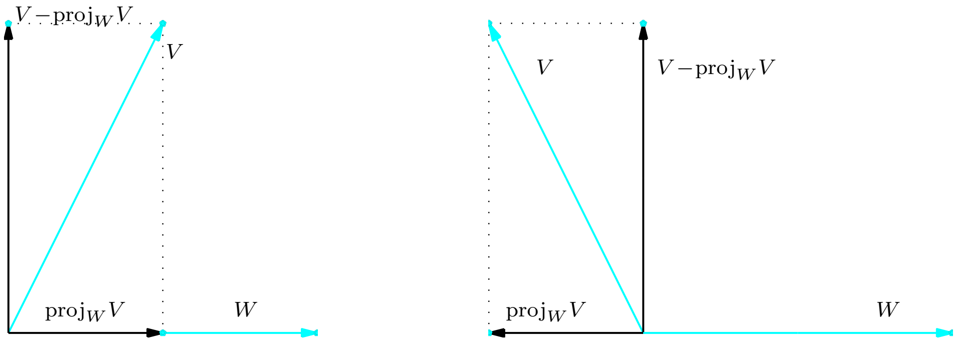


Figura 5.22: Projeção ortogonal do vetor V sobre o vetor W

O próximo resultado é uma generalização da Proposição 5.11.

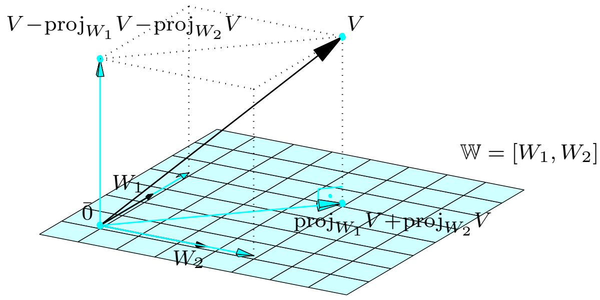


Figura 5.23: $V-\mathrm{proj}_{W_1}V-\mathrm{proj}_{W_2}V$ é ortogonal a W_1 e a W_2

Proposição 5.12. *Sejam $W_1, W_2, \ldots, W_k$ vetores não nulos do $\mathbb{R}^n$, ortogonais entre si, então para qualquer vetor V, $V - \mathrm{proj}_{W_1}V - \ldots - \mathrm{proj}_{W_k}V$ é ortogonal a W_i, para $i = 1, \ldots, k$.*

Demonstração. Vamos calcular o produto interno de $V - \mathrm{proj}_{W_1}V - \ldots - \mathrm{proj}_{W_n}V$ com W_j, para $j = 1, \ldots, n$.

$$\left(V - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{proj}_{W_k}V\right) \cdot W_j = V \cdot W_j - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{V \cdot W_k}{||W_k||^2}\right) W_k \cdot W_j = V \cdot W_j - \left(\frac{V \cdot W_j}{||W_j||^2}\right) W_j \cdot W_j = 0,$$

pois $W_k \cdot W_j = 0$, se $j \neq k$. □

Vamos mostrar a seguir, que a partir de uma base qualquer de um subespaço podemos encontrar uma base ortonormal com a propriedade de que o primeiro vetor da nova base seja paralelo ao primeiro vetor da base anterior. Nas Figuras 5.24 e 5.25 vemos como isto é possível no caso em que o subespaço é o $\mathbb{R}^3$, já que o $\mathbb{R}^3$ é subespaço dele mesmo.

Teorema 5.13. *Seja $\{V_1, \ldots, V_m\}$ uma base de um subespaço $\mathbb{W}$ do $\mathbb{R}^n$. Então, existe uma base $\{U_1, \ldots, U_m\}$ de $\mathbb{W}$ que é ortonormal e tal que $U_1 = \left(\frac{1}{||V_1||}\right) V_1$.*

Demonstração. Usaremos o chamado **processo de ortogonalização de Gram-Schmidt** para construir uma base ortogonal. Depois "dividiremos" cada vetor da base encontrada pela sua norma, de forma a obtermos vetores de norma igual a um e ortogonais.

(a) Sejam

$$
\begin{array}{rcl}
W_1 & = & V_1\,, \\
W_2 & = & V_2 - \mathrm{proj}_{W_1} V_2\,, \\
W_3 & = & V_3 - \mathrm{proj}_{W_1} V_3 - \mathrm{proj}_{W_2} V_3\,, \\
 & \ldots & \\
W_m & = & V_m - \mathrm{proj}_{W_1} V_m - \mathrm{proj}_{W_2} V_m \ldots - \mathrm{proj}_{W_{m-1}} V_m.
\end{array}
$$

Pela Proposição 5.11, segue que W_2 é ortogonal a W_1 e $W_2 \neq \bar{0}$, pois V_1 e V_2 são L.I. Assim, W_1 e W_2 formam uma base ortogonal do subespaço gerado por V_1 e V_2. Agora, supondo que $W_1, \ldots, W_{m-1}$ seja uma base ortogonal do subespaço gerado por $V_1, \ldots, V_{m-1}$, segue da Proposição 5.12, que W_m é ortogonal a $W_1, \ldots, W_{m-1}$. $W_m \neq \bar{0}$, pois caso contrário, V_m pertenceria ao subespaço $[W_1, \ldots, W_{m-1}] = [V_1, \ldots, V_{m-1}]$. Como $W_1, \ldots, W_m$ são ortogonais não nulos, pela Proposição 5.10 na página 235, eles são L.I. e portanto formam uma base do subespaço $\mathbb{W}$.

(b) Sejam, agora

$$U_1 = \left(\frac{1}{||W_1||}\right) W_1, \quad U_2 = \left(\frac{1}{||W_2||}\right) W_2, \quad \ldots, \quad U_m = \left(\frac{1}{||W_m||}\right) W_m \,.$$

Assim, $\{U_1, \ldots, U_m\}$ é uma base ortonormal para o subespaço $\mathbb{W}$.

$\square$

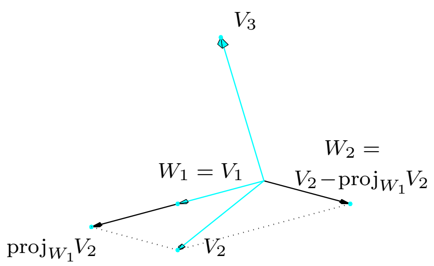


Figura 5.24: $W_1 = V_1$ e $W_2 = V_2 - \mathrm{proj}_{W_1} V_2$

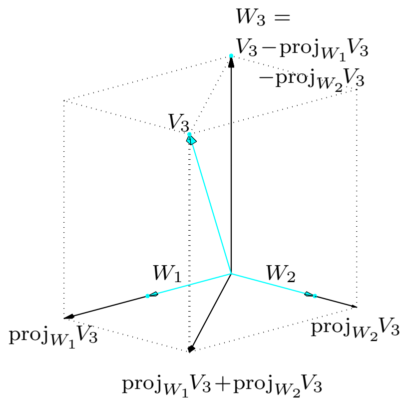


Figura 5.25: $W_3 = V_3 - \mathrm{proj}_{W_1} V_3 - \mathrm{proj}_{W_2} V_3$

Exemplo 5.39. Seja $\mathbb{W} = \mathbb{R}^3$. Considere a base formada pelos vetores $V_1 = (1, 1, 1)$, $V_2 = (0, 0, 1)$ e $V_3 = (1, 0, 0)$. Vamos encontrar uma base ortonormal para $\mathbb{V}$ cujo primeiro vetor seja múltiplo escalar de V_1. Sejam

$$
\begin{aligned}
W_1 &= V_1 = (1,1,1)\\
W_2 &= V_2 - \mathrm{proj}_{W_1} V_2 = V_2 - \left(\frac{V_2 \cdot W_1}{||W_1||^2}\right) W_1 = (0,0,1) - \frac{1}{3}(1,1,1) = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})\\
W_3 &= V_3 - \mathrm{proj}_{W_1} V_3 - \mathrm{proj}_{W_2} V_3\\
&= V_3 - \left(\frac{V_3 \cdot W_1}{||W_1||^2}\right) W_1 - \left(\frac{V_3 \cdot W_2}{||W_2||^2}\right) W_2\\
&= (1,0,0) - \frac{1}{3}(1,1,1) - \frac{-1/3}{2/3}(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)
\end{aligned}
$$

Como $||W_1|| = \sqrt{3}$, $||W_2|| = \sqrt{2/3}$, $||W_3|| = 1/\sqrt{2}$, temos que

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \left(\frac{1}{||W_1||}\right) W_1 = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}),\\
U_2 &= \left(\frac{1}{||W_2||}\right) W_2 = (-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3})\\
U_3 &= \left(\frac{1}{||W_3||}\right) W_3 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0).
\end{aligned}
$$

Exercícios Numéricos (respostas na página 341)

5.4.1. Sejam $X = (1,1,-2)$ e $Y = (a,-1,2)$. Para quais valores de a, X e Y são ortogonais?

5.4.2. Sejam $X = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ e $Y = (a, 1/\sqrt{2}, -b)$. Para quais valores de a e b, o conjunto $\{X, Y\}$ é ortonormal?

5.4.3. Use o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para encontrar uma base ortonormal para o subespaço de $\mathbb{R}^4$ que tem como base $\{(1, 1, -1, 0), (0, 2, 0, 1), (-1, 0, 0, 1)\}$.

5.4.4. Use o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para transformar a base do $\mathbb{R}^3$ $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 2, 3)\}$ em uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$.

5.4.5. Encontre uma base ortonormal para o subespaço de $\mathbb{R}^3$ que consiste de todos os vetores (a, b, c) tais que $a + b + c = 0$.

5.4.6. Encontre uma base ortonormal para o subespaço do $\mathbb{R}^4$ que consiste de todos os vetores (a, b, c, d) tais que $a - b - 2c + d = 0$.

5.4.7. Encontre uma base ortonormal para o espaço solução do sistema homogêneo

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 0. \end{array} \right.$$

5.4.8. Considere as retas $(x, y, z) = t(1, 2, -3)$ e $(x, y, z) = (0, 1, 2) + s(2, 4, -6)$ em $\mathbb{R}^3$. Encontre a equação geral do plano que contem estas duas retas e ache uma base ortonormal para este plano. Complete esta base a uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

5.4.9. Ache as equações dos planos em $\mathbb{R}^3$ ortogonais ao vetor $(2, 2, 2)$, que distam $\sqrt{3}$ do ponto $(1, 1, 1)$. Estes planos são subespaços de $\mathbb{R}^3$? Caso afirmativo, encontre uma base para eles.

Exercícios Teóricos

5.4.10. Mostre que para todo vetor $V \in \mathbb{R}^n$ e todo escalar α, $||\alpha V|| = |\alpha| \, ||V||$.

5.4.11. Mostre que se V é ortogonal a W, então V é ortogonal a αW, para para todo escalar α.

5.4.12. Mostre que se V é ortogonal a $W_1, \ldots, W_k$, então V é ortogonal a qualquer combinação linear de $W_1, \ldots, W_k$.

5.4.13. Sejam X, Y e Z vetores do $\mathbb{R}^n$. Prove que se $X \cdot Y = X \cdot Z$, então $Y - Z$ é ortogonal a X.

5.4.14. Mostre que se $W_1, \ldots, W_k$ são vetores não nulos ortogonais entre si e $X = \alpha_1 W_1 + \ldots + \alpha_k W_k$, então $X = \mathrm{proj}_{W_1} X + \ldots + \mathrm{proj}_{W_k} X$.

5.4.15. Sejam $V_1, \ldots, V_k$ vetores linearmente dependentes. Mostre que, aplicando-se o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aos vetores $V_1, \ldots, V_k$, se obtem um vetor W_i que é nulo, para algum $i = 1, \ldots, k$. (Sugestão: Seja V_i o primeiro vetor tal que $V_i \in [V_1, \ldots, V_{i-1}] = [W_1, \ldots, W_{i-1}]$ e use o exercício anterior.)

5.4.16. Seja $S = \{W_1, \ldots, W_n\}$ uma base ortonormal do $\mathbb{R}^n$. Mostre que um vetor qualquer V do $\mathbb{R}^n$ pode ser escrito como $V = \alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2 + \ldots + \alpha_n W_n$, em que $\alpha_i = V \cdot W_i$, para $i = 1, \ldots, n$.

5.4.17. Mostre que o conjunto de todos os vetores do $\mathbb{R}^n$ ortogonais a um dado vetor $V = (a_1, \ldots, a_n)$,

$$\mathbb{W} = \{X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid X \cdot V = 0\} \quad \text{é um subespaço do } \mathbb{R}^n.$$

5.4.18. Demonstre que, se V e W são vetores quaisquer do $\mathbb{R}^n$, então:

(a) $V \cdot W = \frac{1}{4}[||V + W||^2 - ||V - W||^2]$ (identidade polar);

(b) $||V + W||^2 + ||V - W||^2 = 2(||V||^2 + ||W||^2)$ (lei do paralelogramo).

(Sugestão: desenvolva os segundos membros das igualdades acima observando que $||V + W||^2 = (V + W) \cdot (V + W)$ e $||V - W||^2 = (V - W) \cdot (V - W)$)

5.4.19. Seja $\{U_1, \ldots, U_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Se $A = [\, U_1 \ \ldots \ U_n \,]$ é uma matriz $n \times n$ cujas colunas são os vetores $U_1, \ldots, U_n$, então A é invertível e $A^{-1} = A^t$. (Sugestão: mostre que $A^t A = I_n$.)

5.4.20. Mostre que o ângulo entre dois vetores não nulos $X = (x_1, \ldots, x_n)$ e $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, que é definido como sendo o número real θ entre 0 e π tal que

$$\cos\theta = \frac{X \cdot Y}{||X||\,||Y||},$$

está bem definido, ou seja, que existe um tal número real θ e é único. (Sugestão: mostre, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, que
$-1 \leq \dfrac{X \cdot Y}{||X||\,||Y||} \leq 1$.)

Teste do Capítulo

---

1. Sejam S_1 e S_2 subconjuntos finitos de um espaço vetorial $\mathbb{V}$ tais que S_1 seja um subconjunto de S_2 ($S_1 \neq S_2$). Se S_2 é linearmente dependente, então:

(a) S_1 pode ser linearmente dependente? Em caso afirmativo dê um exemplo.

(b) S_1 pode ser linearmente independente? Em caso afirmativo dê um exemplo.

---

2. Considere o seguinte subconjunto do $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{W} = \{(a - c, a + b, b + c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

(a) $\mathbb{W}$ é um subespaço? Justifique.

(b) Em caso afirmativo, determine a dimensão de $\mathbb{W}$.

---

3. Considere o vetor $f_1 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

(a) Escolha f_2 de forma que $\mathcal{S} = \{f_1, f_2\}$ seja base ortonormal do $\mathbb{R}^2$. Mostre que $\mathcal{S}$ é base.

(b) Considere $V = (\sqrt{3}, 3)$. Escreva V como combinação linear dos elementos de $\mathcal{S}$.

Capítulo 6

Diagonalização

6.1 Diagonalização de Matrizes

6.1.1 Motivação

Vamos considerar o problema de encontrar as funções que dão a evolução das populações de duas espécies, S_1 e S_2, convivendo em um mesmo ecossistema no tempo $t > 0$. Vamos denotar as populações das espécies S_1 e S_2 em um instante t por $x_1(t)$ e $x_2(t)$, respectivamente.

Inicialmente vamos supor que a taxa de crescimento da população de uma espécie não depende do que ocorre com a outra espécie e que esta taxa é proporcional a sua população existente (ou equivalentemente que a taxa de crescimento relativa é constante). Ou seja, vamos supor que

$$\dot{x}_1(t) = \frac{dx_1}{dt}(t) = ax_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{dy_1}{dt}(t) = dx_2(t)$$

em que $a, d \in \mathbb{R}$. Temos aqui um sistema de equações diferenciais, ou seja, um sistema de equações que envolvem derivadas das funções que são incógnitas. Neste caso as duas equações são desacopladas, isto é, podem ser resolvidas independentemente. A solução do sistema é $x_1(t) = x_1(0)e^{at}$ e $x_2(t) = x_2(0)e^{dt}$, para $t \geq 0$.

Vamos supor, agora, que as duas populações interagem de forma que a taxa de crescimento da população de uma espécie depende de forma linear não somente da sua população existente, mas também da população existente da outra espécie. Ou seja, vamos supor que

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= ax_1(t) + bx_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= cx_1(t) + dx_2(t) \end{aligned}$$

Por exemplo, se os indivíduos de uma espécie competem com os da outra por alimento ($a, d > 0$ e $b, c < 0$), ou os indivíduos da espécie S_1 são predadores dos da outra ($a, b, d > 0$ e $c < 0$). Neste caso a solução de uma equação depende da outra. Podemos escrever este sistema na forma de uma equação diferencial matricial

$$\dot{X}(t) = AX(t), \tag{6.1}$$

em que $\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$. Vamos supor que existam matrizes P e D tais que

$$A = PDP^{-1}, \tag{6.2}$$

em que $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$. Substituindo-se (6.2) em (6.1) obtemos

$$\dot{X}(t) = PDP^{-1}X(t).$$

Multiplicando-se à esquerda por P^{-1}, obtemos

$$P^{-1}\dot{X}(t) = DP^{-1}X(t).$$

Fazendo a mudança de variável $Y(t) = P^{-1}X(t)$, obtemos

$$\dot{Y}(t) = DY(t),$$

que pode ser escrito na forma

$$\begin{array}{rcl} \dot{y}_1(t) & = & \lambda_1 y_1(t) \\ \dot{y}_2(t) & = & \lambda_2 y_2(t) \end{array}$$

Estas equações estão desacopladas e têm soluções dadas por $y_1(t) = y_1(0)e^{\lambda_1 t}$ e $y_2(t) = y_2(0)e^{\lambda_2 t}$. Assim a solução da equação (6.1) é

$$X(t) = PY(t) = P\begin{bmatrix} y_1(0)e^{\lambda_1 t} \\ y_2(0)e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} Y(0) = P\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} P^{-1}X(0).$$

Observe que o que possibilitou a resolução do sistema de equações foi a hipótese feita de que a matriz A pode ser escrita como $A = PDP^{-1}$, em que D é uma matriz diagonal.

Vamos descobrir como podemos determinar matrizes P e D, quando elas existem, tais que $A = PDP^{-1}$, ou equivalentemente, $D = P^{-1}AP$, com D sendo uma matriz diagonal. Chamamos **diagonalização** ao processo de encontrar as matrizes P e D.

6.1.2 Matrizes Semelhantes

Definição 6.1. Dizemos que uma matriz B, $n \times n$, é **semelhante** a uma matriz A, $n \times n$, se existir uma matriz P não singular tal que

$$B = P^{-1}AP$$

A relação de semelhança satisfaz as seguintes propriedades:

- toda matriz quadrada é semelhante a si mesma;
- se uma matriz A é semelhante a B, então B é semelhante a A e
- se A é semelhante a B e B é semelhante a C, então A é semelhante a C.

Deixamos como exercício a verificação destas propriedades.

Definição 6.2. Dizemos que uma matriz A, $n \times n$, é **diagonalizável**, se ela é semelhante a uma matriz diagonal. Ou seja, se existem matrizes Q e D tais que $A = Q^{-1}DQ$, em que D é uma matriz diagonal.

Exemplo 6.1. Toda matriz diagonal

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

é diagonalizável, pois

$$A = (I_n)^{-1} A I_n.$$

6.1.3 Autovalores e Autovetores

Se uma matriz A é diagonalizável, então existe uma matriz P tal que

$$P^{-1}AP = D\,, \tag{6.3}$$

em que D é uma matriz diagonal. Multiplicando à esquerda por P ambos os membros da equação anterior, obtemos

$$AP = PD\,. \tag{6.4}$$

Sejam

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \left[\; X_1 \quad X_2 \quad \ldots \quad X_n \;\right],$$

em que X_j é a coluna j de P. Observe que a j-ésima coluna de AP é AX_j e que a j-ésima coluna de PD é $\lambda_j X_j$ (Exercícios 1.1.14 e 1.1.13 na página 18). Assim, (6.4) pode ser reescrita como,

$$\left[\; AX_1 \quad AX_2 \quad \ldots \quad AX_n \;\right] = \left[\; \lambda_1 X_1 \quad \lambda_2 X_2 \quad \ldots \quad \lambda_n X_n \;\right].$$

Logo,

$$AX_j = \lambda_j X_j,$$

para $j = 1, \ldots n$. Ou seja, as colunas de P, X_j, e os elementos da diagonal de D, λ_j, satisfazem a equação

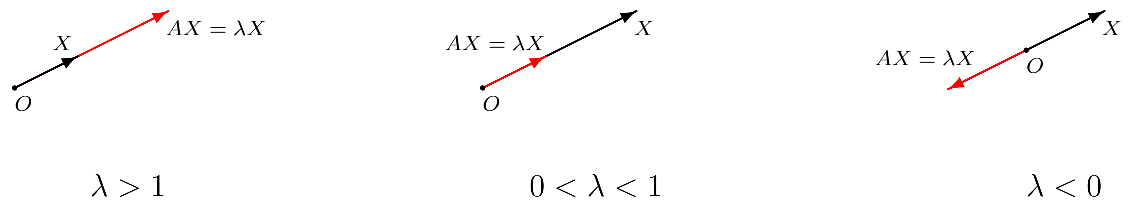
$$AX = \lambda X.$$

Isto motiva a seguinte definição.

Definição 6.3. Seja A uma matriz $n \times n$. Um número real λ é chamado **autovalor** (real) de A, se existe um vetor *não nulo* $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$, tal que

$$AV = \lambda V\,. \tag{6.5}$$

Um vetor *não nulo* que satisfaça (6.5), é chamado de **autovetor** de A.



Observe que a equação (6.5) pode ser escrita como

$$AV = \lambda I_n V$$

ou

$$(A - \lambda I_n)V = \bar{0}\,. \tag{6.6}$$

Como os autovetores são vetores não nulos, os autovalores são os valores de λ, para os quais o sistema $(A - \lambda I_n)X = \bar{0}$ tem solução não trivial. Mas, este sistema homogêneo tem solução não trivial se, e somente se, $\det(A - \lambda I_n) = 0$ (Teorema 2.15 na página 88). Assim temos um método para encontrar os autovalores e os autovetores de uma matriz A.

Proposição 6.1. *Seja A uma matriz $n \times n$.*

(a) Os autovalores de A são as raízes **reais** *do polinômio*

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) \tag{6.7}$$

(b) Para cada autovalor λ, os autovetores associados a λ são os vetores não nulos da solução do sistema

$$(A - \lambda I_n)X = \bar{0}\,. \tag{6.8}$$

Definição 6.4. Seja A uma matriz $n \times n$. O polinômio

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) \tag{6.9}$$

é chamado **polinômio característico de** A.

Assim, para determinarmos os autovalores de uma matriz A precisamos determinar as raízes reais do seu polinômio característico, que tem a forma $p(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$.

Um resultado sobre polinômios que muitas vezes é útil, é o que diz que se $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ são inteiros, então as suas raízes racionais (se existirem) são números inteiros e divisores do coeficiente do termo de grau zero a_0. Por exemplo, se $p(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$, então as possíveis raízes racionais são $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ e ± 6. Substituindo estes valores em $p(\lambda)$, vemos que $p(1) = 0$, ou seja, 1 é uma raíz de $p(\lambda)$. Finalmente, dividindo $p(\lambda)$ por $\lambda - 1$, obtemos que $p(\lambda) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 5\lambda - 6)$. Como as raízes de $-\lambda^2 + 5\lambda - 6$ são 2 e 3, então as raízes de $p(\lambda)$, são $1, 2$ e 3.

Exemplo 6.2. Vamos determinar os autovalores e autovetores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Para esta matriz o polinômio característico é

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4\,.$$

Como os autovalores de A são as raízes reais de $p(\lambda)$, temos que os autovalores de A são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$.

Agora, vamos determinar os autovetores associados aos autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$. Para isto vamos resolver os sistemas $(A - \lambda_1 I_2)X = \bar{0}$ e $(A - \lambda_2 I_2)X = \bar{0}$. Como

$$A - \lambda_1 I_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

então

$$(A - \lambda_1 I_2)X = \bar{0}$$

é

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & - & y & = & 0 \\ -2x & + & y & = & 0 \end{array} \right.$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{V}_1 = \{(\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}\,.$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_1 = 1$ acrescentado o vetor nulo. Agora,

$$(A - \lambda_2 I_2)X = \bar{0}$$

é

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{V}_2 = \{(-\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\},$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_2 = 4$ acrescentado o vetor nulo.

Exemplo 6.3. Vamos determinar os autovalores e autovetores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Para esta matriz o polinômio característico é

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I_4) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} \\
&= (2-\lambda)\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} - 2\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} \\
&= (2-\lambda)[(2-\lambda)^3 - 4(2-\lambda)] - 2[2(2-\lambda)^2 - 8] \\
&= (2-\lambda)^2[(2-\lambda)^2 - 4] - 4[(2-\lambda)^2 - 4] = [(2-\lambda)^2 - 4]^2
\end{aligned}$$

Portanto os autovalores de A são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 4$.

Agora, vamos determinar os autovetores associados aos autovalores λ_1 e λ_2. Para isto vamos resolver os sistemas $(A - \lambda_1 I_4)X = \bar{0}$ e $(A - \lambda_2 I_4)X = \bar{0}$. Como

$$(A - \lambda_1 I_4)X = AX = \bar{0}$$

é

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A forma escalonada reduzida da matriz aumentada do sistema é

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Assim, a solução geral do sistema $AX = \bar{0}$ é

$$\mathbb{V}_1 = \{(-\beta, \beta, -\alpha, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_1 = 0$ acrescentado o vetor nulo. E

$$(A - \lambda_2 I_4)X = \bar{0}$$

é

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A forma escalonada reduzida da matriz aumentada do sistema é

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Assim a solução geral do sistema é

$$\mathbb{V}_2 = \{(\alpha, \alpha, \beta, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_2 = 4$ acrescentado o vetor nulo.

Nos exemplos anteriores, para cada autovalor encontramos todos os autovetores associados a ele. Podemos observar que para cada autovalor λ, o conjunto dos autovalores associados a ele acrescentado o vetor nulo é um subespaço, já que é o conjunto solução de um sistema linear homogêneo $(A - \lambda I_n)X = \bar{0}$. Este subespaço recebe o nome de **autoespaço associado ao autovalor** λ.

Vamos enunciar e demonstrar o resultado principal deste capítulo. Já vimos que se uma matriz A é diagonalizável, então as colunas da matriz P, que faz a diagonalização, são autovetores associados a autovalores, que por sua vez são elementos da matriz diagonal D. Como a matriz P é invertível, estes autovetores são L.I. Vamos mostrar, a seguir, que esta é uma condição necessária e suficiente para que uma matriz seja diagonalizável.

Teorema 6.2. *Uma matriz A, $n \times n$, é diagonalizável se, e somente se, ela possui n autovetores linearmente independentes.*

Demonstração. Vamos primeiro provar que se A é diagonalizável, então ela possui n autovetores L.I. Se a matriz A é diagonalizável, então existe uma matriz P tal que

$$P^{-1}AP = D\,, \tag{6.10}$$

em que D é uma matriz diagonal. Multiplicando por P ambos os membros de (6.10), obtemos

$$AP = PD\,. \tag{6.11}$$

Sejam

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \end{bmatrix},$$

em que X_j é a coluna j de P. Assim, a j-ésima coluna de AP é AX_j e que a j-ésima coluna de PD é $\lambda_j X_j$ (Exercícios 1.1.14 e 1.1.13 na página 18). Portanto, de (6.11), temos que

$$AX_j = \lambda_j X_j\,.$$

Como a matriz P é invertível, pela Proposição 5.3 na página 197, os autovetores $X_1, \dots, X_n$ são L.I.

Suponha, agora, que $X_1, \dots, X_n$ são n autovetores linearmente independentes associados a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ respectivamente. Vamos definir as matrizes

$$P = [X_1\, X_2\, \dots, X_n] \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Como $AX_j = \lambda_j X_j$, para $j = 1, \ldots, n$, então

$$AP = PD\,. \tag{6.12}$$

Como $X_1, \ldots, X_n$ são L.I., a matriz P é invertível. Assim, multiplicando por P^{-1} à esquerda em (6.12) obtemos

$$D = P^{-1}AP.$$

Ou seja, A é semelhante a uma matriz diagonal e portanto é diagonalizável. □

Assim, se uma matriz A é diagonalizável e $D = P^{-1}AP$, então os autovalores de A formam a diagonal de D e n autovetores linearmente independentes associados aos autovalores formam as colunas de P.

O resultado que vem a seguir, garante que se conseguirmos para cada autovalor, autovetores L.I., então ao juntarmos todos os autovetores obtidos, eles continuarão sendo L.I.

Proposição 6.3. *Seja A uma matriz $n \times n$. Se $V_1^{(1)}, \ldots, V_{n_1}^{(1)}$ são autovetores L.I. associados a λ_1, $V_1^{(2)}, \ldots, V_{n_2}^{(2)}$ são autovetores L.I. associados a λ_2, ..., $V_1^{(k)}, \ldots, V_{n_k}^{(k)}$ são autovetores L.I. associados a λ_k, com $\lambda_1 \ldots \lambda_k$ distintos, então $\{V_1^{(1)}, \ldots, V_{n_1}^{(1)}, \ldots, V_1^{(k)}, \ldots, V_{n_k}^{(k)}\}$ é um conjunto L.I.*

Demonstração. Vamos demonstrar apenas para o caso em que temos dois autovalores diferentes. O caso geral é inteiramente análogo. Sejam $V_1^{(1)}, \ldots, V_{n_1}^{(1)}$ autovetores L.I. associados a λ_1 e $V_1^{(2)}, \ldots, V_{n_2}^{(2)}$ autovetores L.I. associados a λ_2. Precisamos mostrar que a única solução da equação

$$x_1^{(1)} V_1^{(1)} + \ldots + x_{k_1}^{(1)} V_{n_1}^{(1)} + x_1^{(2)} V_1^{(2)} + \ldots + x_{k_2}^{(2)} V_{n_2}^{(2)} = \bar{0} \tag{6.13}$$

é a solução trivial. Multiplicando a equação (6.13) por A e usando o fato de que os $V_i^{(j)}$ são autovetores, obtemos

$$x_1^{(1)} \lambda_1 V_1^{(1)} + \ldots + x_{n_1}^{(1)} \lambda_1 V_{n_1}^{(1)} + x_1^{(2)} \lambda_2 V_1^{(2)} + \ldots + x_{n_2}^{(2)} \lambda_2 V_{n_2}^{(2)} = \bar{0} \tag{6.14}$$

Multiplicando a equação (6.13) por λ_1, obtemos

$$x_{n_1}^{(1)} \lambda_1 V_1^{(1)} + \ldots + x_{n_1}^{(1)} \lambda_1 V_{n_1}^{(1)} + x_1^{(2)} \lambda_1 V_1^{(2)} + \ldots + x_{n_2}^{(2)} \lambda_1 V_{n_2}^{(2)} = \bar{0}\,. \tag{6.15}$$

Subtraindo a equação (6.14) da equação (6.15), obtemos

$$x_1^{(2)} (\lambda_2 - \lambda_1) V_1^{(2)} + \ldots + x_{n_2}^{(2)} (\lambda_2 - \lambda_1) V_{n_2}^{(2)} = \bar{0}\,.$$

Como $V_1^{(2)}, \ldots, V_{n_2}^{(2)}$ são L.I., temos que $x_1^{(2)} = \ldots = x_{n_2}^{(2)} = 0$. Agora, multiplicando a equação (6.13) por λ_2 e subtraindo da equação (6.15) obtemos

$$x_1^{(1)} (\lambda_2 - \lambda_1) V_1^{(1)} + \ldots + x_{n_1}^{(1)} (\lambda_2 - \lambda_1) V_{n_1}^{(1)} = \bar{0}\,.$$

Como $V_1^{(1)}, \ldots, V_{n_1}^{(1)}$ são L.I., temos que $x_1^{(1)} = \ldots = x_{n_1}^{(1)} = 0$. O que prova que todos os autovetores juntos são L.I. $\square$

Exemplo 6.4. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

já vimos no Exemplo 6.3 na página 254 que seu polinômio característico é $p(\lambda) = [(2-\lambda)^2 - 4]^2$, os seus autovalores são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 4$ e os autoespaços correspondentes são $\mathbb{V}_1 = \{(-\beta,\beta,-\alpha,\alpha) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$ e $\mathbb{V}_2 = \{(\alpha,\alpha,\beta,\beta) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$, respectivamente. Vamos encontrar, para cada autoespaço, o maior número possível de autovetores L.I., ou seja, vamos encontrar uma base para cada autoespaço. E o teorema anterior garante que se juntarmos todos estes autovetores eles vão continuar sendo L.I.

Para $\mathbb{V}_1$, temos que

$$(-\beta,\beta,-\alpha,\alpha) = (-\beta,\beta,0,0) + (0,0,-\alpha,\alpha) = \beta(-1,1,0,0) + \alpha(0,0,-1,1).$$

Assim, $V_1 = (-1,1,0,0)$ e $V_2 = (0,0,-1,1)$ geram $\mathbb{V}_1$ e como um não é múltiplo escalar do outro, eles são L.I. Portanto, formam uma base para $\mathbb{V}_1$. Assim, não podemos ter um número maior de autovetores L.I. associados a $\lambda_1 = 0$ (Teorema 5.6 na página 224).

Para $\mathbb{V}_2$, temos que

$$(\alpha,\alpha,\beta,\beta) = \alpha(1,1,0,0) + \beta(0,0,1,1).$$

Assim, $V_3 = (1,1,0,0)$ e $V_4 = (0,0,1,1)$ geram $\mathbb{V}_2$ e como um não é múltiplo escalar do outro, eles são L.I. Portanto, formam uma base para $\mathbb{V}_2$. Assim, não podemos ter um número maior de autovetores L.I. associados a $\lambda_2 = 4$ (Teorema 5.6 na página 224).

Como V_1 e V_2 são autovetores L.I. associados a λ_1 e V_3 e V_4 são autovetores L.I. associados a λ_2, então pela Proposição 6.3 na página 258 os autovetores juntos V_1, V_2, V_3 e V_4 são L.I. Assim, a matriz A é diagonalizável e as matrizes

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = [\, V_1 \; V_2 \; V_3 \; V_4 \,] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$D = P^{-1}AP.$$

Exemplo 6.5. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Já vimos no Exemplo 6.2 na página 253 que o seu polinômio característico é $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 5\lambda + 4$, que os seus autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$ e que os autoespaços correspondentes são $\mathbb{V}_1 = \{(\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ e $\mathbb{V}_2 = \{(-\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, respectivamante.

Para $\lambda_1 = 1$, temos que $\{V_1 = (1, 2)\}$ é uma base de $\mathbb{V}_1$. Assim, não podemos ter mais autovetores L.I. associados a λ_1. De forma análoga para $\lambda_2 = 4$, $\{V_2 = (-1, 1)\}$ é um conjunto com o maior número possível de autovetores L.I. associados a λ_2. Assim, a matriz A é diagonalizável e as matrizes

$$P = [\, V_1 \; V_2 \,] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$D = P^{-1}AP.$$

Exemplo 6.6. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O seu polinômio característico é $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2$, assim A possui um único autovalor: $\lambda_1 = 0$. O autoespaço correspondente a $\lambda_1 = 0$ é

$$\mathbb{V}_1 = \{(\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Assim, para $\lambda_1 = 0$, temos que $\{V_1 = (1, 0)\}$ é uma base de $\mathbb{V}_1$. Portanto, não podemos ter mais autovetores L.I. associados a λ_1 e como só temos um autovalor não podemos ter mais autovetores L.I. Portanto, pelo Teorema 6.2 na página 256, a matriz A **não** é diagonalizável, ou seja, não existem matrizes P e D tais que $D = P^{-1}AP$.

Exercícios Numéricos (respostas na página 344)

6.1.1. Ache o polinômio característico, os autovalores e os autovetores de cada matriz:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

6.1.2. Ache bases para os auto-espaços associados a cada autovalor

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6.1.3. Verifique quais das matrizes são diagonalizáveis:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

6.1.4. Ache para cada matriz A, se possível, uma matriz não-singular P tal que $P^{-1}AP$ seja diagonal:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Exercícios usando o MATLAB

`>> syms x y z` diz ao MATLAB que as variáveis `x`, `y` e `z` são simbólicas;

`>> A=[a11,a12,...,a1n;a21,a22,...; ...,amn]` cria uma matriz, m por n, usando os elementos `a11, a12, ..., amn` e a armazena numa variável `A`;

>> A=[A1,...,An] cria uma matriz A formada pelas matrizes, definidas anteriormente, A1, ..., An colocadas uma ao lado da outra;

>> solve(expr) determina a solução da equação expr=0. Por exemplo, >> solve(x^2-4) determina as soluções da equação $x^2 - 4 = 0$;

>> subs(expr,x,num) substitui na expressão expr a variável x por num.

>> [P,D]=eig(A) determina matrizes P e D (diagonal) tais que AP=PD.

inv(A) calcula a inversa da matriz A.

A=sym(A) converte a matriz A numa matriz em que os elementos são armazenados no formato simbólico. A função numeric faz o processo inverso.

Comandos do pacote GAAL:

>> A=randi(n) ou >> A=randi(m,n) cria uma matriz n por n ou m por n, respectivamente, com elementos inteiros aleatórios.

>> escalona(A) calcula passo a passo a forma reduzida escalonada da matriz A.

6.1.5. Defina as matrizes B=sym(randi(2)) e A=[B-B',zeros(2,1);zeros(1,2),randi]. A matriz A é diagonalizável? Por que?

6.1.6. Defina as matrizes L=[eye(2),zeros(2,1);randi(1,2),0] e A=sym(L*L'). Determine o polinômio característico de A, os autovalores e um conjunto de autovetores linearmente independentes com o maior número possível de vetores. Encontre matrizes P e D (diagonal) tais que inv(P)*A*P=D, se possível. Verifique o resultado. Use o comando [P,D]=eig(A) e compare com as matrizes que você encontrou.

6.1.7. Defina a=randi,b=randi e A=sym([2*a,a-b,a-b;0,a+b,b-a;0,b-a,a+b]). Determine o polinômio característico de A, os autovalores e um conjunto de autovetores linearmente independentes com o maior número possível de vetores. Encontre matrizes `P` e `D` (diagonal) tais que `inv(P)*A*P=D`, se possível. Verifique o resultado. Use o comando `[P,D]=eig(A)` e compare com as matrizes que você encontrou.

6.1.8. Defina `a=randi,b=randi` e `A=sym([a,0,b;2*b,a-b,2*b;b,0,a])`. Determine o polinômio característico de `A`, os autovalores e um conjunto de autovetores linearmente independentes com o maior número possível de vetores. Encontre matrizes `P` e `D` (diagonal) tais que `inv(P)*A*P=D`, se possível. Verifique o resultado. Use o comando `[P,D]=eig(A)` e compare com as matrizes que você encontrou.

6.1.9. Use o MATLAB para resolver os **Exercícios Numéricos**

Exercícios Teóricos

6.1.10. Demonstre:

(a) A é semelhante a A;

(b) Se A é semelhante a B, então B é semelhante a A;

(c) Se A é semelhante a B e B é semelhante a C, então A é semelhante a C.

6.1.11. Seja λ um autovalor (fixo) de A. Demonstre que o conjunto formado por todos os autovetores de A associados a λ, juntamente com o vetor nulo, é um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Este subespaço é chamado de **autoespaço associado a** λ.

6.1.12. Demonstre que se A e B são semelhantes, então possuem os mesmos polinômios característicos e portanto os mesmos autovalores.

6.1.13. Demonstre que se A é uma matriz triangular superior, então os autovalores de A são os elementos da diagonal principal de A.

6.1.14. Demonstre que A e A^t possuem os mesmos autovalores. O que podemos dizer sobre os autovetores de A e A^t?

6.1.15. Seja λ um autovalor de A com autovetor associado X. Demonstre que λ^k é um autovalor de $A^k = A \ldots A$ associado a X, em que k é um inteiro positivo.

6.1.16. Uma matriz A é chamada **nilpotente** se $A^k = \bar{0}$, para algum inteiro positivo k. Demonstre que se A é nilpotente, então o único autovalor de A é 0. (Sugestão: use o exercício anterior)

6.1.17. Seja A uma matriz $n \times n$.

(a) Mostre que o determinante de A é o produto de todas as raízes do polinômio característico de A; (Sugestão: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_n)$.)

(b) Mostre que A é singular se, e somente se, 0 for um autovalor de A.

6.1.18. Seja λ um autovalor da matriz não-singular A com autovetor associado X. Mostre que $1/\lambda$ é um autovalor de A^{-1} com autovetor associado X.

6.1.19. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Ache as condições necessárias e suficientes para que A seja diagonalizável.

6.1.20. Se V e W são autovetores associados a um autovalor λ, então $W - \mathrm{proj}_V W$ é também um autovetor associado a λ? E se V e W forem autovetores associados a autovalores diferentes?

6.2 Diagonalização de Matrizes Simétricas

6.2.1 Motivação

O problema da identificação de uma **cônica** (curva no plano descrita por uma equação de $2^{\underline{o}}$ grau em x e y) através da sua equação é facilmente resolvido se a equação **não** possui um termo em que aparece o produto das duas variáveis. Mas, ao contrário, se aparece este termo misto, temos que fazer uma mudança de sistema de coordenadas de forma que no novo sistema ele não apareça. Vejamos o exemplo seguinte.

Exemplo 6.7. Considere o problema de identificar uma cônica representada pela equação

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 = 4\,. \tag{6.16}$$

Usando matrizes, esta equação pode ser escrita como

$$[3x + y \quad x + 3y]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4$$

ou

$$[x \quad y]\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4$$

ou ainda,

$$X^t A X = 4\,, \tag{6.17}$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Como veremos adiante, podemos escrever

$$A = PDP^t$$

em que

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Assim, a equação (6.17) pode ser escrita como

$$(X^tP)D(P^tX) = (P^tX)^tD(P^tX) = 4\,.$$

Se fazemos a mudança de variáveis (ou de coordenadas) $X = PX'$, então como $P^tP = I_2$, a equação (6.17) se transforma em

$$X'^tDX' = 4$$

ou

$$[x' \quad y'] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 4$$

que pode ser reescrita como,

$$2x'^2 + 4y'^2 = 4\,,$$

ou dividindo por 4, como

$$\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{1} = 1$$

que é a equação da elipse mostrada na Figura 6.1. Veremos na próxima seção como traçar esta elipse.

A matriz P, tem a propriedade de que a sua inversa é simplesmente a sua transposta, $P^{-1} = P^t$. Uma matriz que satisfaz esta propriedade é chamada de **matriz ortogonal**. O que possibilitou a identificação da cônica, no exemplo anterior, foi o fato de que a matriz A é diagonalizável através de uma matriz ortogonal P. Ou seja, existe uma matriz P tal que $A = PDP^{-1}$ e $P^{-1} = P^t$.

Já vimos que nem toda matriz é diagonalizável (Exemplo 6.6 na página 261). Vamos ver que se uma matriz A é simétrica, então ela é diagonalizável, isto é, existe uma matriz diagonal D e uma

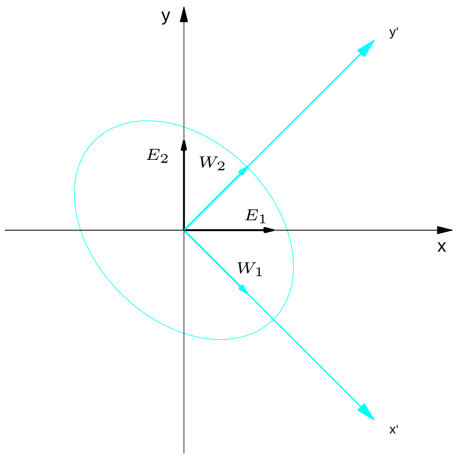


Figura 6.1: Elipse do Exemplo 6.7

matriz invertível P tal que $D = P^{-1}AP$. Além disso, para matrizes simétricas, existe uma matriz P tal que $D = P^tAP$. Isto porque existe uma matriz ortogonal P que faz a diagonalização, ou seja, que tem a propriedade $P^{-1} = P^t$. Em algumas aplicações a diagonalização com uma tal matriz é necessária, como por exemplo na identificação de cônicas.

Vamos em primeiro lugar, caracterizar as matrizes ortogonais.

6.2.2 Matrizes Ortogonais

Definição 6.5. Uma matriz P tal que $P^{-1} = P^t$ é chamada de matriz **ortogonal**.

Proposição 6.4. *Uma matriz P é ortogonal se, e somente se, as suas colunas formam um conjunto ortonormal de vetores.*

Demonstração. Vamos escrever $P = [U_1 \ \ldots \ U_n]$. Ou seja, $U_1, \ldots, U_n$ são as colunas de P. A inversa de P é P^t se, e somente se, $P^tP = I_n$. Mas,

$$P^tP = \begin{bmatrix} U_1^t \\ \vdots \\ U_n^t \end{bmatrix} [U_1 \ \ldots \ U_n] = \begin{bmatrix} U_1^tU_1 & U_1^tU_2 & \ldots & U_1^tU_n \\ U_2^tU_1 & U_2^tU_2 & \ldots & U_2^tU_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ U_n^tU_1 & U_n^tU_2 & \ldots & U_n^tU_n \end{bmatrix}$$

Logo, $P^tP = I_n$ se, e somente se, $U_i^tU_j = U_i \cdot U_j = 0$ para $i \neq j$ e $U_i^tU_i = U_i \cdot U_i = 1$ para $i = 1, \ldots n$. Ou seja, $P^tP = I_n$ se, e somente se, $U_1, \ldots, U_n$ são ortonormais. $\square$

Vamos supor que uma matriz A é diagonalizável através de uma matriz ortogonal, ou seja, que existe uma matriz P tal que $D = P^tAP$ é uma matriz diagonal. Como a matriz P é uma matriz cujas colunas são autovetores de A, deduzimos da proposição anterior que uma matriz A é diagonalizável através de uma matriz ortogonal se, e somente se, ela possui um conjunto ortonormal de autovetores. Como veremos, as matrizes simétricas possuem esta característica.

Proposição 6.5. *Para uma matriz A simétrica, os autovetores associados a autovalores diferentes são ortogonais.*

Demonstração. Sejam V_1 e V_2 autovetores de A associados aos autovalores λ_1 e λ_2, respectivamente, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Então, $AV_1 = \lambda_1 V_1$ e $AV_2 = \lambda_2 V_2$.

Agora, se escrevemos os vetores como matrizes colunas, o produto escalar é simplesmente o produto matricial da transposta da primeira matriz pela segunda. Assim,

$$AV_1 \cdot V_2 = (AV_1)^t V_2 = V_1^t A^t V_2 = V_1 \cdot A^t V_2\,. \tag{6.18}$$

Como A é simétrica $A^t = A$ e como V_1 e V_2 são autovetores de A, temos de (6.18) que

$$\lambda_1 V_1 \cdot V_2 = \lambda_2 V_1 \cdot V_2$$

ou

$$(\lambda_1 - \lambda_2) V_1 \cdot V_2 = 0\,.$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, concluimos que $V_1 \cdot V_2 = 0$, ou seja, V_1, V_2 são ortogonais. $\square$

Como autovetores associados a autovalores diferentes já são ortogonais, para diagonalizarmos uma matriz simétrica A através de uma matriz P ortogonal, precisamos encontrar, para cada autovalor, autovetores ortonormais associados a eles. Para isso, podemos aplicar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt a cada conjunto de autovetores L.I. associados a cada um dos autovalores.

Exemplo 6.8. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Para esta matriz o polinômio característico é

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = (\lambda - 2)^2(8 - \lambda)$$

Portanto os autovalores de A (raízes reais do polinômio característico) são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 8$.

Os autovetores associados aos autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 8$ são as soluções de $(A - \lambda_1 I_3)X = \bar{0}$ e $(A - \lambda_2 I_3)X = \bar{0}$ respectivamente.

A forma escalonada reduzida de

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{é} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto o autoespaço associado a $\lambda_1 = 2$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(-\alpha - \beta, \beta, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

Agora, $(-\alpha - \beta, \beta, \alpha) = \alpha(-1, 0, 1) + \beta(-1, 1, 0)$. Assim, os vetores $V_1 = (-1, 0, 1)$ e $V_2 = (-1, 1, 0)$ geram $\mathbb{W}_1$. Como além disso, eles são L.I. (um não é múltiplo escalar do outro), então eles formam uma base para $\mathbb{W}_1$.

Para encontrar dois autovetores ortonormais associados a $\lambda_1 = 2$ vamos usar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aos vetores V_1 e V_2.

$$W_1 = V_1 = (-1, 0, 1); \qquad W_2 = V_2 - \mathrm{proj}_{W_1} V_2 = (-1/2, 1, -1/2)$$

$$U_1 = \left(\frac{1}{||W_1||}\right) W_1 = (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$$

$$U_2 = \left(\frac{1}{||W_2||}\right) W_2 = (-1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$$

Com relação ao autovalor $\lambda_2 = 8$, temos que a forma escalonada reduzida da matriz

$$A - 8I_3 = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{é} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, o autoespaço associado a $\lambda_2 = 8$ é

$$\mathbb{W}_2 = \{(\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

O conjunto $\{V_3 = (1, 1, 1)\}$ é uma base para $\mathbb{W}_2$, pois como $(\alpha, \alpha, \alpha) = \alpha(1, 1, 1)$, V_3 gera $\mathbb{W}_2$ e um vetor não nulo é L.I. Assim, o vetor

$$U_3 = \left(\frac{1}{||V_3||}\right) V_3 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$$

forma uma base ortonormal para $\mathbb{W}_2$.

Como a matriz A é simétrica, autovetores associados a autovalores diferentes são ortogonais. Portanto, U_1, U_2 e U_3 são ortonormais e assim a matriz

$$P = [U_1 U_2 U_3] = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

satisfaz $D = P^t A P$, em que

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

O próximo resultado, que não será demonstrado no momento (Apêndice III na página 276), garante que o procedimento acima sempre funciona, ou seja, que toda matriz simétrica é diagonalizável através de uma matriz ortogonal.

Teorema 6.6. *Se A é uma matriz simétrica, então existe uma matriz P ortogonal e uma matriz diagonal D tal que*

$$D = P^t AP\,.$$

Assim, se A é simétrica, então ela é diagonalizável.

Exercícios Numéricos (respostas na página 353)

6.2.1. Diagonalize cada matriz dada A por meio de uma matriz ortogonal, ou seja, ache uma matriz ortogonal P tal que P^tAP seja diagonal:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Exercícios Teóricos

6.2.2. Mostre que se A é uma matriz ortogonal, então $\det(A) = \pm 1$.

6.2.3. Mostre que se A e B são matrizes ortogonais, então AB é ortogonal.

6.2.4. (a) Verifique se a matriz $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ é ortogonal;

(b) Mostre que $X = (x, y)$ é ortogonal a $V = (a, b) \neq \bar{0}$ com $||X|| = ||V||$ se, e somente se, $X = (-b, a)$ ou $X = (b, -a)$.

(c) Mostre que se A é uma matriz ortogonal 2×2, então existe um número real θ tal que

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \qquad A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}.$$

A primeira matriz tem determinante igual a 1 e é chamada **matriz de rotação**.

(Sugestão: Comece com uma matriz $(a_{ij})_{2\times 2}$ e use o fato de que as colunas são ortonormais. Uma das equações será $a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$. Faça $a_{11} = \cos\theta$ e $a_{21} = \operatorname{sen}\theta$. Use o item anterior.)

6.2.5. Mostre que se uma matriz A é diagonalizável por uma matriz ortogonal (isto é, existem P e D, com $P^{-1} = P^t$ e D diagonal, tais que $D = P^tAP$), então A é uma matriz simétrica.

6.2.6. Dizemos que uma matriz simétrica A, $n \times n$, é **(definida) positiva** se $X^tAX > 0$, para todo $X \in \mathbb{R}^n, X \neq \bar{0}$, X escrito como matriz coluna. Mostre que são equivalentes as seguintes afirmações:

(a) A matriz A é definida positiva.

(b) A é simétrica e todos os autovalores de A são positivos.

(c) Existe uma matriz definida positiva B tal que $A = B^2$. A matriz B é chamada a **raiz quadrada** de A.

(Sugestão: Mostre que (a)⇒(b)⇒(c)⇒(a). Na parte (b)⇒(c) faça primeiro o caso em que A é uma matriz diagonal)

6.2.7. Seja A uma matriz invertível $n \times n$. Mostre que existe uma matriz simétrica definida positiva P e uma matriz ortogonal U, tal que $A = PU$. Esta decomposição é única chamada de **decomposição polar de** A. (Sugestão: Sejam $P = (AA^t)^{1/2}$ e $U = P^{-1}A$. Mostre que $UU^t = I_n$.)

6.2.8. Seja A uma matriz $n \times n$. Para $k = 1, \ldots, n$, seja A_k a submatriz obtida de A eliminando-se as últimas $n-k$ linhas e colunas. A_k é chamada **submatriz principal de** A **de ordem** k. Mostre que se A é uma matriz simétrica definida positiva $n \times n$, então

(a) A é não singular;

(b) $\det(A) > 0$;

(c) as submatrizes principais $A_1, \ldots, A_n$ são todas definidas positivas. (Sugestão: considere vetores X_k tais que os últimos $n-k$ elementos são nulos.)

Apêndice III: Demonstração do Teorema 6.6 na página 274

Vamos provar que toda matriz simétrica é diagonalizável através de uma matriz ortogonal. Para isto, precisamos trabalhar com matrizes cujas entradas são números complexos. Vamos chamar o conjunto das matrizes $m \times n$ cujas entradas são números complexos de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{C})$.

Para uma matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{C})$, definimos o **conjugado da matriz** A, denotado por $\overline{A}$ como sendo a matriz $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{C})$ dada por $b_{ij} = \bar{a}_{ij}$, em que, se $a_{ij} = \alpha_{ij} + i\beta_{ij}$, então $\bar{a}_{ij} = \alpha_{ij} - i\beta_{ij}$.

Para as matrizes de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{C})$ além das propriedades que já foram demonstradas no Teorema 1.1 na página 7 são válidas as seguintes propriedades, cuja demonstração deixamos a cargo do leitor:

(p) Se $A \in \mathcal{M}_{mp}(\mathbb{C})$ e $B \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{C})$, então

$$\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}.$$

(q) Se $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{C})$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, então

$$\overline{\alpha A} = \bar{\alpha}\overline{B}.$$

Teorema 6.7. *Toda matriz simétrica, cujas entradas são números reais, possui autovalor (real).*

Demonstração. Seja A uma matriz simétrica, cujas entradas são números reais. Vamos mostrar que as raízes do seu polinômio característico são reais. Seja λ uma raiz do polinômio característico de A. Então o sistema linear $(A - \lambda I_n)X = \bar{0}$ tem solução não trivial $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$. O que implica que

$$AX = \lambda X.$$

Como A é uma matriz cujas entradas são números reais, temos que

$$A\overline{X} = \overline{A}\,\overline{X} = \overline{(AX)} = \overline{\lambda X} = \bar{\lambda}\,\overline{X}.$$

Por um lado,

$$\overline{X}^t AX = \overline{X}^t \lambda X = \lambda \overline{X}^t X = \lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2.$$

Por outro lado
$$\overline{X}^t AX = \overline{X}^t A^t X = (A\overline{X})^t X = \bar{\lambda}\,\overline{X}^t X = \bar{\lambda}\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2.$$

Logo, $\overline{\lambda} = \lambda$, ou seja, que λ é um número real. ☐

Demonstração do Teorema 6.6 na página 274. O resultado é obvio se $n = 1$. Vamos supor que o resultado seja verdadeiro para matrizes $(n-1)\times(n-1)$ e vamos provar que ele é verdadeiro para matrizes $n \times n$. Pelo Teorema 6.7 a matriz A tem um autovalor λ_1. Isto significa que existe autovetores associados a λ_1. Seja X_1 um autovetor de norma igual a 1 associado a λ_1. Sejam $X_2,\ldots,X_n$ vetores tais que $\{X_1,\ldots,X_n\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ (isto pode ser conseguido aplicando-se o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt a uma base de $\mathbb{R}^n$ que contenha X_1.) Seja $P_1 = [\,X_1 \,\ldots\, X_n\,]$. Como $AX_1 = \lambda_1 X_1$ e $AX_2,\ldots,AX_n$ são combinações lineares de $X_1,\ldots,X_n$, temos que
$$AP_1 = [\,AX_1 \,\ldots\, AX_n\,] = [\,X_1 \,\ldots\, X_n\,]M = P_1 M, \tag{6.19}$$
em que $M = \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & \ldots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right]$. Multiplicando-se à esquerda (6.19) por P_1^t obtemos $M = P_1^t A P_1$. Mas, $M^t = (P_1^t A P_1)^t = P^t A^t P_1 = P_1^t A P_1 = M$, ou seja, a matriz M é simétrica. Portanto,
$$M = \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

com B uma matriz simétrica $(n-1)\times(n-1)$. Como estamos supondo o resultado verdadeiro para matrizes $(n-1)\times(n-1)$, então existe uma matriz ortogonal $\tilde{P}_2$, $(n-1)\times(n-1)$, tal que $D_2 = \tilde{P}_2^t B \tilde{P}_2$ é diagonal. Seja $P_2 = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{P}_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right]$. Seja $P = P_1 P_2$. P é ortogonal (verifique!) e pela equação (6.19)

$$AP = (AP_1)P_2 = P_1 M P_2 = P_1 \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B\tilde{P}_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

Mas, $B\tilde{P}_2 = \tilde{P}_2 D_2$ e assim,

$$AP = P_1 P_2 \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & D_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right] = PD,$$

em que $D = \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & D_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right]$. Multiplicando-se à esquerda por P^t obtemos o resultado. $\square$

6.3 Aplicação na Identificação de Cônicas

Uma **equação quadrática** nas variáveis x e y tem a forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

em que a, b, c, d, e e f são números reais, com a, b e c não simultaneamente nulos. Esta equação representa uma **(seção) cônica**, por poder ser obtida da interseção de um cone circular com um plano. As cônicas mais importantes são elipses, hiperbóles e parábolas, que são chamadas de **cônicas não degeneradas**. As outras que incluem um único ponto, um par de retas, são chamadas **cônicas degeneradas**.

Dizemos que a equação de uma cônica não degenerada está na forma padrão se ela tem uma das formas dadas na Figura 6.13 na página 290.

Nesta seção veremos como a diagonalização de matrizes simétricas pode ser usada na identificação das cônicas cujas equações não estão na forma padrão. Antes, porem, vamos definir as cônicas como conjunto de pontos que satisfazem certas propriedades.

6.3.1 Elipse

Definição 6.6. Uma **elipse** é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ do plano tais que a soma das distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2 (**focos**) é constante, ou seja, se $\text{dist}(F_1, F_2) = 2c$, então a elipse é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 2a\,,$$

em que $a > c$.

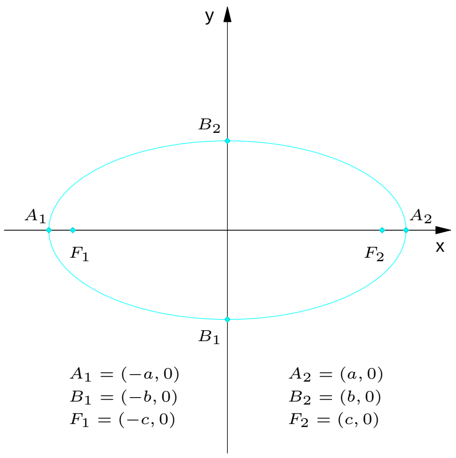


Figura 6.2: Elipse com focos nos pontos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$

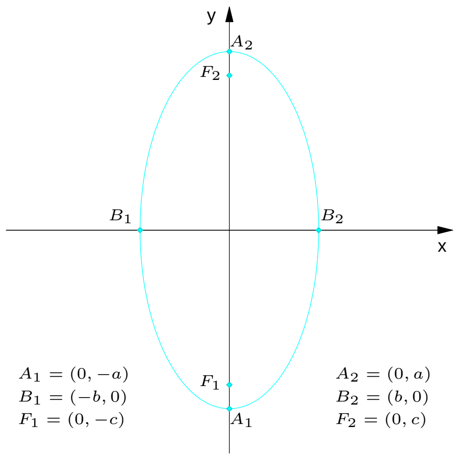


Figura 6.3: Elipse com focos nos pontos $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$

Proposição 6.8. *(a) A equação de uma* **elipse** *cujos focos são $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ é*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \tag{6.20}$$

em que $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

(b) A equação de uma **elipse** *cujos focos são* $F_1 = (0, -c)$ *e* $F_2 = (0, c)$ *é*

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1\,, \tag{6.21}$$

em que $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Demonstração. Vamos provar a primeira parte e deixamos para o leitor, como exercício, a demonstração da segunda parte. A elipse é o conjunto dos pontos (x, y) tais que

$$\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 2a\,,$$

ou seja,

$$||\,\overrightarrow{PF_1}\,|| + ||\,\overrightarrow{PF_1}\,|| = 2a,$$

que neste caso é

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

ou

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,.$$

Elevando ao quadrado e simplificando, temos

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx\,.$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando, temos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como $a > c$, então $a^2 - c^2 > 0$. Assim, podemos definir $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ e dividir e equação acima por $a^2b^2 = a^2(a^2 - c^2)$, obtendo (6.20). □

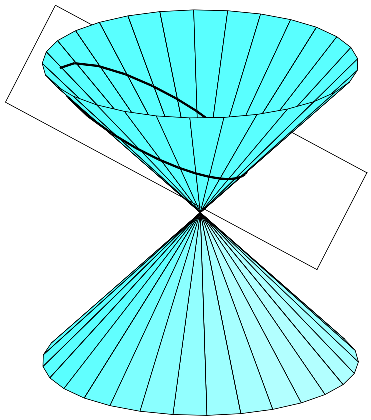


Figura 6.4: Hipérbole obtida seccionando-se um cone com um plano

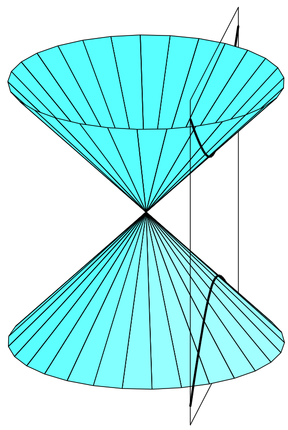


Figura 6.5: Elipse obtida seccionando-se um cone com um plano

Os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 são chamados **vértices da elipse**. Os segmentos A_1A_2 e B_1B_2 são chamados **eixos da elipse**. A **excentricidade** da elipse é o número $e = \frac{c}{a}$. Como, $c < a$, a excentricidade de uma elipse é um número real não negativo menor que 1. Observe que se $F_1 = F_2$, então a elipse reduz-se ao **círculo** de raio a. Além disso, como $c = 0$, então $e = 0$. Assim, um círculo é uma elipse de excentricidade nula.

A elipse é a curva que se obtem seccionando-se um cone com um plano que não passa pelo vértice, não é paralelo a uma **reta geratriz** (reta que gira em torno do eixo do cone de forma a gerá-lo) e que corta apenas uma das folhas da superfície.

6.3.2 Hipérbole

Definição 6.7. Uma **hiperbóle** é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ do plano tais que o módulo da diferença entre as distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2 (**focos**) é constante, ou seja, se $\mathrm{dist}(F_1, F_2) = 2c$, então a hiperbóle é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$|\mathrm{dist}(P, F_1) - \mathrm{dist}(P, F_2)| = 2a\,,$$

em que $a < c$.

Proposição 6.9. *(a) A equação de uma* **hipérbole** *cujos focos são $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ é*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \tag{6.22}$$

em que $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

(b) A equação de uma **hipérbole** *cujos focos são $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$ é*

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1\,, \tag{6.23}$$

em que $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

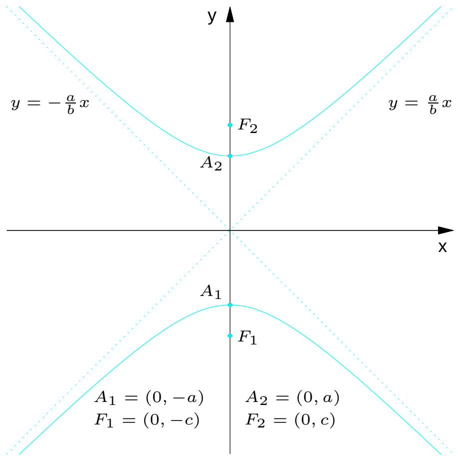


Figura 6.6: Hipérbole com focos nos pontos $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$

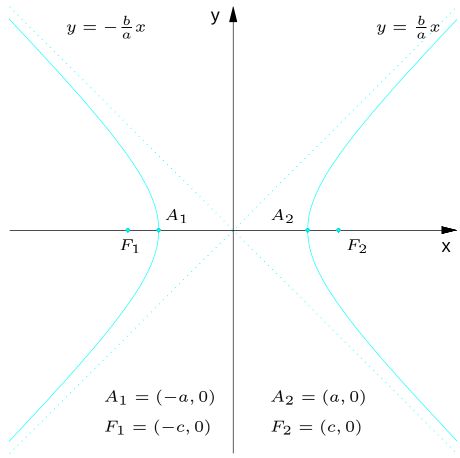


Figura 6.7: Hipérbole com focos nos pontos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$

Demonstração. Vamos provar a primeira parte e deixamos para o leitor, como exercício, a demonstração da segunda parte. A hipérbole é o conjunto dos pontos (x, y) tais que

$$\mathrm{dist}(P, F_1) - \mathrm{dist}(P, F_2) = \pm 2a\,,$$

ou seja,

$$|| \overrightarrow{PF_1} || - || \overrightarrow{PF_2} || = \pm 2a,$$

que neste caso é

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

ou
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}\,.$$
Elevando ao quadrado e simplificando, temos
$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx\,.$$
Elevando novamente ao quadrado e simplificando, temos
$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$
Como $a < c$, então $c^2 - a^2 > 0$. Assim, podemos definir $b = \sqrt{c^2-a^2}$ e dividir e equação acima por $-a^2b^2 = a^2(a^2-c^2)$, obtendo (6.22). □

Os pontos A_1 e A_2 são chamdos **vértices da hipérbole**. A **excentricidade** da hipérbole é o número $e = \dfrac{c}{a}$. Como, $c > a$, a excentricidade de uma hipérbole é um número real não negativo maior que 1. A hipérbole é a curva que se obtem seccionando-se um cone por um plano paralelo ao seu eixo que não passa pelo vértice.

6.3.3 Parábola

Definição 6.8. Uma **parábola** é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ do plano equidistantes de uma reta r (**diretriz**) e de um ponto F (**foco**), não pertencente a r, ou seja, a parábola é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que
$$\mathrm{dist}(P, F) = \mathrm{dist}(P, r)\,.$$

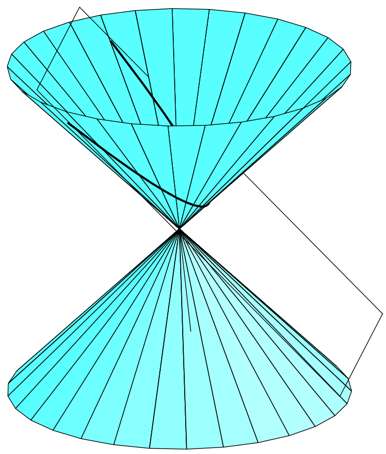


Figura 6.8: Parábola obtida seccionando-se um cone com um plano

Proposição 6.10. *(a) A equação de uma* **parábola** *com foco* $F = (p, 0)$ *e reta diretriz* $r : \ x = -p$ *é*

$$y^2 = 4px\,. \tag{6.24}$$

(b) A equação de uma **parábola** *com foco* $F = (0, p)$ *e reta diretriz* $r : \ y = -p$ *é*

$$x^2 = 4py\,. \tag{6.25}$$

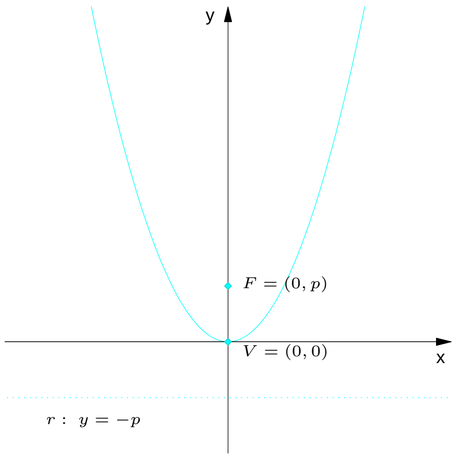


Figura 6.9: Parábola com foco no ponto $F = (0, p)$ e $p > 0$

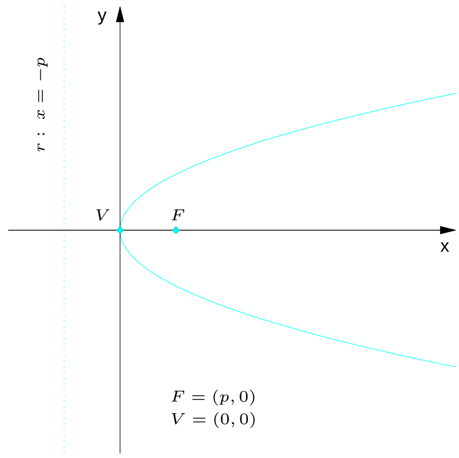


Figura 6.10: Parábola com foco no ponto $F = (p, 0)$ e $p > 0$

Demonstração. Vamos provar a primeira parte e deixamos para o leitor, como exercício, a demonstração da segunda parte. A parábola é o conjunto dos pontos (x, y) tais que

$$\operatorname{dist}(P, F) = \operatorname{dist}(P, r)\,,$$

que neste caso é

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x + p|\,,$$

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos (6.24). $\square$

O ponto V é o ponto da parábola mais próximo da reta diretriz e é chamado de **vértice da**

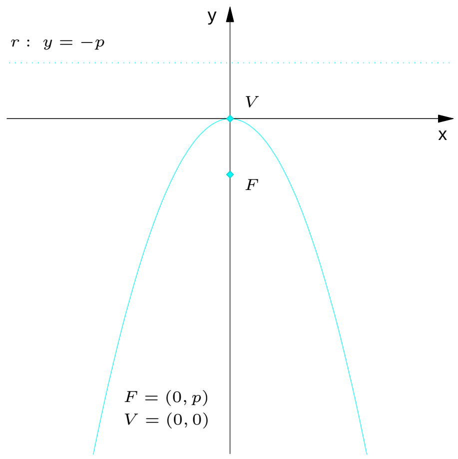


Figura 6.11: Parábola com foco no ponto $F = (0, p)$ e $p < 0$

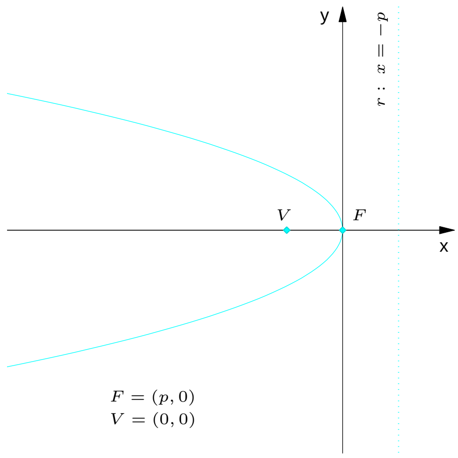


Figura 6.12: Parábola com foco no ponto $F = (p, 0)$ e $p < 0$

parábola. A parábola é a curva que se obtem seccionando-se um cone por um plano paralelo a uma **reta geratriz do cone**.

Vamos ver, agora, como a diagonalização de matrizes simétricas pode ser usada na identificação das cônicas cujas equações não estão na forma padrão.

Vamos estudar alguns exemplos.

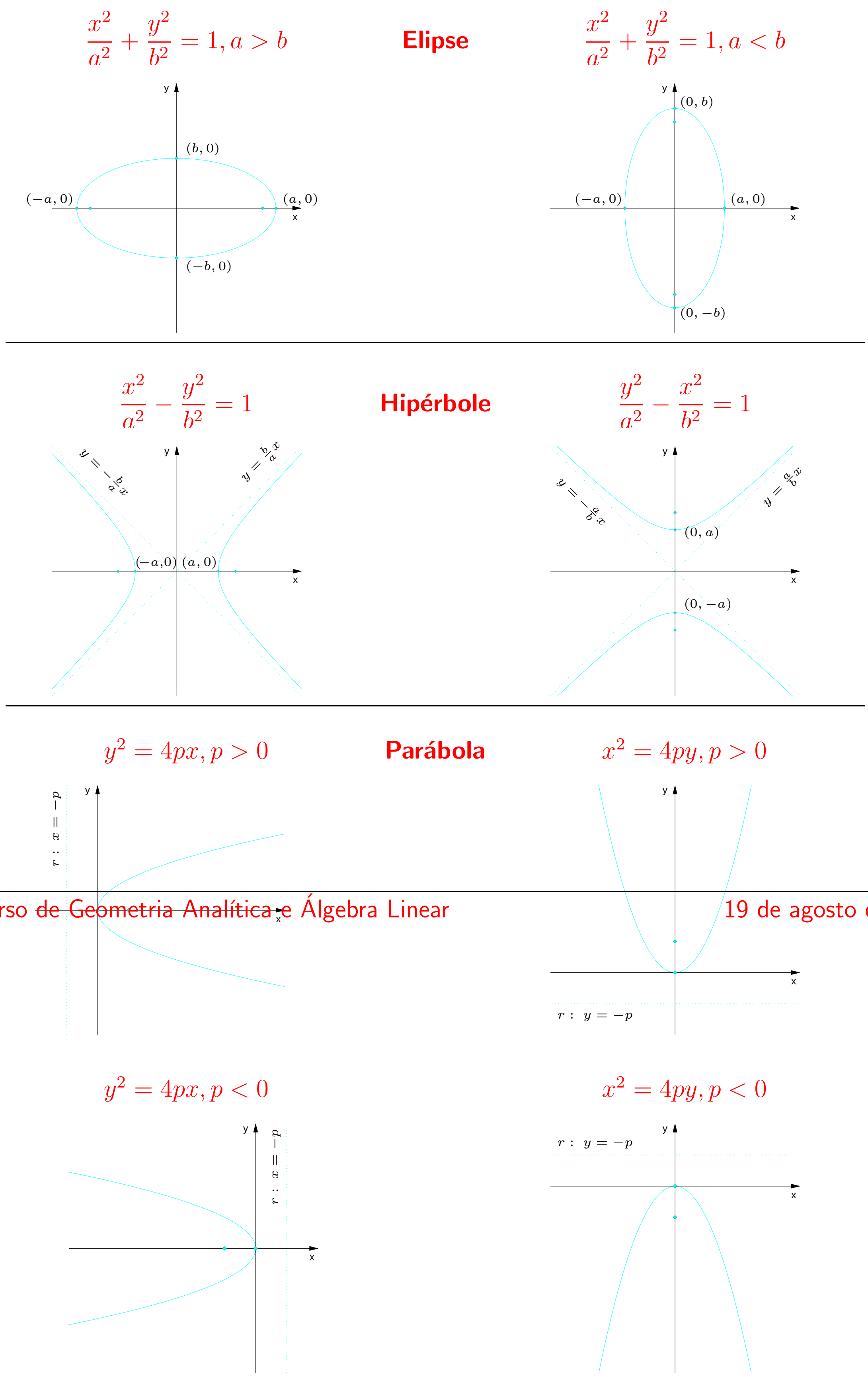


Figura 6.13: Cônicas não degeneradas com equações na forma padrão

Exemplo 6.9. Considere a cônica C cuja equação é

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0.$$

Esta equação pode ser escrita como

$$X^t AX - 36 = 0\,, \tag{6.26}$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de A é

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 13\lambda + 36\,.$$

Logo, os autovalores de A são $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 9$. Os autovetores associados a $\lambda_1 = 4$ são as soluções não nulas do sistema

$$(A - 4I_2)X = \bar{0}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

cuja solução é

$$\mathbb{V}_1 = \{(2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}\,.$$

Assim, $V_1 = (2,1)$ é uma base para $\mathbb{V}_1$, pois gera $\mathbb{V}_1$ e é L.I. E $W_1 = \frac{V_1}{||V_1||} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ é uma base ortonormal para $\mathbb{V}_1$.

Os autovetores associados a $\lambda_2 = 9$ são as soluções não nulas do sistema

$$(A - 9I_2)X = \bar{0}$$

ou
$$\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
cuja solução é
$$\mathbb{V}_2 = \{(-\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$
Assim, $V_2 = (-1, 2)$ é uma base para $\mathbb{V}_2$, pois gera $\mathbb{V}_2$ e é L.I. E $W_2 = \frac{V_2}{||V_2||} = (\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ é uma base ortonormal para $\mathbb{V}_2$. Portanto,
$$D = P^t A P$$
em que,
$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad P = [W_1\; W_2] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Vamos fazer a mudança de variáveis $X = PX'$, em que $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ na equação (6.26).

Substituindo $X = PX'$ na equação (6.26), obtemos
$$X'^t (P^t A P) X' - 36 = 0,$$
ou
$$X'^t D X' - 36 = 0,$$
ou
$$4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0,$$
ou ainda
$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1 \tag{6.27}$$
que é a equação de uma elipse cujo esboço é mostrado na Figura 6.14. Para fazer o esboço do gráfico, em primeiro lugar temos que traçar os eixos x' e y'. O eixo x' passa pela origem, é paralelo

e possui o mesmo sentido do vetor W_1, que tem coordenadas $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ em relação ao sistema de coordenadas $\mathrm{x}'\mathrm{y}'$. Assim, $W_1 = P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, que é a primeira coluna de P. O eixo y' passa pela origem, é paralelo e possui o mesmo sentido de W_2 que tem coordenadas $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ em relação ao sistema de coordenadas $\mathrm{x}'\mathrm{y}'$. Assim, $W_2 = P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, que é a segunda coluna de P. Depois, a partir da equação (6.27), verificamos na Figura 6.13 na página 290 a forma da curva em relação aos eixos x' e y'.

Exemplo 6.10. Considere a cônica cuja equação é dada por

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}x - \frac{80}{\sqrt{5}}y + 4 = 0\,.$$

Esta equação pode ser escrita como

$$X^tAX + KX + 4 = 0\,, \tag{6.28}$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad K = \begin{bmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & -\frac{80}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

A matriz A é a mesma do exemplo anterior. Assim, temos que

$$D = P^tAP$$

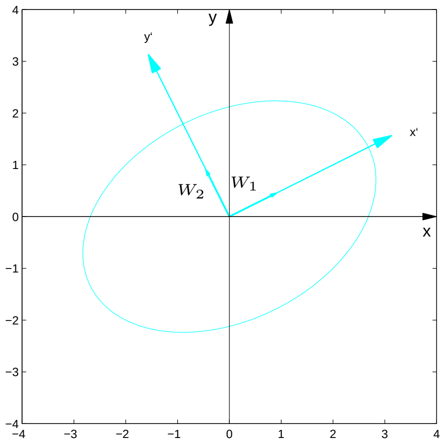


Figura 6.14: Elipse do Exemplo 6.9

em que,

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad P = [W_1\ W_2] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Vamos fazer a mudança de variáveis $X = PX'$, em que $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$.
Substituindo $X = PX'$ na equação (6.28), obtemos

$$X'^t(P^tAP)X' + KPX' + 4 = 0$$

ou

$$X'^tDX' + KPX' + 4 = 0,$$

ou

$$4x'^2 + 9y'^2 - 8x' - 36y' + 4 = 0\,.$$

ou ainda,

$$4(x'^2 - 2x') + 9(y'^2 - 4y') + 4 = 0$$

Completando os quadrados, obtemos

$$4[(x'^2 - 2x' + 1) - 1] + 9[(y'^2 - 4y' + 4) - 4] + 4 = 0$$

ou

$$4(x' - 1)^2 + 9(y' - 2)^2 - 36 = 0.$$

Fazendo mais uma mudança de variáveis

$$x'' = x' - 1 \text{ e} \tag{6.29}$$
$$y'' = y' - 2 \tag{6.30}$$

obtemos

$$4x''^2 + 9y''^2 - 36 = 0$$

ou

$$\frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{4} = 1 \tag{6.31}$$

que é a equação de uma elipse cujo esboço é mostrado na Figura 6.15. Para fazer o esboço do gráfico, em primeiro lugar temos que traçar os eixos x'' e y'', que por sua vez são translações dos eixos x' e y'. O eixo x' tem a direção e o sentido do vetor $W_1 = P\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (a primeira coluna de P). O eixo y' tem a direção e o sentido do vetor $W_2 = P\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (a segunda coluna de P). O eixo x''

tem equação $y'' = 0$. Usando a equação (6.29) obtemos $y' = 2$. O eixo y'' tem equação $x'' = 0$. Usando a equação (6.30) obtemos $x' = 1$. Depois, a partir da equação (6.31), verificamos na Figura 6.13 na página 290 a forma da curva em relação aos eixos x'' e y''.

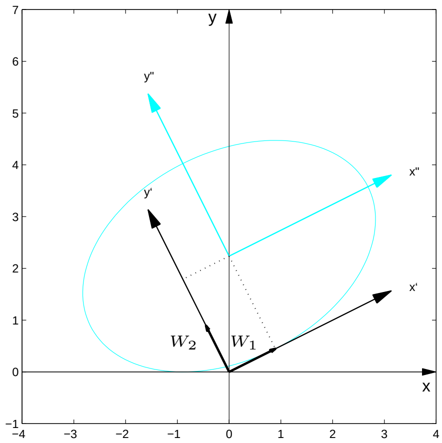


Figura 6.15: Elipse do Exemplo 6.10

Os exemplos anteriores são casos particulares do próximo teorema, cuja demonstração é feita da mesma forma que fizemos com os exemplos e por isso deixamos para o leitor a tarefa de escrevê-la.

Teorema 6.11. *Considere a equação*

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \tag{6.32}$$

com $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, sendo a, b e c não simultaneamente nulos. Então existe um sistema de coordenadas $\mathrm{x}'\mathrm{y}'$, em que a equação (6.32) tem a forma

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0\,,$$

em que λ_1, λ_2 são os autovalores de

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}.$$

Mais ainda,

$$X = PX'\,,$$

em que $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e P é uma matriz ortogonal ($P^{-1} = P^t$).

Exercícios Numéricos (respostas na página 359)

Identificar a cônica, achar a equação no último sistema de coordenadas utilizado e fazer um esboço do gráfico.

6.3.1. $9x^2 - 4xy + 6y^2 = 30$;

6.3.2. $3x^2 - 8xy - 12y^2 + 81 = 0$;

6.3.3. $2x^2 - 4xy - y^2 = -24$;

6.3.4. $21x^2 + 6xy + 13y^2 - 132 = 0$;

6.3.5. $4x^2 - 20xy + 25y^2 - 15x - 6y = 0$;

6.3.6. $9x^2 + y^2 + 6xy - 10\sqrt{10}x + 10\sqrt{10}y + 90 = 0$;

6.3.7. $5x^2 + 5y^2 - 6xy - 30\sqrt{2}x + 18\sqrt{2}y + 82 = 0$;

6.3.8. $5x^2 + 12xy - 12\sqrt{13}x = 36$;

6.3.9. $6x^2 + 9y^2 - 4xy - 4\sqrt{5}x - 18\sqrt{5}y = 5$;

6.3.10. $x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}xy + 6x = 0$;

6.3.11. $8x^2 + 8y^2 - 16xy + 33\sqrt{2}x - 31\sqrt{2}y + 70 = 0$;

6.3.12. $x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x + 2y + 9 = 0$;

Exercícios usando o MATLAB

Comandos do pacote GAAL:

`>> [P,D]=diagonal(A)` diagonaliza a matriz `A`, de forma que `AP=PD`, em que `D` é uma matriz diagonal e `P` é uma matriz ortogonal.

`>> subst(expr,[x;y],[a;b])` substitui na expressão `expr` as variáveis `x,y` por `a,b`, respectivamente.

`>> elipse(a,b)` desenha a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

`>> elipse(a,b,[U1 U2])` desenha a elipse $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> elipse(a,b,[U1 U2],X0)` desenha a elipse $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e pelo ponto `X0`.

`>> hiperbx(a,b)` desenha a hiperbóle $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

`>> hiperbx(a,b,[U1 U2])` desenha a hipérbole $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> hiperbx(a,b,[U1 U2],X0)` desenha a hipérbole $\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e pelo ponto `X0`.

`>> hiperby(a,b)` desenha a hiperbóle $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

`>> hiperby(a,b,[U1 U2])` desenha a hipérbole $\frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> hiperby(a,b,[U1 U2],X0)` desenha a hipérbole $\frac{y''^2}{a^2} - \frac{x''^2}{b^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e pelo ponto `X0`.

`>> parabx(p)` desenha a parábola $y^2 = 4px$.

`>> parabx(p,[U1 U2])` desenha a parábola $y'^2 = 4px'$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> parabx(p,[U1 U2],X0)` desenha a parábola $y''^2 = 4px''$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e por `X0`.

`>> paraby(p)` desenha a parábola $x^2 = 4py$.

`>> paraby(p,[U1 U2])` desenha a parábola $x'^2 = 4py'$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> paraby(p,[U1 U2],X0)` desenha a parábola $x''^2 = 4py''$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e por `X0`.

6.3.13. Use o MATLAB para resolver os **Exercícios Numéricos**

Exercícios Teóricos

6.3.14. Demonstre o Teorema 6.11 na página 296.

6.3.15. Seja C o conjunto dos pontos do plano que satisfazem a equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$. Sejam λ e μ os autovalores de A.

(a) Mostre que $\lambda\mu = ac - b^2/4$.

(b) Mostre que se $\lambda\mu > 0$, então C é uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio.

(c) Mostre que se $\lambda\mu < 0$, então C é uma hipérbole, ou um par de retas concorrentes.

(d) Mostre que se $\lambda\mu = 0$, então temos duas possibilidades:

i. Se $\lambda \neq 0$ ou $\mu \neq 0$, então C é uma parábola, um par de retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio.

ii. Se $\lambda = \mu = 0$, então C é uma reta. Observe que neste caso C não é uma cônica (por que?).

Apêndice IV: Mudança de Coordenadas

Já vimos (equação (3.8) na página 133) que se as coordenadas de um ponto P no espaço são (x, y, z), então

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

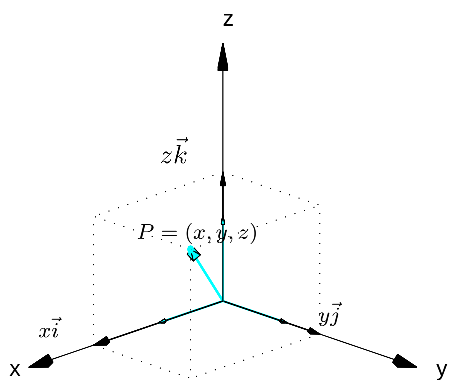


Figura 6.16: $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

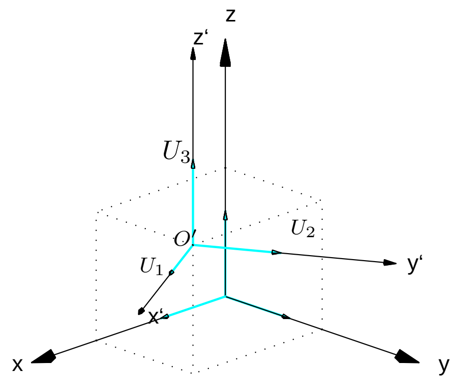


Figura 6.17: Dois sistemas de coordenadas $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e $\{O', U_1, U_2, U_3\}$

em que $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$ são os vetores canônicos, ou seja, as coordenadas de um ponto P são iguais aos escalares que aparecem ao escrevermos $\overrightarrow{OP}$ como uma combinação linear dos vetores canônicos. Assim, o ponto $O = (0, 0, 0)$ e os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ determinam um sistema de coordenadas (cartesiano), $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Para resolver alguns problemas geométricos é necessário usarmos um segundo sistema de coordenadas determinado por uma origem O' e por vetores U_1, U_2 e U_3 que formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Por exemplo, se $O' = (2, 3/2, 3/2)$, $U_1 = (\sqrt{3}/2, 1/2, 0)$, $U_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2, 0)$ e $U_3 = (0, 0, 1) = \vec{k}$, então $\{O', U_1, U_2, U_3\}$ determina um novo sistema de coordenadas: aquele com origem no ponto O', cujos eixos x', y' e z' são retas que passam por O' orientadas com os sentidos e direções de U_1, U_2 e U_3, respectivamente. As coordenadas de um ponto P neste sistema de coordenadas é definido como sendo os escalares que aparecem ao escrevermos $\overrightarrow{O'P}$ como combinação linear dos vetores U_1, U_2 e U_3, ou seja, se

$$\overrightarrow{O'P}= x'U_1 + y'U_2 + z'U_3,$$

então as coordenadas de P no sistema $\{O', U_1, U_2, U_3\}$ são dadas por

$$[P]_{\{O',U_1,U_2,U_3\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

Como U_1, U_2 e U_3 formam uma base, então a matriz $A = [\, U_1 \, U_2 \, U_3 \,]$ é invertível ($A^{-1} = A^t$) e desta forma as coordenadas de um ponto estão bem definidas, ou seja, x', y' e z' estão unicamente determinados.

Dadas as coordenadas de um ponto P no sistema original $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, precisamos saber determinar as coordenadas de P no novo sistema de coordenadas $\{O', U_1, U_2, U_3\}$.

Também no plano temos o mesmo tipo de situação que é tratada de forma inteiramente análoga. As coordenadas de um ponto P no plano em relação a um sistema de coordenadas $\{O', U_1, U_2\}$, em que U_1 e U_2 são vetores unitários e ortogonais, é definido como sendo os escalares que aparecem ao escrevermos $\overrightarrow{O'P}$ como combinação linear de U_1 e U_2.

Vamos considerar inicialmente, o caso em que $O' = O$.

Exemplo 6.11. Considere o sistema de coordenadas no plano em que $O' = O$ e $U_1 = (\sqrt{3}/2, 1/2)$ e $U_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2)$. Se $P = (2, 4)$, vamos determinar as coordenadas de P em relação ao novo sistema de coordenadas. Para isto temos que encontrar x' e y' tais que

$$x'U_1 + y'U_2 = \overrightarrow{OP}.$$

A equação acima é equivalente ao sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcr} (\sqrt{3}/2)x' & - & (1/2)y' = 2 \\ (1/2)x' & + & (\sqrt{3}/2)y' = 4 \end{array}\right.$$

ou

$$AX = P,$$

em que $A = [U_1\ U_2]$ com U_1, U_2 e P escritos como matrizes colunas. A matriz aumentada do sistema é dada por

$$\left[\begin{array}{cc|c} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 4 \end{array}\right]$$

somando-se à 2ª linha $-\sqrt{3}/3$ vezes a 1ª linha obtemos

$$\left[\begin{array}{cc|c} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 2 \\ 0 & 2\sqrt{3}/3 & 2/3\,(6-\sqrt{3}) \end{array}\right].$$

Assim, as coordenadas de P em relação ao novo sistema de coordenadas são

$$[P]_{\{O,U_1,U2\}} = \left[\begin{array}{c} 2+\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}-1 \end{array}\right].$$

Exemplo 6.12. Considere o mesmo sistema de coordenadas do exemplo anterior, mas agora seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer do plano. Vamos determinar as coordenadas de P em relação ao novo sistema de coordenadas. Para isto temos que encontrar x' e y' tais que

$$x'U_1 + y'U_2 = \overrightarrow{OP}.$$

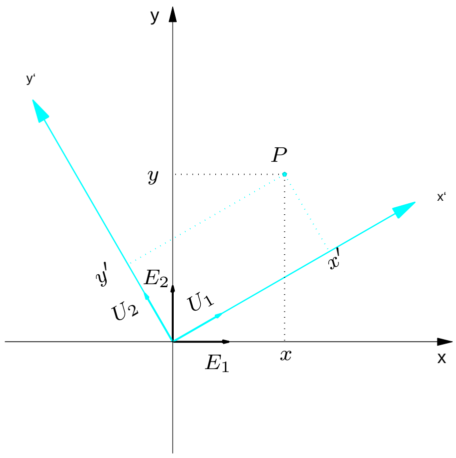


Figura 6.18: Coordenadas de um ponto P em dois sistemas

A equação acima é equivalente ao sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcrl} (\sqrt{3}/2)x' & - & (1/2)y' & = x \\ (1/2)x' & + & (\sqrt{3}/2)y' & = y \end{array}\right.$$

ou

$$AX = P,$$

em que $A = [U_1\ U_2] = \left[\begin{array}{cc} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{array}\right]$ e $P = \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right]$. Este sistema tem o número de equações igual ao número de incógnitas e tem solução única, pois a matriz é invertível. Portanto, pelo

Teorema 2.8 na página 68 a solução é dada por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A^{-1}P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 1/2 \\ -1/2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Exemplo 6.13. Vamos agora considerar um problema inverso àqueles apresentados nos exemplos anteriores. Suponha que sejam válidas as seguintes equações

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

entre as coordenadas $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ de um ponto $P = (x, y)$ em relação a um sistema de coordenadas $\{O, U_1, U_2\}$ e as coordenadas de P, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, em relação ao sistema de coordenadas original $\{O, E_1 = (1, 0), E_2 = (0, 1)\}$. Queremos determinar quais são os vetores U_1 e U_2.

Das equações acima, deduzimos que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Agora, os vetores U_1 e U_2 da nova base possuem coordenadas $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, em relação ao novo sistema de coordenadas, respectivamente. Pois, $U_1 = 1\,U_1 + 0\,U_2$ e $U_2 = 0\,U_1 + 1\,U_2$. Queremos saber quais as coordenadas destes vetores em relação ao sistema de coordenadas original. Logo,

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

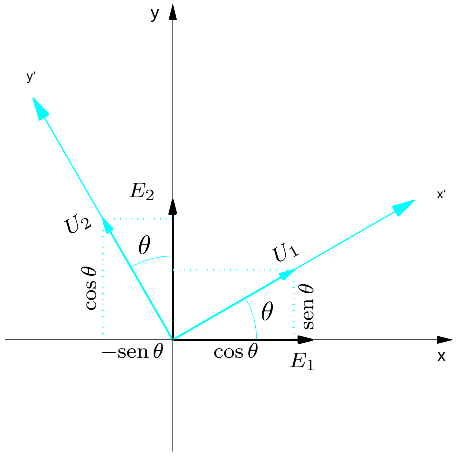


Figura 6.19: Rotação de um ângulo θ

Rotação

Suponha que o novo sistema de coordenadas $\{O, U_1, U_2\}$ seja obtido do sistema origianal $\{O, E_1 = (1,0), E_2 = (0,1)\}$ por uma rotação de um ângulo θ. Observando a Figura 6.19, obtemos

$$\begin{aligned} U_1 &= (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \\ U_2 &= (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \end{aligned}$$

seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer do plano. Vamos determinar as coordenadas de P em relação ao novo sistema de coordenadas. Para isto temos que encontrar x' e y' tais que

$$x'U_1 + y'U_2 = \overrightarrow{OP}\ .$$

A equação acima é equivalente ao sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcl}(\cos\theta)x' & - & (\operatorname{sen}\theta)y' = x\\(\operatorname{sen}\theta)x' & + & (\cos\theta)y' = y\end{array}\right. \tag{6.33}$$

ou

$$R_\theta X = P,$$

em que $R_\theta = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$. Este sistema tem o número de equações igual ao número de incógnitas e tem solução única, pois a matriz R_θ é invertível. Portanto, pelo Teorema 2.8 na página 68 a solução é dada por

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix} = R_\theta^{-1}P = R_\theta^t P = \begin{bmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}.$$

Os sistemas de coordenadas que aparecem nos dois primeiros exemplos desta seção podem ser obtidos por uma rotação de um ângulo $\theta = \pi/6$ em relação ao sistema original.

A matriz R_θ é chamada **matriz de rotação**. Observe que a matriz R_θ satisfaz, $R_\theta^{-1} = R_\theta^t$. Uma matriz que satisfaz esta propriedade é chamada de **matriz ortogonal**.

Translação

Vamos considerar, agora, o caso em que $O' \neq O$, ou seja, em que ocorre uma **translação** dos eixos coordenados.

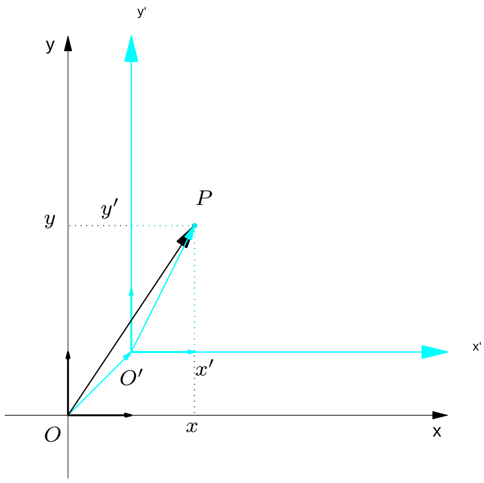


Figura 6.20: Coordenadas de um ponto P em dois sistemas (translação)

Observando a Figura 6.20, obtemos

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'}\,. \tag{6.34}$$

Assim, se $\overrightarrow{OO'} = (h, k)$, então

$$\overrightarrow{O'P} = (x', y') = (x, y) - (h, k) = (x - h, y - k)$$

Logo, as coordenadas de P em relação ao novo sistema são dadas por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = [P]_{\{O', E_1, E_2\}} = \begin{bmatrix} x - h \\ y - k \end{bmatrix}. \tag{6.35}$$

O eixo x' tem equação $y' = 0$, ou seja, $y = k$ e o eixo y', $x' = 0$, ou seja, $x = h$.

Teste do Capítulo

1. (a) Encontre matrizes P e D tais que

$$D = P^t A P,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{bmatrix}.$$

(b) Identificar a cônica, achar a equação no último sistema de coordenadas utilizado e fazer um esboço do gráfico.

$$8x^2 + 8y^2 - 16xy + 33\sqrt{2}x - 31\sqrt{2}y + 70 = 0$$

2. Verifique quais das matrizes seguintes são diagonalizáveis:

(a) $\begin{bmatrix} a & b \\ 3b & c \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

3. (a) Seja $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Calcule D^{10}.

(b) Sabendo-se que $A = P^{-1}DP$, calcule A^{10}.

4. Diga se é verdadeiro ou falso cada item abaixo, justificando.

(a) Se A é uma matriz 2×2 com somente 1 autovalor, então A não é diagonalizável;

(b) Se V e W são autovetores associados a um autovalor λ, então $W - \mathrm{proj}_V W$ é também um autovetor associado a λ.

(c) Se A não é singular, então 0 não é autovalor de A;

(d) As matrizes A e A^2 possuem os mesmos autovetores;

Respostas dos Exercícios

1.1. Matrizes (página 13)

1.1.1.
```
>> A=[2,0;6,7]; B=[0,4;2,-8]; C=[-6,9,-7;7,-3,-2];
>> D=[-6,4,0;1,1,4;-6,0,6]; E=[6,9,-9;-1,0,-4;-6,0,-1];
>> A*B-B*A
   -24   -20
    58    24
>> 2*C-D
??? Erro usando ==> -
Dimensões das matrizes
não são iguais.
```

Usando as propriedades (l) e (n) do Teorema 1.1 na pág. 7:

```
>> 2*D-3*E
   -30   -19    27
     5     2    20
     6     0    15
```

Usando a propriedade (i) do Teorema 1.1 na pág. 7:

```
>> D*(D-E)
    80    34   -22
   -10    -4    45
    72    30   -12
```

1.1.2.
```
>> A=[1,-3,0;0,4,-2]; X=[3;2;5];
>> A*X
    -3
    -2
>> 3*A(:,1)+2*A(:,2)+5*A(:,3)
    -3
    -2
```

1.1.3.
```
>> syms x
>> A=[x,4,-2]; B=[2,-3,5];
>> solve(A*B.')
11
```

1.1.4.
```
>> A(1,:)*B
    -3    30   -25
>> A*B(:,3)
   -25
   -69
    13
>> (B*A(:,2)).'
    14   -48   -16
>> (B(2,:)*A).'
    40
   -48
    72
```

1.1.5.
```
>> syms y
>> A=[1,1/y;y,1];
>> A^2-2*A
[ 0, 0]
```

```
[ 0, 0]
```

1.1.6.
```
>> syms x y z w
>> X=[x,y;z,w]; M=[0,1;-1,0];
>> X*M-M*X
[ -y-z,  x-w]
[  x-w,  z+y]
>> syms a b c d
>> A=[x,y;-y,x]; B=[a,b;-b,a];
>> A*B-B*A
[ 0, 0]
[ 0, 0]
```

1.1.7. (a)
```
>> A=[1,1/2;0,1/3]
A =
     1.0000     0.5000
          0     0.3333
>> A^2,A^3,A^4,A^5
ans =
     1.0000     0.6667
          0     0.1111
ans =
     1.0000     0.7222
          0     0.0370
ans =
     1.0000     0.7407
          0     0.0123
ans =
     1.0000     0.7469
          0     0.0041
>> A^6,A^7,A^8,A^9
ans =
     1.0000     0.7490
          0     0.0014
ans =
     1.0000     0.7497
          0     0.0005
ans =
     1.0000     0.7499
          0     0.0002
ans =
     1.0000     0.7500
          0     0.0001
```

A seqüência parece estar conergindo para a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0.75 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b)
```
>> A=[1/2,1/3;0,-1/5]
A =
     0.5000     0.3333
          0    -0.2000
>> A^2,A^3,A^4,A^5
ans =
     0.2500     0.1000
          0     0.0400
ans =
     0.1250     0.0633
          0    -0.0080
ans =
     0.0625     0.0290
          0     0.0016
ans =
     0.0312     0.0150
          0    -0.0003
>> A^6,A^7,A^8,A^9
ans =
     0.0156     0.0074
          0     0.0001
ans =
     0.0078     0.0037
          0     0.0000
ans =
     0.0039     0.0019
          0     0.0000
ans =
     0.0020     0.0009
          0     0.0000
```

A seqüência parece estar conergindo para a matriz nula $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1.1.8. (a)
```
>> format rat
>> A=[0,0,1;1,0,0;0,1,0]
A =
       0            0            1
       1            0            0
       0            1            0
>> A^2,A^3
ans =
       0            1            0
       0            0            1
       1            0            0
ans =
       1            0            0
       0            1            0
       0            0            1
```

Para $k = 3$, $A^k = I_3$.

(b)
```
>> A^2,A^3,A^4,A^5
ans =
    -1     0     0     0
     0    -1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
ans =
     0    -1     0     0
     1     0     0     0
     0     0     0     1
     0     0     1     0
ans =
     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
ans =
     0     1     0     0
    -1     0     0     0
     0     0     0     1
     0     0     1     0
```
Para $k = 5$, $A^k = A$.

(c)
```
>> A=[0,1,0,0;0,0,1,0;0,0,0,1;0,0,0,0]
A =
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
     0     0     0     0
>> A^2,A^3,A^4
ans =
     0     0     1     0
     0     0     0     1
     0     0     0     0
     0     0     0     0
ans =
     0     0     0     1
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0
ans =
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0
```
Para $k = 4$, $A^k = \bar{0}$.

1.1.9. Concluimos que é muito raro encontrar matrizes cujo produto comute.

1.1.10. Concluimos que matrizes diagonais em geral comutam. Pode-se mostrar que elas sempre comutam (Exercício 1.25 na página 21).

1.1.11. Se a matriz `A` for diagonal, então o produto comuta, se os elementos da diagonal de `A` são iguais. (ver Exercício 1.13 na página 17). A probabilidade de um tal par de matrizes comute é aproximadamente igual a probabilidade de que a primeira matriz tenha os elementos da sua diagonal iguais, ou seja, $11/11^3 = 1/11^2 \approx 1\%$.

1.2. Sistemas Lineares (página 44)

1.2.1. As matrizes que estão na forma reduzida escalonada são A e C.

1.2.2. (a) $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+7\alpha \\ 2-3\alpha \\ -5-\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

(b) $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-3\alpha+6\beta \\ \beta \\ 7-4\alpha \\ 8-5\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(c) $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2-\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

(d) $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+8\alpha-7\beta \\ \beta \\ 5-6\alpha \\ 9-3\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1.2.3. (a)
```
>> A=[1,1,2,8;-1,-2,3,1;3,-7,4,10];
>> escalona(A)
[  1,  1,  2,  8]
[ -1, -2,  3,  1]
[  3, -7,  4, 10]
eliminação 1:
1*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
```

```
-3*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[   1,   1,   2,   8]
[   0,  -1,   5,   9]
[   0, -10,  -2, -14]
eliminação 2:
-1*linha 2 ==> linha 2
[   1,   1,   2,   8]
[   0,   1,  -5,  -9]
[   0, -10,  -2, -14]
-1*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
10*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[    1,    0,    7,   17]
[    0,    1,   -5,   -9]
[    0,    0,  -52, -104]
eliminação 3:
-1/52*linha 3 ==> linha 3
[  1,  0,  7, 17]
[  0,  1, -5, -9]
[  0,  0,  1,  2]
-7*linha 3 + linha 1 ==> linha 1
5*linha 3 + linha 2 ==> linha 2
[ 1, 0, 0, 3]
[ 0, 1, 0, 1]
[ 0, 0, 1, 2]
```

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(b)
```
>> A=[2,2,2,0;-2,5,2,1;8,1,4,-1];
>> escalona(A)
[  2,  2,  2,  0]
[ -2,  5,  2,  1]
[  8,  1,  4, -1]
eliminação 1:
1/2*linha 1 ==> linha 1
[  1,  1,  1,  0]
[ -2,  5,  2,  1]
[  8,  1,  4, -1]
2*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
-8*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[  1,  1,  1,  0]
[  0,  7,  4,  1]
[  0, -7, -4, -1]
eliminação 2:
1/7*linha 2 ==> linha 2
[   1,   1,   1,   0]
[   0,   1, 4/7, 1/7]
[   0,  -7,  -4,  -1]
-1*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
7*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[    1,    0,  3/7, -1/7]
[    0,    1,  4/7,  1/7]
[    0,    0,    0,    0]
```

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} - \frac{3}{7}\alpha \\ \frac{1}{7} - \frac{4}{7}\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

(c)
```
>> A=[0,-2,3,1;3,6,-3,-2;6,6,3,5]
>> escalona(A)
[  0, -2,  3,  1]
[  3,  6, -3, -2]
[  6,  6,  3,  5]
eliminação 1:
linha 2 <==> linha 1
[  3,  6, -3, -2]
[  0, -2,  3,  1]
[  6,  6,  3,  5]
1/3*linha 1 ==> linha 1
[    1,    2,   -1, -2/3]
[    0,   -2,    3,    1]
[    6,    6,    3,    5]
-6*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[    1,    2,   -1, -2/3]
[    0,   -2,    3,    1]
[    0,   -6,    9,    9]
eliminação 2:
-1/2*linha 2 ==> linha 2
[    1,    2,   -1, -2/3]
[    0,    1, -3/2, -1/2]
[    0,   -6,    9,    9]
-2*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
6*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[    1,    0,    2,  1/3]
[    0,    1, -3/2, -1/2]
[    0,    0,    0,    6]
```

O sistema **não** tem solução!

1.2.4.
```
>> A=[1,-2,1;2,-5,1;3,-7,2];
>> B1=[1;-2;-1];B2=[2;-1;2];
>> escalona([A,B1,B2])
[  1, -2,  1,  1,  2]
[  2, -5,  1, -2, -1]
[  3, -7,  2, -1,  2]
eliminação 1:
-2*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
-3*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[  1, -2,  1,  1,  2]
```

```
[  0, -1, -1, -4, -5]
[  0, -1, -1, -4, -4]
eliminação 2:
-1*linha 2 ==> linha 2
[  1, -2,  1,  1,  2]
[  0,  1,  1,  4,  5]
[  0, -1, -1, -4, -4]
2*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
1*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[  1,  0,  3,  9, 12]
[  0,  1,  1,  4,  5]
[  0,  0,  0,  0,  1]
```

(a) $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-3\alpha \\ 4-\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

(b) O sistema **não** tem solução!

1.2.5. (a)

```
>> A=[1,0,5;1,1,1;0,1,-4];
>> B=-4*eye(3)-A;
>> escalona([B,zeros(3,1)])
[ -5,  0, -5,  0]
[ -1, -5, -1,  0]
[  0, -1,  0,  0]
eliminação 1:
linha 2 <==> linha 1
[ -1, -5, -1,  0]
[ -5,  0, -5,  0]
[  0, -1,  0,  0]
-1*linha 1 ==> linha 1
[  1,  5,  1,  0]
[ -5,  0, -5,  0]
[  0, -1,  0,  0]
5*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
[  1,  5,  1,  0]
[  0, 25,  0,  0]
[  0, -1,  0,  0]
eliminação 2:
linha 3 <==> linha 2
[  1,  5,  1,  0]
[  0, -1,  0,  0]
[  0, 25,  0,  0]
-1*linha 2 ==> linha 2
[  1,  5,  1,  0]
[  0,  1,  0,  0]
[  0, 25,  0,  0]
-5*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
-25*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0, 1, 0]
[ 0, 1, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 0]
```

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

(b)

```
>> B=2*eye(3)-A;
>> escalona([B,zeros(3,1)])
[  1,  0, -5,  0]
[ -1,  1, -1,  0]
[  0, -1,  6,  0]
eliminação 1:
1*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
[  1,  0, -5,  0]
[  0,  1, -6,  0]
[  0, -1,  6,  0]
eliminação 2:
1*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[  1,  0, -5,  0]
[  0,  1, -6,  0]
[  0,  0,  0,  0]
```

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\alpha \\ 6\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

1.2.6. (a)

```
>> syms a
>> A=[1,2,-3,4;3,-1,5,2;4,1,a^2-14,a+2];
>> escalona(A)
[      1,      2,      -3,      4]
[      3,     -1,       5,      2]
[      4,      1, a^2-14,    a+2]

eliminação 1:
-3*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
-4*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[      1,      2,     -3,      4]
[      0,     -7,     14,    -10]
[      0,     -7, a^2-2,   a-14]

eliminação 2:
-1/7*linha 2 ==> linha 2
[      1,      2,     -3,      4]
[      0,      1,     -2,   10/7]
[      0,     -7, a^2-2,   a-14]

-2*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
```

```
7*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 8/7 \\ 0 & 1 & -2 & 10/7 \\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4 \end{bmatrix}$$

i. Se $a^2 - 16 = 0$ e $a - 4 = 0$, então o sistema tem infinitas soluções. Neste caso, $a = 4$;

ii. Se $a^2 - 16 = 0$ e $a - 4 \neq 0$, então o sistema não tem solução. Neste caso, $a = -4$;

iii. Se $a^2 - 16 \neq 0$, então o sistema tem solução única. Neste caso, $a \neq \pm 4$;

(b)
```
>> A=[1,1,1,2;2,3,2,5;2,3,a^2-1,a+1];
>> escalona(A)
[      1,      1,      1,      2]
[      2,      3,      2,      5]
[      2,      3, a^2-1,    a+1]
eliminação 1:
-2*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
-2*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[      1,      1,      1,      2]
[      0,      1,      0,      1]
[      0,      1, a^2-3,    a-3]
eliminação 2:
-1*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
-1*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-3 & a-4 \end{bmatrix}$$

i. Se $a^2 - 3 = 0$ e $a - 4 = 0$, então o sistema tem infinitas soluções. Este caso não pode ocorrer;

ii. Se $a^2 - 3 = 0$ e $a - 4 \neq 0$, então o sistema não tem solução. Neste caso, $a = \pm\sqrt{3}$;

iii. Se $a^2 - 3 \neq 0$, então o sistema tem solução única. Neste caso, $a \neq \pm\sqrt{3}$;

1.2.7.
```
>> A=[2,3,5,2500;1,1,1,1000;2,1,4,2000];
>> escalona(A)
[    2,     3,     5, 2500]
[    1,     1,     1, 1000]
[    2,     1,     4, 2000]
eliminação 1:
linha 2 <==> linha 1
[    1,     1,     1, 1000]
[    2,     3,     5, 2500]
[    2,     1,     4, 2000]
-2*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
-2*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[    1,     1,     1, 1000]
[    0,     1,     3,  500]
[    0,    -1,     2,    0]
eliminação 2:
-1*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
1*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[   1,    0,   -2, 500]
[   0,    1,    3, 500]
[   0,    0,    5, 500]
eliminação 3:
1/5*linha 3 ==> linha 3
[   1,    0,   -2, 500]
[   0,    1,    3, 500]
[   0,    0,    1, 100]
2*linha 3 + linha 1 ==> linha 1
-3*linha 3 + linha 2 ==> linha 2
[   1,    0,    0, 700]
[   0,    1,    0, 200]
[   0,    0,    1, 100]
```

Foram vendidos 700 kg do produto A, 200 kg do produto B e 100 kg do produto C.

1.2.8. Substituindo os pontos na função obtemos:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & & & & d & = & 10 \\ a & + & b & + & c & + & d & = & 7 \\ 27a & + & 9b & + & 3c & + & d & = & -11 \\ 64a & + & 16b & + & 4c & + & d & = & -14 \end{array}\right. .$$

Substituindo $d = 10$ nas outras equações e escalonando a matriz aumentada do sistema correspondente:

```
>> escalona(C)
[   1,   1,   1,  -3]
[  27,   9,   3, -21]
[  64,  16,   4, -24]
eliminação 1:
-27*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
-64*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[   1,   1,   1,  -3]
[   0, -18, -24,  60]
[   0, -48, -60, 168]
eliminação 2:
```

```
-1/18*linha 2 ==> linha 2
[      1,      1,      1,     -3]
[      0,      1,    4/3, -10/3]
[      0,    -48,    -60,    168]
-1*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
48*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[      1,      0,   -1/3,    1/3]
[      0,      1,    4/3, -10/3]
[      0,      0,      4,      8]
eliminação 3:
1/4*linha 3 ==> linha 3
[      1,      0,   -1/3,    1/3]
[      0,      1,    4/3, -10/3]
[      0,      0,      1,      2]
1/3*linha 3 + linha 1 ==> linha 1
-4/3*linha 3 + linha 2 ==> linha 2
[  1,  0,  0,  1]
[  0,  1,  0, -6]
[  0,  0,  1,  2]
```

Assim, os coeficientes são $a = 1, b = -6, c = 2$ e $d = 10$ e o polinômio $p(x) = x^3 - 6x^2 + 2x + 10$.

1.2.9. Substituindo os pontos na equação do círculo obtemos:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -2a & + & 7b & + & c & = & -[(-2)^2+7^2] & = & -53 \\ -4a & + & 5b & + & c & = & -[(-4)^2+5^2] & = & -41 \\ 4a & - & 3b & + & c & = & -[4^2+3^2] & = & -25 \end{array}\right. .$$

```
>> A=[-2,7,1,-53;-4,5,1,-41;4,-3,1,-25];
>> escalona(A)
[  -2,    7,    1, -53]
[  -4,    5,    1, -41]
[   4,   -3,    1, -25]
eliminação 1:
-1/2*linha 1 ==> linha 1
[     1, -7/2, -1/2, 53/2]
[    -4,     5,     1,   -41]
[     4,    -3,     1,   -25]
4*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
-4*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[     1, -7/2, -1/2, 53/2]
[     0,    -9,    -1,    65]
[     0,    11,     3, -131]
eliminação 2:
-1/9*linha 2 ==> linha 2
[      1,   -7/2,   -1/2,   53/2]
[      0,      1,    1/9, -65/9]
[      0,     11,      3,  -131]
7/2*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
-11*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[       1,       0,    -1/9,    11/9]
[       0,       1,     1/9,   -65/9]
[       0,       0,    16/9, -464/9]
eliminação 3:
9/16*linha 3 ==> linha 3
[      1,      0,   -1/9,   11/9]
[      0,      1,    1/9,  -65/9]
[      0,      0,      1,    -29]
1/9*linha 3 + linha 1 ==> linha 1
-1/9*linha 3 + linha 2 ==> linha 2
[    1,    0,    0,   -2]
[    0,    1,    0,   -4]
[    0,    0,    1,  -29]
```

Os coeficientes são $a = -2, b = -4$ e $c = -29$ e a equação do círculo é $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 29 = 0$.

1.2.10. (a)

```
>> A=[1,-2,5,b1;4,-5,8,b2;-3,3,-3,b3];
>> escalona(A)
[  1, -2,   5, b1]
[  4, -5,   8, b2]
[ -3,   3, -3, b3]
eliminação 1:
-4*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
3*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, -2,    5,        b1]
[ 0,  3, -12,  b2-4*b1]
[ 0, -3,  12,  b3+3*b1]
eliminação 2:
1/3*linha 2 ==> linha 2
[ 1, -2,  5,               b1]
[ 0,  1, -4, 1/3*b2-4/3*b1]
[ 0, -3, 12,         b3+3*b1]
2*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
3*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0, -3, -5/3*b1+2/3*b2]
[ 0, 1, -4,   1/3*b2-4/3*b1]
[ 0, 0,  0,         b3-b1+b2]
```

O sistema é consistente se, e somente se, $b_3 - b_1 + b_2 = 0$.

(b)

```
>> syms b1 b2 b3
>> A=[1,-2,-1,b1;-4,5,2,b2;-4,7,4,b3];
>> escalona(A)
```

```
[  1, -2, -1, b1]
[ -4,  5,  2, b2]
[ -4,  7,  4, b3]
eliminação 1:
4*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
4*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, -2, -1,       b1]
[ 0, -3, -2, b2+4*b1]
[ 0, -1,  0, b3+4*b1]
eliminação 2:
linha 3 <==> linha 2
[ 1, -2, -1,       b1]
[ 0, -1,  0, b3+4*b1]
[ 0, -3, -2, b2+4*b1]
-1*linha 2 ==> linha 2
[ 1, -2, -1,        b1]
[ 0,  1,  0, -b3-4*b1]
[ 0, -3, -2,  b2+4*b1]
2*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
3*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0, -1,   -7*b1-2*b3]
[ 0, 1,  0,     -b3-4*b1]
[ 0, 0, -2, b2-8*b1-3*b3]
```

O sistema é consistente para todos os valores reais de b_1, b_2 e b_3.

1.2.11.

```
>> A=[0,1,7,8;1,3,3,8;-2,-5,1,-8];
>> escalona(A)
[  0,  1,  7,  8]
[  1,  3,  3,  8]
[ -2, -5,  1, -8]
eliminação 1:
linha 2 <==> linha 1
[  1,  3,  3,  8]
[  0,  1,  7,  8]
[ -2, -5,  1, -8]
2*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 3, 3, 8]
[ 0, 1, 7, 8]
[ 0, 1, 7, 8]
eliminação 2:
-3*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
-1*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[   1,   0, -18, -16]
[   0,   1,   7,   8]
[   0,   0,   0,   0]
>> I=eye(3);E=oe(-1,2,3,I),...
F=oe(-3,2,1,I),G=oe(2,1,3,I),H=oe(I,1,2)
E =[  1,  0,  0]F =[  1, -3,  0]
    [  0,  1,  0]    [  0,  1,  0]
    [  0, -1,  1]    [  0,  0,  1]
G =[ 1, 0, 0]H =[ 0, 1, 0]
    [ 0, 1, 0]    [ 1, 0, 0]
    [ 2, 0, 1]    [ 0, 0, 1]
>> E*F*G*H*A
[   1,   0, -18, -16]
[   0,   1,   7,   8]
[   0,   0,   0,   0]
```

1.2.12. (a)

```
>> A=[1,2,0,-3,1,0,2;1,2,1,-3,1,2,3;...
1,2,0,-3,2,1,4;3,6,1,-9,4,3,9]
>> escalona(A)
[  1,  2,  0, -3,  0, -1,  0]
[  0,  0,  1,  0,  0,  2,  1]
[  0,  0,  0,  0,  1,  1,  2]
[  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0]
```

$$\left\{\begin{array}{rrrrrr} x_1+2x_2 & & -\,3x_4 & & - & x_6=2\\ & x_3 & & & + & 2x_6=1\\ & & & x_5 & + & x_6=2\end{array}\right.$$

$X=[2+\alpha+3\beta-2\gamma\quad \gamma\quad 1-2\alpha\quad \beta\quad 2-\alpha\quad \alpha]^t$, $\forall \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

(b)

```
>> A=[1,3,-2,0,2,0,0;2,6,-5,-2,4,-3,-1;...
0,0,5,10,0,15,5;2,6,0,8,4,18,6]
>> escalona(A)
[   1,   3,   0,   4,   2,   0,   0]
[   0,   0,   1,   2,   0,   0,   0]
[   0,   0,   0,   0,   0,   1, 1/3]
[   0,   0,   0,   0,   0,   0,   0]
```

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} x_1+3x_2 & & +\,4x_4 & +\;\;2x_5 & =0\\ & x_3 & +\,2x_4 & & =0\\ & & & x_6 & =\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

$X=[-2\alpha-4\beta-3\gamma\quad \gamma\quad -2\beta\quad \beta\quad \alpha\quad 1/3]^t$, $\forall \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

1.2.13.

```
>> syms a, B=[4,3,1,6]';
>> A=[1,1,1,1;1,3,-2,a;
2,2*a-2,-a-2,3*a-1;3,a+2,-3,2*a+1]
>> escalona([A,B])
[ 1,  0,  0,  0, (4*a-11)/(a-5)]
[ 0,  1,  0,  0,       -4/(a-5)]
[ 0,  0,  1,  0,       -4/(a-5)]
[ 0,  0,  0,  1,       -1/(a-5)]
>> solve(-3/2*a+5/4+1/4*a^2,a)
ans = [ 1][ 5]
```

Se $a\neq 1$ e $a\neq 5$, então $X=[\frac{4a-11}{a-5}\;\;\frac{-4}{a-5}\;\;\frac{-4}{a-5}\;\;\frac{-1}{a-5}]^t$.

```
>> C=subs(A,a,1)
>> escalona([C,B])
[ 1, 0, 0, 1, 2]
[ 0, 1, 0, 0, 1]
[ 0, 0, 1, 0, 1]
[ 0, 0, 0, 0, 0]
```

Se $a = 1$, então $X = [2 - \alpha, 1, 1, \alpha]^t\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

```
>> D=subs(A,a,5)
>> escalona([D,B])
[    1,     0,  5/2,    -1,     0]
[    0,     1, -3/2,     2,     0]
[    0,     0,    0,     0,     1]
[    0,     0,    0,     0,     0]
```

Se $a = 5$, então o sistema não tem solução.

1.2.14. (a)
```
>> A=[1,2,3,1,8;1,3,0,1,7;1,0,2,1,3];
>> escalona(A)
[ 1, 2, 3, 1, 8]
[ 1, 3, 0, 1, 7]
[ 1, 0, 2, 1, 3]

[ 1, 0, 0, 1, 1]
[ 0, 1, 0, 0, 2]
[ 0, 0, 1, 0, 1]
```

$$\{(1 - \alpha, 2, 1, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

(b)
```
>> A=[1,1,3,-3,0;0,2,1,-3,3;1,0,2,-1,-1];
>> escalona(A)
[  1,  1,  3, -3,  0]
[  0,  2,  1, -3,  3]
[  1,  0,  2, -1, -1]

[  1,  0,  0,  1,  1]
[  0,  1,  0, -1,  2]
[  0,  0,  1, -1, -1]
```

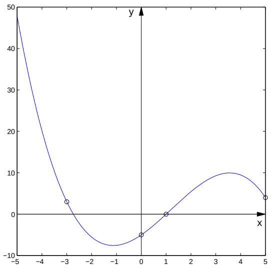
$$\{(1 - \alpha, 2 + \alpha, -1 + \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

(c)
```
>> A=[1,2,3,0;1,1,1,0;1,1,2,0;1,3,3,0];
>> escalona(A)
[ 1, 2, 3, 0]
[ 1, 1, 1, 0]
[ 1, 1, 2, 0]
[ 1, 3, 3, 0]

[ 1, 0, 0, 0]
[ 0, 1, 0, 0]
[ 0, 0, 1, 0]
[ 0, 0, 0, 0]
```

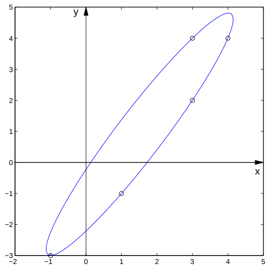
$$\{(0, 0, 0)\}$$

1.2.15.
```
>> P=randi(4,2)
P =  5      4
    -3      3
     1      0
     0     -5
>> A=matvand(P(:,1),3),B=P(:,2)
A =125     25      5      1
   -27      9     -3      1
     1      1      1      1
     0      0      0      1
B =  4
     3
     0
    -5
>> R=escalona([A,B])
[ 125,  25,   5,   1,   4]
[ -27,   9,  -3,   1,   3]
[   1,   1,   1,   1,   0]
[   0,   0,   0,   1,  -5]
R   = [ 1,  0,  0,  0, -163/480]
      [ 0,  1,  0,  0,    99/80]
      [ 0,  0,  1,  0, 1969/480]
      [ 0,  0,  0,  1,       -5]

>> a=R(1,5);b=R(2,5);c=R(3,5);d=R(4,5);
>> clf,po(P),syms x,plotf1(a*x^3+b*x^2+c*x+d,[-5,5])
>> eixos
```

Pode não ser possível encontrar o polinômio, se mais de um ponto tiver a mesma ordenada y_i.



Observação. A sua resposta pode ser diferente da que está aqui.



Observação. A sua resposta pode ser diferente da que está aqui.

1.2.16.
```
>> P=randi(5,2)
P =  3     2
    -1    -3
     1    -1
     3     4
     4     4
>> A=matvand(P,2)
A =  9     6     4     3     2     1
     1     3     9    -1    -3     1
     1    -1     1     1    -1     1
     9    12    16     3     4     1
    16    16    16     4     4     1
>> R=escalona([A,zeros(5,1)])
[  9,  6,  4,  3,  2,  1,  0]
[  1,  3,  9, -1, -3,  1,  0]
[  1, -1,  1,  1, -1,  1,  0]
[  9, 12, 16,  3,  4,  1,  0]
[ 16, 16, 16,  4,  4,  1,  0]
R  = [1,      0,      0,      0,      0, -35/8,      0]
[      0,      1,      0,      0,      0,  45/8,      0]
[      0,      0,      1,      0,      0,    -2,      0]
[      0,      0,      0,      1,      0,  65/8,      0]
[      0,      0,      0,      0,      1, -39/8,      0]

>> a=-R(1,6);b=-R(2,6);c=-R(3,6);
>> d=-R(4,6);e=-R(5,6);f=1;
>> clf,po(P),syms x y,
>> plotci(a*x^2+b*x*y+c*y^2+d*x+e*y+f,[-5,5],[-5,5])
>> eixos
```

2.1. Matriz Inversa (página 71)

2.1.1. A matriz é singular, pois o sistema homogêneo tem solução não trivial (Teorema 2.8 na página 68).

2.1.2. (a)
```
>> A=[1,2,3;1,1,2;0,1,2];
>> B=[A,eye(3)];
>> escalona(B)
[1, 0, 0, 0, 1,-1]
[0, 1, 0, 2,-2,-1]
[0, 0, 1,-1, 1, 1]
```
(b)
```
[1, 0, 0, 3, 2,-4]
[0, 1, 0,-1, 0, 1]
[0, 0, 1, 0,-1, 1]
```
(c)
```
[1,  0,  0,  0, 7/3,-1/3,-1/3,-2/3]
[0,  1,  0,  0, 4/9,-1/9,-4/9, 1/9]
[0,  0,  1,  0,-1/9,-2/9, 1/9, 2/9]
[0,  0,  0,  1,-5/3, 2/3, 2/3, 1/3]
```
(d)
```
[1, 0,  0,  1, -1,    0]
[0, 1,  0,3/2,1/2,-3/2]
[0, 0,  1, -1,  0,    1]
```
(e)
```
[ 1  0  1   1  0  -2 ]
[ 0  1  1   0  0   1 ]
[ 0  0  0  -1  1   1 ]

Continua ? (s/n) n
```
(f)
```
[1, 0,  0,1/4, 5/4,-3/4, 1/2, 0]
[0, 1,  0,1/2,-1/2, 1/2,   0, 0]
[0, 0,  1,1/4, 1/4, 1/4,-1/2, 0]
[0, 0,  0,  0,  -2,  -1,  -2, 1]

Continua ? (s/n) n
```

2.1.3.
```
>> syms a
>> A=[1,1,0;1,0,0;1,2,a];
>> escalona(A)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

```
Continua ?  (s/n) n
```
Para valores de a diferentes de zero a matriz A tem inversa.

2.1.4.
```
>> invA=[3,2;1,3]; invB=[2,5;3,-2];
>> invAB=invB*invA
invAB =     11            19
             7             0
```

2.1.5.
```
>> invA=[2,3;4,1]; B=[5;3];
>> X=invA*B
X =     19
        23
```

2.2. Determinantes (página 91)

2.2.1. $\det(A^2) = 9$; $\det(A^3) = -27$; $\det(A^{-1}) = -1/3$; $\det(A^t) = -3$.

2.2.2. $\det(A^t B^{-1}) = \det(A)/\det(B) = -2/3$.

2.2.3. (a)
$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+a_{32} \end{bmatrix} =$$
$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} +$$
$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{bmatrix} = \det(A) + 0 = 3$$

(b)
$$\det\begin{bmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{11}-a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{22} & a_{21}-a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a_{32} & a_{31}-a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$
$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} +$$
$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & -a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & -a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} +$$
$$\det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} +$$
$$\det\begin{bmatrix} a_{12} & -a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & -a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & -a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -2\det(A) = -6$$

2.2.4. (a)
```
>> A=[1,-2,3,1;5,-9,6,3;-1,2,-6,-2;2,8,6,1];
>> detopelp(A)
[  1, -2,   3,   1]
```

```
[  5, -9,  6,  3]
[ -1,  2, -6, -2]
[  2,  8,  6,  1]
eliminação 1:
-5*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
1*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
-2*linha 1 + linha 4 ==> linha 4
[  1, -2,  3,  1]
[  0,  1, -9, -2]
[  0,  0, -3, -1]
[  0, 12,  0, -1]
eliminação 2:
-12*linha 2 + linha 4 ==> linha 4
[   1,  -2,   3,   1]
[   0,   1,  -9,  -2]
[   0,   0,  -3,  -1]
[   0,   0, 108,  23]
eliminação 3:
-1/3*linha 3 ==> linha 3
[   1,  -2,   3,   1]
[   0,   1,  -9,  -2]
[   0,   0,   1, 1/3]
[   0,   0, 108,  23]
det(A) = -3*det(A)
-108*linha 3 + linha 4 ==> linha 4
[   1,  -2,   3,   1]
[   0,   1,  -9,  -2]
[   0,   0,   1, 1/3]
[   0,   0,   0, -13]
ans = 39
```

(b)
```
>> A=[2,1,3,1;1,0,1,1;0,2,1,0;0,1,2,3];
>> detopelp(A)
[ 2, 1, 3, 1]
[ 1, 0, 1, 1]
[ 0, 2, 1, 0]
[ 0, 1, 2, 3]
eliminação 1:
linha 2 <==> linha 1
[ 1, 0, 1, 1]
[ 2, 1, 3, 1]
[ 0, 2, 1, 0]
[ 0, 1, 2, 3]
det(A) = (-1)*det(A)
-2*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
[  1,  0,  1,  1]
[  0,  1,  1, -1]
[  0,  2,  1,  0]
[  0,  1,  2,  3]
eliminação 2:
-2*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
-1*linha 2 + linha 4 ==> linha 4
[  1,  0,  1,  1]
[  0,  1,  1, -1]
[  0,  0, -1,  2]
[  0,  0,  1,  4]
eliminação 3:
-1*linha 3 ==> linha 3
[  1,  0,  1,  1]
[  0,  1,  1, -1]
[  0,  0,  1, -2]
[  0,  0,  1,  4]
det(A) = (-1)*(-1)*det(A)
-1*linha 3 + linha 4 ==> linha 4
[  1,  0,  1,  1]
[  0,  1,  1, -1]
[  0,  0,  1, -2]
[  0,  0,  0,  6]
ans = 6
```

2.2.5. (a)
```
>> A=[0,1,2;0,0,3;0,0,0];
>> p=det(A-x*eye(3))
p =-x^3
>> solve(p)
[0][0][0]
```

(b) `p =(1-x)*(3-x)*(-2-x)  [ 1][ 3][-2]`

(c) `p =(2-x)*(4-5*x+x^2)  [2][4][1]`

(d) `p =-8-2*x+5*x^2-x^3  [ 2][ 4][-1]`

2.2.6. (a)
```
>> A=[2,0,0;3,-1,0;0,4,3];
>> B=A-x*eye(3);
>> p=det(B)
p =(2-x)*(-1-x)*(3-x)
>> solve(p)
[ 2][-1][ 3]
```

(b) `p =(2-x)^2*(1-x)  [2][2][1]`

(c) `p =(1-x)*(2-x)*(-1-x)*(3-x)  [ 1][ 2][-1][ 3]`

(d) `p =(2-x)^2*(1-x)^2  [2][2][1][1]`

2.2.7. (a)
```
>> Bm1=subs(B,x,-1);
>> escalona(Bm1)
[1, 0, 0]
[0, 1, 1]
[0, 0, 0]
```

$$\mathbb{W}_{-1} = \{\begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} | \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

```
>> B2=subs(B,x,2);
>> escalona(B2)
[1, 0, 1/4]
[0, 1, 1/4]
[0, 0,   0]
```

$$\mathbb{W}_2 = \{\begin{bmatrix} -\alpha \\ -\alpha \\ 4\alpha \end{bmatrix} | \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

```
>> B3=subs(B,x,3);
>> escalona(B3)
[1, 0, 0]
[0, 1, 0]
[0, 0, 0]
```

$$\mathbb{W}_3 = \{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} | \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

(b)
```
[1, 3, 0]
[0, 0, 1]
[0, 0, 0]
```

$$\mathbb{W}_1 = \{\begin{bmatrix} -3\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

```
[0, 1, 0]
[0, 0, 0]
[0, 0, 0]
```

$$\mathbb{W}_2 = \{\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

(c)
```
[1, 1, 0, 0]
[0, 0, 1, 0]
[0, 0, 0, 1]
[0, 0, 0, 0]
```

$$\mathbb{W}_{-1} = \{[\ -\alpha \quad \alpha \quad 0 \quad 0\ ]^t \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

```
[0, 1, 0, 0]
[0, 0, 1, 0]
[0, 0, 0, 1]
[0, 0, 0, 0]
```

$$\mathbb{W}_1 = \{[\ \alpha \quad 0 \quad 0 \quad 0\ ]^t \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

```
[1, 0, 0, 29/3]
[0, 1, 0,  7/3]
[0, 0, 1,    3]
[0, 0, 0,    0]
```

$$\mathbb{W}_2 = \{[\ -29\alpha \quad -7\alpha \quad -9\alpha \quad 3\alpha\ ]^t \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

```
[1, 0, -9/4, 0]
[0, 1, -3/4, 0]
[0, 0,    0, 1]
[0, 0,    0, 0]
```

$$\mathbb{W}_3 = \{[\ 9\alpha \quad 3\alpha \quad 4\alpha \quad 0\ ]^t \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

(d)
```
[1, 0, -3, 0]
[0, 1,  3, 0]
[0, 0,  0, 1]
[0, 0,  0, 0]
```

$$\mathbb{W}_1 = \{[\ 3\alpha \quad -3\alpha \quad \alpha \quad 0\ ]^t \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

```
[0, 1, 0, 0]
[0, 0, 1, 0]
[0, 0, 0, 1]
[0, 0, 0, 0]
```

$$\mathbb{W}_2 = \{[\ \alpha \quad 0 \quad 0 \quad 0\ ]^t \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

2.2.8. Concluimos que é muito raro encontrar matrizes invertíveis.

2.2.9.
```
>> menc=lerarq('menc1'); key=lerarq('key');
>> y=char2num(menc); M=char2num(key);
>> N=escalona([M,eye(5)])
[ 37, 12, 12,  4, 93,  1,  0,  0,  0,  0]
[  0,  4,  0,  1,  0,  0,  1,  0,  0,  0]
[  3,  0,  1,  0,  0,  0,  0,  1,  0,  0]
[  9,  3,  3,  1,  0,  0,  0,  0,  1,  0]
```

```
[ 18,  6,  6,  2,  1,  0,  0,  0,  0,  1]
N =[1,0,0,0,0, 1, 0,  0, 182, -93]
   [0,1,0,0,0, 0, 1,  3,  -1,   0]
   [0,0,1,0,0,-3, 0,  1,-546, 279]
   [0,0,0,1,0, 0,-3,-12,   4,   0]
   [0,0,0,0,1, 0, 0,  0,  -2,   1]
>> N=N(:,6:10)
N =
[    1,    0,    0,  182,  -93]
[    0,    1,    3,   -1,    0]
[   -3,    0,    1, -546,  279]
[    0,   -3,  -12,    4,    0]
[    0,    0,    0,   -2,    1]
>> x=N*y;
>> num2char(x)
ans =
Desejo boa sorte a todos que estudam Álgebra Linear !
>> menc=lerarq('menc2');
>> y=char2num(menc);
>> x=N*y;
>> num2char(x)
ans = Buda tinha este nome por que vivia setado!
```

Deve ser uma matriz com entradas entre 0 e 158 com determinante igual a ± 1, para que exista inversa e a sua inversa seja uma matriz com entradas inteiras.

3.1. Soma de Vetores e Multiplicação por Escalar (página 110)

3.1.1. A equação $3X - 2V = 15(X - U)$ é equivalente a $3X - 2V = 15X - 15U$. Somando-se $-15X + 2V$ obtemos $-15X + 3X = 2V - 15U$ ou $-12X = 2V - 15U$ multiplicando-se por $-\frac{1}{12}$ obtemos
$X = \frac{5}{4}U - \frac{1}{6}V$.

3.1.2. Multiplicando-se a segunda equação por 2 e somando-se a primeira, obtemos $12X = 3U + 2V$ ou $X = \frac{1}{4}U + \frac{1}{6}V$. Substituindo-se X na primeira equação obtemos, $\frac{3}{2}U + V - 2Y = U$ ou $2Y = \frac{1}{2}U + V$ ou $Y = \frac{1}{4}U + \frac{1}{2}V$.

3.1.3.
```
>> OP=[ 2, 3, -5]; V=[ 3, 0, -3];
>> OQ=OP+V
OQ =      5      3     -8
```
As coordenadas da extremidade do segmento orientado são $(5, 3, -8)$.

3.1.4.
```
>> OP=[1,0,3]; OM=[1,2,-1];
>> MP=OP-OM;  OPlinha=OM-MP
OPlinha =      1      4     -5
```
As coordenadas de P' são $(1, 4, -5)$.

3.1.5. (a)
```
>> OA=[5,1,-3];OB=[0,3,4];OC=[0,3,-5];
>> AB=OB-OA, AC=OC-OA,
AB =     -5      2      7
AC =     -5      2     -2
```
Os pontos não são colineares, pois $\overrightarrow{AC} \neq \lambda \overrightarrow{AB}$.

(b)
```
>> OA=[-1,1,3];OB=[4,2,-3];OC=[14,4,-15];
>> AB=OB-OA, AC=OC-OA,
AB =      5      1     -6
AC =     15      3    -18
```
Os pontos são colineares, pois $\overrightarrow{AC} = 3\,\overrightarrow{AB}$.

3.1.6.
```
>> OA=[1,-2,-3];OB=[-5,2,-1];OC=[4,0,-1];
>> DC=OB-OA, OD=OC-DC
DC =     -6      4      2
OD =     10     -4     -3
```
O ponto é $D = (10, -4, -3)$.

3.1.7. (a) A equação $xV + yW = U$ é equivalente ao sistema $\left\{\begin{array}{rcrcr} 9x & - & y & = & -4 \\ -12x & + & 7y & = & -6 \\ -6x & + & y & = & 2 \end{array}\right.$, cuja matriz aumentada é a matriz que tem colunas V, W e U.
```
>> V=[9,-12,-6];W=[-1,7,1];U=[-4,-6,2];
>> escalona([V;W;U]')
[      1,      0, -2/3]
[      0,      1,   -2]
[      0,      0,    0]
```
Assim, $U = -2/3V - 2W$.

(b)
```
>> V=[5,4,-3];W=[2,1,1];U=[-3,-4,1];
>> escalona([V;W;U]')
[      1,      0,  -5/3]
[      0,      1,   8/3]
[      0,      0, -20/3]
```
Assim, U não é combinação linear de V e W.

3.2. Produtos de Vetores (página 140)

3.2.1.
```
>> V=[1,2,-3]; W=[2,1,-2];
>> Va=(V+W)/no(V+W), Vb=(V-W)/no(V-W),...
>> Vc=(2*V-3*W)/no(2*V-3*W)
```
$Va = \left[\begin{array}{ccc} \frac{3}{43}\sqrt{43} & \frac{3}{43}\sqrt{43} & -\frac{5}{43}\sqrt{43} \end{array}\right]$
$Vb = \left[\begin{array}{ccc} -\frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{3} \end{array}\right]$
$Vc = \left[\begin{array}{ccc} -\frac{4}{17}\sqrt{17} & \frac{1}{17}\sqrt{17} & 0 \end{array}\right]$

3.2.2.
```
>> V=[2,2,1]; W=[6,2,-3];
>> X=V/no(V)+W/no(W), U=X/no(X)
X=[32/21, 20/21, -2/21]
```
$\left[\begin{array}{ccc} \frac{16}{357}\sqrt{17}\sqrt{21} & \frac{10}{357}\sqrt{17}\sqrt{21} & -\frac{1}{357}\sqrt{17}\sqrt{21} \end{array}\right]$

3.2.3.
```
>> syms x
>> V=[x,3,4];W=[3,1,2];
>> solve(pe(V,W))
-11/3
```
Para $x = -11/3$, V e W são perpendiculares.

3.2.4.
```
>> V=[x,2,4];W=[x,-2,3];
>> pe(V,W)
x^2+8
```
A equação $x^2 + 8$ não tem solução real.

3.2.5.
```
>> Va=[2,1,0];Wa=[0,1,-1];Vb=[1,1,1];
>> Wb=[0,-2,-2];Vc=[3,3,0];Wc=[2,1,-2];
>> cosVaWa=pe(Va,Wa)/(no(Va)*no(Wa)),...
>> cosVbWb=pe(Vb,Wb)/(no(Vb)*no(Wb)),...
>> cosVcWc=pe(Vc,Wc)/(no(Vc)*no(Wc))
```
cosVaWa=$\frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{2}$, cosVbWb=$-\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{2}$, cosVcWc=$\frac{1}{2}\sqrt{2}$. O ângulo entre Va e Wa é $\arccos(\sqrt{10}/10)$ entre Vb e Wb é $\arccos(-\sqrt{6}/3)$ e entre Vc e Wc é $\arccos(\sqrt{2}/2) = \pi/4$.

3.2.6.
```
>> W=[-1,-3,2]; V=[0,1,3];
>> W1=(pe(W,V)/pe(V,V))*V, W2=W-W1
W1 =      0           3/10         9/10
W2 =     -1         -33/10        11/10
```

3.2.7.
```
>> A=[2,2,1];B=[3,1,2];C=[2,3,0];D=[2,3,2];
>> M=[B-A;C-A;D-A], detM=det(M)
M =   1          -1           1
      0           1          -1
      0           1           1    detM=2
>> A=[2,0,2];B=[3,2,0];C=[0,2,1];D=[10,-2,1];
>> M=[B-A;C-A;D-A], detM=det(M)
M =   1           2          -2
     -2           2          -1
      8          -2          -1    detM=0
```
No item (a) os pontos **não** são coplanares e no item (b) eles são coplanares.

3.2.8.
```
>> A=[2,1,6];B=[4,1,3];C=[1,3,2];D=[1,2,1];
>> M=[B-A;C-A;D-A], detM=det(M)
M =   2           0          -3
     -1           2          -4
     -1           1          -5 detM=-15
```
O volume do paralelepípedo é 15 unids. de vol.

3.2.9.
```
>> A=[1,0,1];B=[2,1,3];C=[3,2,4];
>> V=pv(A-B,C-B), norma=no(V)
AD =     1            -1            0
```
norma=$\sqrt{2}$

A área do paralelogramo é $\sqrt{2}$ unidades de área.

3.2.10.
```
>> A=[1,2,1];B=[3,0,4];C=[5,1,3];
>> V=pv(B-A,C-A), norma=no(V)
AD =    -1            8             6
```
norma=$\sqrt{101}$

A área do triângulo é $\sqrt{101}/2$ unidades de área.

3.2.11.
```
>> syms x y z
>> X=[x,y,z]; V=[1,0,1]; W=[2,2,-2];
>> expr1=pv(X,V)-W, expr2=pe(X,X)-6
expr1 = [   y-2, z-x-2,  -y+2]
expr2 = x^2+y^2+z^2-6
>> S=solve(expr1(1),expr1(2),expr1(3),expr2)
S = x: [2x1 sym]  y: [2x1 sym]  z: [2x1 sym]
>> S.x, S.y, S.z
ans =[ -1][ -1] ans =[ 2][ 2] ans =[ 1][ 1]
```
Logo, $X = (-1, 2, 1)$.

3.2.12.
```
>> X=[x,y,z]; V=[1,1,0]; W=[-1,0,1]; U=[0,1,0];
>> expr1=pe(X,V), expr2=pe(X,W),...
>> expr3=pe(X,X)-3, expr4=pe(X,U)
expr1=x+y,expr2=z-x,expr3=x^2+y^2+z^2-3,expr4=y
>> solve(expr1,expr2,expr3)
S =  x: [2x1 sym]  y: [2x1 sym]  z: [2x1 sym]
>> S.x, S.y, S.z
ans =[ -1][  1] ans =[  1][ -1] ans =[ -1][  1]
```
Como y tem que ser maior que zero, $X = (-1, 1, -1)$.

3.2.13.
```
>> A=[3,0,2];B=[4,3,0];C=[8,1,-1];
>> pe(B-A,C-A), pe(A-B,C-B), pe(A-C,B-C)
14,0,21
```
Portanto o ângulo reto está no vértice B.

4.1. Equações de Retas e Planos (página 161)

4.1.1.
```
>> syms x y z
>> N=[2,-1,5]; P=[1,-2,1]; X=[x,y,z];
>> PX=X-P; expr=pe(PX,N)
expr =2*x-9-y+5*z
```
A equação do plano é $2x - y + 5z - 9 = 0$.

4.1.2.
```
>> X=[x,y,z]; P=[2,1,0]; PX=X-P
PX =[x-2, y-1, z]
>> M=[PX;1,2,-3;2,-1,4], expr=det(M)
M =[x-2, y-1, z]
   [  1,   2,-3]
   [  2,  -1, 4]   expr = 5*x-10*y-5*z
```
A equação do plano é $5x - 10y - 5z = 0$.

4.1.3.
```
>> P=[1,0,0]; Q=[1,0,1]; N1=[0,1,-1];
>> X=[x,y,z]; PQ=Q-P, PX=X-P
PQ =[0, 0, 1],PX =[x-1, y, z]
>> M=[PX;PQ;N1], expr=det(M)
M =[x-1, y, z]
   [  0, 0, 1]
   [  0, 1,-1] expr = -x+1
```
A equação do plano é $-x + 1 = 0$.

4.1.4.
```
>> V1=[2,2,1]; V2=[1,1,1]; P1=[2,0,0];
>> X=[x,y,z]; P1X=X-P1
P1X =[x-2, y, z]
>> M=[P1X;V1;V2], expr=det(M)
M =[x-2, y, z]
   [  2, 2, 1]
   [  1, 1, 1] expr = x-2-y
```
A equação do plano é $x - y - 2 = 0$.

4.1.5.

(a)
```
>> solve('4=2+t'), solve('1=4-t'),...
>> solve('-1=1+2*t')
ans = 2 ans = 3 ans = -1
```
Logo não existe um valor de t tal que $P = (2, 4, 1) + t(1, -1, 2)$.

(b)
```
>> P=[4,1,-1]; Q=[2,4,1]; V=[1,-1,2];
>> X=[x,y,z];
>> PX=X-P, PQ=Q-P
PX = [x-4, y-1, z+1] PQ = [-2, 3, 2]
>> M=[PX;PQ;V], expr=dete(M)
M =[x-4,y-1,z+1]
   [ -2,  3,  2]
   [  1, -1,  2] expr = 8*x-39+6*y-z
```
A equação do plano é $8x + 6y - z - 39 = 0$.

4.1.6. Fazendo $z = 0$ nas equações dos planos π_1 e π_2 e resolvendo o sistema resultante, obtemos
```
>> expr1=x-y+1;expr2=x+y-1;
>> S=solve(expr1,expr2)
>> S.x, S.y
ans = 0 ans = 1
```
Portanto, o ponto $P = (0, 1, 0)$ pertence a π_1 e a π_2.
```
>> P=[0,1,0]; N=[1,1,1]; X=[x,y,z];
>> PX=X-P, expr=pe(PX,N)
PX =[x, y-1, z] expr = x+y-1+z
```
A equação do plano é $x + y + z - 1 = 0$.

4.1.7.

(a)
```
>> N1=[1,2,-3]; N2=[1,-4,2]; V=pv(N1,N2)
V =     -8     -5     -6
```
Os planos se interceptam segundo uma reta cujo vetor diretor é $V = (-8, -5, -6)$.

(b)
```
>>  N1=[2,-1,4]; N2=[4,-2,8]; V=pv(N1,N2)
V =      0      0      0
```
Os planos são paralelos.

(c)
```
>>  N1=[1,-1,0]; N2=[1,0,1]; V=pv(N1,N2)
V =     -1     -1      1
```
Os planos se interceptam segundo uma reta cujo vetor diretor é $V = (-1, -1, 1)$.

4.1.8. $(x, y, z) = (1, 2, 1) + t(1, -1, 2)$.

4.1.9.
```
>> pv([2,3,1],[1,-1,1])
          4              -1              -5
```
$(x, y, z) = (1, 0, 1) + t(4, -1, -5)$.

4.1.10.
```
>> escalona([1,1,-1,0;2,-1,3,1])
 1         0       2/3       1/3
 0         1      -5/3      -1/3
```
A reta interseção dos planos é $(x, y, z) = (1/3, -1/3, 0) + t(-2/3, 5/3, 1)$.

```
>> A=[1,0,-1]; P=[1/3,-1/3,0];
>> V=[-2/3,5/3,1]; X=[x,y,z];
>> AX=X-A, AP=P-A
AX = [x-1, y, z+1] AP = [-2/3, -1/3, 1]
>> M=[AX;AP;V], expr=dete(M)
M =[ x-1,    y, z+1]
   [-2/3, -1/3,   1]
   [-2/3,  5/3,   1]   expr = -2*x+2/3-4/3*z
```

A equação do plano é $6x + 4z - 2 = 0$.

4.1.11.

```
>> syms t s
>> A=[0,1,0];B=[1,1,0];C=[-3,1,-4];D=[-1,2,-7];
>> BA=B-A; CD=D-C; Pr=A+t*BA, Ps=C+s*CD
Pr = [t, 1, 0] Ps = [-3+2*s, 1+s,-4-3*s]
```

$P_r = (t, 1, 0)$ é um ponto qualquer da reta r e $P_s = (-3 + 2s, 1 + s, -4 - 3s)$ é um ponto qualquer da reta s.

```
>> PrPs=Ps-Pr, expr=pv(PrPs,[1,-5,-1])
PrPs = [-3+2*s-t, s, -4-3*s]
expr = [-16*s-20,-7-s-t,15-11*s+5*t]
>> S=solve(expr(1),expr(2),expr(3))
>> S.t, S.s
ans = -23/4, ans = -5/4
>> Pr0=subs(Pr,t,-23/4), Ps0=subs(Ps,s,-5/4),...
>> V=Ps0-Pr0
Pr0 = [-23/4, 1, 0]
Ps0 = [-11/2, -1/4, -1/4]
V = [1/4, -5/4, -1/4]
```

A equação da reta é $(x, y, z) = (-23/4, 1, 0) + t(1, -5, -1)$.

4.1.12.

(a)

```
>> N1=[2,-1,1]; N2=[1,2,-1]; V=pv(N1,N2)
     V = -1      3      5
```

Os planos se interceptam segundo uma reta que tem vetor diretor $V = (-1, 3, 5)$.

(b)

```
>> P0=[1/5,2/5,0]; Pr=P0+t*V
Pr = [1/5-t, 2/5+3*t, 5*t]
```

Um ponto qualquer da reta r é $P_r = (1/5 - t, 2/5 + 3t, 5t)$. Vamos determinar o valor de t tal que AP_r é perpendicular ao vetor diretor da reta r.

```
>> A=[1,0,1]; APr=Pr-A, expr=pe(APr,V)
APr = [-4/5-t, 2/5+3*t, 5*t-1]
expr = -3+35*t
>> solve(expr)
t = 3/35
>> APr0=subs(APr,t,3/35), expr=A+t*APr0
APr0 = [-31/35, 23/35, -4/7]
expr = [1-31/35*t, 23/35*t, 1-4/7*t]
```

A equação da reta é $(x, y, z) = (1 - (31/35)t, (23/35)t, 1 - (4/7)t)$.

4.2. Ângulos e Distâncias (página 181)

4.2.1.

```
>> V=[1,3,2];W=[2,-1,1];U=[1,-2,0];
>> N=pv(W,U), projecao=(pe(V,N)/pe(N,N))*N
N = 2     1    -3  projecao = -1/7   -1/14    3/14
```

4.2.2.

```
>> N1=[2,-1,1]; N2=[1,-2,1];
>> costh=pe(N1,N2)/(no(N1)*no(N2))
costh =  5/6
>> acos(5/6)*180/pi
ans = 33.5573
```

O ângulo é $\arccos(5/6) \approx 33,5^o$.

4.2.3.

```
>> A=[1,1,1];B=[1,0,1];C=[1,1,0];
>> P=[0,0,1];Q=[0,0,0];V=[1,1,0];
>> N1=pv(B-A,C-A), N2=pv(Q-P,V),...
>> costh=pe(N1,N2)/(no(N1)*no(N2))
N1 = 1     0     0,  N2 = 1    -1     0,
costh = 1/2*2^(1/2)
```

O ângulo é $\arccos(\sqrt{2}/2) = 45^o$.

4.2.4. O vetor diretor da reta procurada $V = (a, b, c)$ faz ângulo de 45^o com o vetor $\vec{i}$ e 60^o com o vetor $\vec{j}$. Podemos fixar arbitrariamente a norma do vetor V. Por exemplo, podemos tomar o vetor V com norma igual a 1.

```
>> syms a b c
>> P=[1,-2,3]; I=[1,0,0]; J=[0,1,0]; V=[a,b,c];
>> exp1=abs(pe(V,I))-cos(pi/4)
exp1 = abs(a)-1/2*2^(1/2)
>> exp2=abs(pe(V,J))-cos(pi/3)
exp2 = abs(b)-1/2
>> exp3=no(V)-1
exp3 = (a^2+b^2+c^2)^(1/2)-1
```

```
>> S=solve(exp1,exp2,exp3)
>> [S.a, S.b, S.c]
[  1/2*2^(1/2),          1/2,          1/2]
[  1/2*2^(1/2),          1/2,         -1/2]
[ -1/2*2^(1/2),          1/2,          1/2]
[ -1/2*2^(1/2),          1/2,         -1/2]
[  1/2*2^(1/2),         -1/2,          1/2]
[  1/2*2^(1/2),         -1/2,         -1/2]
[ -1/2*2^(1/2),         -1/2,          1/2]
[ -1/2*2^(1/2),         -1/2,         -1/2]
```

Existem oito retas que passam pelo ponto $P = (1, -2, 3)$ e fazem ângulo de 45^o com o eixo x e 60^o com o eixo y. Elas são $(x, y, z) = (1, -2, 3) + t(\pm\sqrt{2}/2, \pm 1/2, \pm 1/2)$.

4.2.5.

```
>> syms t, A=[1,1,0]; V=[0,1,-1]; Pr=[0,t,-t];
>> PrA=A-Pr, expr1=pe(PrA,V)
PrA = [1, 1-t, t] expr1 = 1-2*t
expr2 = 2*(1-t+t^2)^(1/2)
>> expr2=no(PrA)*no(V)
>> solve((expr1/expr2)^2-1/4)
[0][1]
>> B=subs(Pr,t,0), C=subs(Pr,t,1)
B = [0, 0, 0]   C = [0, 1, -1]
```

4.2.6.

```
>> A=[1,0,0]; B=[0,1,0]; C=[1,0,1]; O=[0,0,0];
>> N=B-A; dist=abs(pe(N,C-O))/no(N)
dist =1/2^(1/2)
```

4.2.7.

```
>> syms t s
>> A=[1,0,0]; B=[0,2,0]; V2=[1,2,3]; P2=[2,3,4];
>> Pr1=A+t*(B-A), Pr2=P2+s*V2
Pr1 = [1-t, 2*t, 0]   Pr2 = [2+s, 3+2*s, 4+3*s]
```

$P_{r_2} = (1 - t, 2t, 0)$ é um ponto qualquer da reta r_1 e $P_{r_2} = (2 + s, 3 + 2s, 4 + 3s)$ é um ponto qualquer da reta r_2. Devemos determinar t e s tais que o vetor $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}$ seja perpendicular aos vetores diretores de r_1 e de r_2.

```
>> Pr1Pr2=Pr2-Pr1
Pr1Pr2 = [1+s+t, 3+2*s-2*t, 4+3*s]
>> expr1=pe(Pr1Pr2,B-A), expr2=pe(Pr1Pr2,V2)
expr1 = 5+3*s-5*t   expr2 = 19+14*s-3*t
>> S=solve('5+3*s-5*t','19+14*s-3*t')
>> S.t, S.s
t = 13/61, s = -80/61
>> Pr10=subs(Pr1,t,13/61), Pr20=subs(Pr2,s,-80/61)
Pr10 = [48/61, 26/61, 0]  Pr20 = [42/61, 23/61, 4/61]
>> V=Pr20-Pr10, expr=Pr10+t*V
V = [-6/61, -3/61, 4/61]
expr = [48/61-6/61*t, 26/61-3/61*t, 4/61*t]
```

A equação da reta é $(x, y, z) = (48/61 - (6/61)t, 26/61 - (3/61)t, (4/61)t)$.

4.2.8.

```
>> A=[0,2,1]; Pr=[t,2-t,-2+2*t];
>> APr=Pr-A, dist=no(APr)
APr = [t, -t, -3+2*t]
dist = 3^(1/2)*(2*t^2+3-4*t)^(1/2)
>> solve(dist^2-3)
[1][1]
>> P=subs(Pr,t,1)
P = [1, 1, 0]
```

A distância de A até a reta r é igual a $\sqrt{3}$.

4.2.9.

```
>> syms t
>> A=[1,1,1]; B=[0,0,1]; Pr=[1+t,t,t];
>> APr=Pr-A, BPr=Pr-B
APr = [t, -1+t, -1+t] BPr = [1+t, t, -1+t]
>> dist1q=pe(APr,APr), dist2q=pe(BPr,BPr)
dist1q = 3*t^2+2-4*t  dist2q = 2+3*t^2
>> solve(dist1q-dist2q)
t=0
>> subs(Pr,t,0)
[1, 0, 0]
```

O ponto $P = (1, 0, 0)$ é equidistante de A e B.

4.2.10.

```
>> A=[1,-1,2]; B=[4,3,1]; X=[x,y,z];
>> AX=X-A, BX=X-B,
AX = [x-1, y+1, z-2] BX = [x-4, y-3, z-1]
>> dist1q=pe(AX,AX), dist2q=pe(BX,BX)
dist1q = x^2-2*x+6+y^2+2*y+z^2-4*z
dist2q = x^2-8*x+26+y^2-6*y+z^2-2*z
>> expr=dist1q-dist2q
expr = 6*x-20+8*y-2*z
```

A equação do lugar geométrico é $6x + 8y - 2z - 20 = 0$. Este plano passa pelo ponto médio de AB, pois o ponto médio de AB é $M = \overrightarrow{OM} = 1/2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ (Exercício 1.12 na página 112) satisfaz a equação do plano. O plano é perpendicular ao segmento AB, pois $N = (6, 8, -2)$ é paralelo a $\overrightarrow{AB} = (3, 4, -1)$.

4.2.11.

```
>> V1=[1,2,-3]; P1=[0,0,0];
>> V2=[2,4,-6]; P2=[0,1,2];
```

```
>> pv(V1,V2)
ans =    0      0      0
>> syms x y z; X=[x,y,z];
>> M=[X-P1;V1;P2-P1], expr=det(M)
M =[  x,   y,  z]
    [  1,   2, -3]
    [  0,   1,  2] expr = 7*x-2*y+z
```

Como o produto vetorial de V_1 e V_2 (os dois vetores diretores das retas) é igual ao vetor nulo, então as retas são paralelas. Neste caso, os vetores V_1 e $\overrightarrow{P_1P_2}$ são não colineares e paralelos ao plano procurado. Assim, $7x-2y+z=0$ é a equação do plano.

4.2.12.

```
>> syms x y z d
>> expr1=2*x+2*y+2*z+d;
>> P1=[0,0,-d/2]; N=[2,2,2]; P=[1,1,1];
>> expr2=abs(pe(P-P1,N))/no(N)
```

expr2 $= 1/6\ |6+d|\ \sqrt{3}$

```
>> solve(expr2-sqrt(3),d)
ans = [   0][ -12]
```

Os planos $2x+2y+2z=0$ e $2x+2y+2z-12=0$ satisfazem as condições do exercício.

4.2.13.

```
>> N2=[1,-2,2];N3=[3,-5,7];
>> V=pv(N2,N3)
V =    -4    -1     1
>> syms a b c, N=[a,b,c];
>> expr1=pe(N,V)
expr1 = -4*a-b+c
>> expr2=no(N)-1
expr2 = (a^2+b^2+c^2)^(1/2)-1
>> expr3=abs(pe(N,N1)/no(N1))-cos(pi/3)
expr3 = 1/2*2^(1/2)*abs(a+c)-1/2
>> S=solve(expr1,expr2,expr3,'a,b,c')
>> S.a,S.b,S.c
a =               b =                c =
[            0][    1/2*2^(1/2)][   1/2*2^(1/2)]
[  2/9*2^(1/2)][ -11/18*2^(1/2)][  5/18*2^(1/2)]
[            0][   -1/2*2^(1/2)][  -1/2*2^(1/2)]
[ -2/9*2^(1/2)][  11/18*2^(1/2)][ -5/18*2^(1/2)]
```

Os planos $y+z=0$ e $4x-11y+5z=0$ satisfazem as condições do exercício

5.1. Independência Linear (página 204)

5.1.1.
```
>> x1=[4,2,-3];x2=[2,1,-2];x3=[-2,-1,0];
>> x=[1,1,1];
>> A=[x1;x2;x3;x].'
     4     2    -2     1
     2     1    -1     1
    -3    -2     0     1
>> R=escalona(A)
     1     0    -2     0
     0     1     3     0
     0     0     0     1
>> x=[4,2,-6];
>> A=[x1;x2;x3;x].'
     4     2    -2     4
     2     1    -1     2
    -3    -2     0    -6
>> R=escalona(A)
     1     0    -2    -2
     0     1     3     6
     0     0     0     0
>> x=[-2,-1,1];
>> A=[x1;x2;x3;x].'
     4     2    -2    -2
     2     1    -1    -1
    -3    -2     0     1
>> R=escalona(A)
     1     0    -2    -1
     0     1     3     1
     0     0     0     0
>> x=[-1,2,3];
>> A=[x1;x2;x3;x].'
     4     2    -2    -1
     2     1    -1     2
    -3    -2     0     3
>> R=escalona(A)
     1     0    -2     0
     0     1     3     0
     0     0     0     1
```
Assim, os vetores das letras (b) e (c) são combinação linear de X_1, X_2 e X_3.

5.1.2. (a)
```
>> syms m,P1=[1,0,2];V1=[2,1,3];
>> P2=[0,1,-1];V2=[1,m,2*m];
>> expr=det([V1;V2;P2-P1])
expr = -9*m+6
>> solve(expr)
ans = 2/3
```
Para $m = 2/3$ as retas são coplanares.

(b) Para $m = 2/3$, $V_1 = (2, 1, 3)$ e $V_2 = (1, 2/3, 4/3)$ L.I., pois um não é múltiplo escalar do outro. Portanto, as retas são concorrentes.

(c)
```
>> syms x y z; P=[x,y,z];
>> V2=subs(V2,m,2/3)
V2 = [   1, 2/3, 4/3]
>> A=[P-P1;V1;V2]
A =[ x-1,    y, z-2]
   [   2,    1,   3]
   [   1, 2/3, 4/3]
>> det(A)
ans = -2/3*x+1/3*y+1/3*z
```
Assim, a equação do plano é $2x - y - z = 0$.

5.1.3. (a)
```
>> v1=[1,1,2];v2=[1,0,0];
>> v3=[4,6,12]
>> A=[v1;v2;v3;zeros(1,3)].'
     1     1     4     0
     1     0     6     0
     2     0    12     0
>> R=escalona(A)
     1     0     6     0
     0     1    -2     0
     0     0     0     0
```
Logo, a equação $x(1, 1, 2)+y(1, 0, 0)+z(4, 6, 12) = \bar{0}$ admite solução não trivial. Isto implica que os vetores do item (a) são L.D.

(b)
```
>> v1=[1,-2,3];v2=[-2,4,-6];
>> A=[v1;v2;zeros(1,3)].'
     1    -2     0
    -2     4     0
     3    -6     0
>> R=escalona(A)
     1    -2     0
     0     0     0
     0     0     0
```
Logo, a equação $x(1, -2, 3) + y(-2, 4, -6) = \bar{0}$ admite solução não trivial. Isto implica que os vetores da item (b) são L.D. Observe que o segundo vetor é -2 vezes o primeiro.

(c)
```
>> v1=[1,1,1];v2=[2,3,1];
>> v3=[3,1,2];
>> A=[v1;v2;v3;zeros(1,3)].'
```

```
        1      2      3      0
        1      3      1      0
        1      1      2      0
>> R=escalona(A)
        1      0      0      0
        0      1      0      0
        0      0      1      0
```

Logo, a equação $x(1,1,1)+y(2,3,1)+z(3,1,2) = \bar{0}$ só admite a solução trivial. Isto implica que os vetores do item (c) são L.I.

(d)
```
>> v1=[4,2,-1];v2=[6,5,-5];v3=[2,-1,3];
>> A=[v1;v2;v3;zeros(1,3)].'
        4      6      0
        2      5      0
       -1     -5      0
>> R=escalona(A)
        1      0      2
        0      1     -1
        0      0      0
```

Logo, o sistema $x(4,2,-1) + y(2,3,1) + z(2,-1,3) = \bar{0}$ admite solução não trivial. Isto implica que os vetores da item (d) são L.D.

5.1.4.
```
>> syms a
>> A=[3,1,0;a^2+2,2,0;0,0,0]
A =
[3, a^2+2, 0]
[1,     2, 0]
[0,     0, 0]
>> escalona(A)
eliminação 1:
linha 2 <==> linha 1
  [ 1      2     0 ]
  [                ]
  [      2         ]
  [ 3   a   + 2  0 ]
  [                ]
  [ 0      0     0 ]
Continua ? (s/n) s
-(3)*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
  [ 1      2     0 ]
  [                ]
  [      2         ]
  [ 0   a   - 4  0 ]
  [                ]
  [ 0      0     0 ]
Continua ? (s/n) n
>> solve(a^2-4)
ans = [ 2][-2]
```

5.2. Subespaços (página 217)

5.2.1. São subespaços (b), (e), e (f).

5.2.2. São subespaços (b), (c), e (d).

5.2.3. (a)
```
>> syms a b c
>> A=[1,0,0;0,1,0;1,1,1;1,1,1;a,b,c].'
[1, 0, 1, a]
[0, 1, 1, b]
[0, 0, 1, c]
>> escalona(A);
  [ 1  0  0  a - c   ]
  [ 0  1  0  b - c   ]
  [ 0  0  1    c     ]
```

Portanto, os vetores do item (a) geram o $\mathbb{R}^3$.

(b)
```
>> A=[1,2,1;1,1,-1;2,3,0;a,b,c].'
[1,  1, 2, a]
[2,  1, 3, b]
[1, -1, 0, c]
>> escalona(A);
[1,  0,  1,        -a+b]
[0,  1,  1,      -b+2*a]
[0,  0,  0, c+3*a-2*b]
Continua ? (s/n) n
```

Portanto, os vetores do item (b) **não** geram o $\mathbb{R}^3$.

(c)
```
>> A=[6,4,-2;2,0,0;3,2,-1;5,6,-3;a,b,c].'
[ 6, 2,  3,  5, a]
[ 4, 0,  2,  6, b]
[-2, 0, -1, -3, c]
>> escalona(A);
[1  0  1/2  3/2        1/4 b       ]
[0  1   0   -2   - 3/4 b + 1/2 a   ]
[0  0   0    0       c + 1/2 b     ]
Continua ? (s/n) n
```

Portanto, os vetores do item (c) **não** geram o $\mathbb{R}^3$.

(d)
```
>> A=[1,1,0;1,2,-1;0,0,1;a,b,c].'
A =
[1,  1, 0, a]
[1,  2, 0, b]
[0, -1, 1, c]
>> escalona(A);
```

```
[1  0  0  0     2 a - b ]
[0  1  0  0      b - a  ]
[0  0  1  0    c + b - a]
```

Portanto, os vetores do item (d) geram o $\mathbb{R}^3$.

5.2.4. (a)
```
>> A=[1,0,1,0,0;1,2,3,1,0;2,1,3,1,0]
     1     0     1     0     0
     1     2     3     1     0
     2     1     3     1     0
>> R=escalona(A)
     1     0     1     0     0
     0     1     1     0     0
     0     0     0     1     0
```

Encontramos a forma reduzida escalonada da matriz $[A \mid \bar{0}]$, que corresponde ao sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & & + & x_3 & & = & 0 \\ & x_2 & + & x_3 & & = & 0 \\ & & & & x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Este sistema tem como solução geral

$$\mathbb{W} = \{(-\alpha, -\alpha, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}\,.$$

Agora, para qualquer elemento de $\mathbb{W}$ temos:

$$(-\alpha, -\alpha, \alpha, 0) = \alpha(-1, -1, 1, 0)\,.$$

Logo, $\{V = (-1, -1, 1, 0)\}$ gera $\mathbb{W}$.

(b)
```
>> A=[1,1,2,-1,0;2,3,6,-2,0;-2,1,2,2,0]
     1     1     2    -1     0
     2     3     6    -2     0
    -2     1     2     2     0
>> R=escalona(A)
     1     0     0    -1     0
     0     1     2     0     0
     0     0     0     0     0
```

Encontramos a forma reduzida escalonada da matriz $[A \mid \bar{0}]$, que corresponde ao sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & & + & & - & x_4 & = & 0 \\ & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 0 \end{array}\right.$$

Este sistema tem como solução geral

$$\mathbb{W} = \{(\alpha, -2\beta, \beta, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}\,.$$

Agora, para qualquer elemento de $\mathbb{W}$ temos:

$$\begin{aligned} (\alpha, -2\beta, \beta, \alpha) &= \\ &= (\alpha, 0, 0, \alpha) + (0, -2\beta, \beta, 0) \\ &= \alpha(1, 0, 0, 1) + \beta(0, -2, 1, 0)\,. \end{aligned}$$

Logo, $S = \{V_1 = (1, 0, 0, 1), V_2 = (0, -2, 1, 0)\}$ gera $\mathbb{W}$.

5.2.5. O subespaço $\mathbb{V}$ é um plano que passa pela origem, paralelo aos vetores $(-1, 2, 3)$ e $(1, 3, 4)$. O subespaço $\mathbb{W}$ é um plano que passa pela origem, paralelo aos vetores $(1, 2, -1)$ e $(0, 1, 1)$.

```
>> V1=[-1,2,3]; V2=[1,3,4];
>> N1=pv(V1,V2)
N1 =     -1      7     -5
>> V3=[1,2,-1]; V4=[0,1,1];
>> N2=pv(V3,V4)
N2 =      3     -1      1
>> V=pv(N1,N2)
V =       2    -14    -20
```

A equação paramétrica da reta interseção dos dois subespaços é $(x, y, z) = t(2, -14, -20)$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$.

5.3. Base e Dimensão (página 228)

5.3.1. Como a dimensão do $\mathbb{R}^3$ é 3, 3 vetores que são L.I. geram o espaço e formam portanto uma base (Teorema 5.8 na página 227). Para verificar se os vetores são L.I., precisamos saber se a equação vetorial,

$$x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3 = \bar{0}$$

só possui a solução trivial. Esta equação é equivalente ao sistema linear, cuja matriz é formada pelos vetores V_1, V_2, V_3 escritos como colunas. Este é um sistema que tem o número de equações igual ao número de incógnitas e assim, o sistema possui somente a solução trivial se, e somente se, o determinante da matriz do sistema é diferente de zero (Proposição 5.3 na página 197).

```
>> v1=[1,0,0];v2=[0,1,0];v3=[1,1,1];
>> A=[v1;v2;v3].'; det(A)
ans =   1
>> v1=[0,0,1];v2=[-1,1,1];v3=[1,1,0];
>> A=[v1;v2;v3].'; det(A)
ans =  -2
```

Assim, são base os conjuntos dos itens (a) e (c). O conjunto do item (b) não é base pois como a dimensão do $\mathbb{R}^3$ é igual a 3 toda base do $\mathbb{R}^3$ tem que ter 3 elementos.

5.3.2. (a) $(a, a, c) = (a, a, 0)+(0, 0, c) = a(1, 1, 0)+c(0, 0, 1)$. Logo, $S = \{V_1 = (1, 1, 0), V_2 = (0, 0, 1)\}$ gera o subespaço. Além disso, S é L.I., pois um vetor não é múltiplo escalar do outro. Portanto, S é uma base do subespaço e ele tem dimensão igual a 2.

(b) $(0, b, c) = (0, b, 0) + (0, 0, c) = b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$ Logo, $S = \{V_1 = (0, 1, 0), V_2 = (0, 0, 1)\}$ gera o subespaço. Além disso, S é L.I., pois um vetor não é múltiplo escalar do outro. Portanto, S é uma base do subespaço e ele tem dimensão igual a 2.

(c)

$$\begin{aligned}(a - b, b + c, 2a - b + c) &= \\ (a, 0, 2a) + (-b, b, -b) + (0, c, c) &= \\ a(1, 0, 2) + b(-1, 1, -1) + c(0, 1, 1)&\end{aligned}$$

Logo, $S = \{V_1 = (1, 0, 2), V_2 = (-1, 1, -1), V_3 = (0, 1, 1)\}$ gera o subespaço.
Agora, para verificar se S é L.I., precisamos saber se a equação

$$x(1, 0, 2) + y(-1, 1, -1) + z(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

possui somente a solução trivial.

```
>> v1=[1,0,2];v2=[-1,1,-1];v3=[0,1,1];
>> A=[v1;v2;v3;zeros(1,3)].';
>> R=escalona(A)
        1       0       1       0
        0       1       1       0
        0       0       0       0
```

A solução geral da equação acima é:

$$z = \alpha, \quad y = -\alpha, \quad x = -\alpha\ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Substituindo estes valores na equação vetorial acima:

$$-\alpha(1, 0, 2) - \alpha(-1, 1, -1) + \alpha(0, 1, 1) = (0, 0, 0).$$

fazendo $\alpha = 1$ e somando-se $(1, 0, 2) + (-1, 1, -1)$:

$$(0, 1, 1) = (1, 0, 2) + (-1, 1, -1)$$

Assim, $S = \{V_1 = (1, 0, 2), V_2 = (-1, 1, -1)\}$ é uma base para o subespaço (eles são L.I., pois um não é múltiplo escalar do outro).

5.3.3. (a)

$$\begin{aligned}(a, b, c, a + b) &= \\ (a, 0, 0, a) + (0, b, 0, b) + (0, 0, c, 0) &= \\ a(1, 0, 0, 1) + b(0, 1, 0, 1) + c(0, 0, 1, 0)&\end{aligned}$$

Logo, $S = \{V_1 = (1, 0, 0, 1), V_2 = (0, 1, 0, 1), V_3 = (0, 0, 1, 0)\}$ gera o subespaço.
Agora, para verificar se S é L.I., precisamos saber se a equação

$$x(1, 0, 0, 1)+y(0, 1, 0, 1)+z(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

possui somente a solução trivial.

```
>> v1=[1,0,0,1];v2=[0,1,0,1];v3=[0,0,1,0];
>> A=[v1;v2;v3;zeros(1,4)].';
>> R=escalona(A)
        1       0       0       0
        0       1       0       0
        0       0       1       0
        0       0       0       0
```

Assim, $S = \{V_1 = (1, 0, 0, 1), V_2 = (0, 1, 0, 1), V_3 = (0, 0, 1, 0)\}$ é uma base para o subespaço e a dimensão é 3.

(b)
$$\begin{aligned}(a,b,a-b,a+b) &= (a,0,a,a)+(0,b,-b,b)\\ &= a(1,0,1,1)+b(0,1,-1,1)\end{aligned}$$

Logo, $S = \{V_1 = (1,0,1,1), V_2 = (0,1,-1,1)\}$ gera o subespaço. Como um vetor não é múltiplo escalar do outro, eles são L.I.
Portanto, S é uma base do subespaço e a dimensão do subespaço é 2.

(c)
$$\begin{aligned}(a+c,a-b,b+c,-a+b) &=\\ (a,a,0,-a)+(0,-b,b,b)+(c,0,c,0) &=\\ a(1,1,0,-1)+b(0,-1,1,1)+c(1,0,1,0)\end{aligned}$$

Logo, $S = \{V_1 = (1,1,0,-1), V_2 = (0,-1,1,1), V_3 = (1,0,1,0)\}$ gera o subespaço.
Agora, para verificar se são L.I., precisamos saber se a equação

$$x(1,1,0,-1)+y(0,-1,1,1)+z(1,0,1,0) = (0,0,0,0)$$

possui somente a solução trivial.

```
>> v1=[1,1,0,-1];v2=[0,-1,1,1];v3=[1,0,1,0];
>> A=[v1;v2;v3;zeros(1,4)].';
>> R=escalona(A)
        1       0       1       0
        0       1       1       0
        0       0       0       0
        0       0       0       0
```

A solução geral da equação acima é:

$$z=\alpha, \quad y=-\alpha, \quad x=-\alpha\ \forall \alpha\in\mathbb{R}$$

Substituindo estes valores na equação vetorial acima:

$$-\alpha(1,1,0,-1)-\alpha(0,-1,1,1)+\alpha(1,0,1,0) = (0,0,0,0)$$

fazendo $\alpha = 1$ e somando-se $(1,1,0,-1)+(0,-1,1,1)$:

$$(1,0,1,0) = (1,1,0,-1)+(0,-1,1,1)$$

Assim, $\{V_1 = (1,1,0,-1), V_2 = (0,-1,1,1)\}$ é uma base para o subespaço. E a dimensão do subespaço é 2.

5.3.4. Como a dimensão do $\mathbb{R}^3$ é 3, 3 vetores que são L.I. geram o espaço e formam portanto uma base. Para verificar se os vetores são L.I., precisamos saber se a equação vetorial,

$$x_1V_1+x_2V_2+x_3V_3 = \bar{0}$$

só possui a solução trivial. Esta equação é equivalente ao sistema linear, cuja matriz é formada pelos vetores V_1, V_2, V_3 escritos como colunas. Este é um sistema tem o número de equações igual ao número de incógnitas e assim, o sistema possui somente a solução trivial se, e somente se, o determinante da matriz do sistema é diferente de zero.

```
>> syms a
>> A=[a^2,0,1;0,a,2;1,0,1]
[a^2, 0, 1]
[  0, a, 0]
[  1, 2, 1]
>> expr=det(A)
expr = a^3-a
>> solve(expr)
ans = [ 0][ 1][-1]
```

Portanto, para $a \neq 0,1,-1$ os vetores V_1, V_2 e V_3 formam uma base.

5.3.5. (a)
```
>> syms x
>> A=[0,0,1;1,0,-3;0,1,3];
>> B=A-x*eye(3)
[-x,  0,   1]
[ 1, -x,  -3]
[ 0,  1, 3-x]
>> solve(det(B))
ans = [1][1][1]
>> B1=subs(B,x,1)
    -1     0     1
     1    -1    -3
     0     1     2
>> escalona([B1,zeros(3,1)])
     1     0    -1     0
     0     1     2     0
     0     0     0     0
```

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x_1 & & -\ x_3 & = & 0\\ & x_2 & +\ 2x_3 & = & 0\end{array}\right.$$

Este sistema tem como solução geral

$$\mathbb{W} = \{(\alpha, -2\alpha, \alpha) \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}\,.$$

Agora, para qualquer elemento de $\mathbb{W}$ temos:

$$(\alpha, -2\alpha, \alpha) = \alpha(1, -2, 1)\,.$$

Logo, $S = \{V = (1, -2, 1)\}$ gera $\mathbb{W}$. Como um conjunto formado por um único vetor não nulo é sempre L.I., então S é base para $\mathbb{W}$.

(b)
```
>> A=[2,2,3,4;0,2,3,2;0,0,1,1;0,0,0,1]
>> B=A-x*eye(4)
[2-x,   2,   3,   4]
[  0, 2-x,   3,   2]
[  0,   0, 1-x,   1]
[  0,   0,   0, 1-x]
>> solve(det(B))
ans = [2][2][1][1]
>> B1=subs(B,x,1)
     1     2     3     4
     0     1     3     2
     0     0     0     1
     0     0     0     0
>> escalona([B1,zeros(4,1)])
     1     0    -3     0     0
     0     1     3     0     0
     0     0     0     1     0
     0     0     0     0     0
```

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & & - & 3x_3 & & = & 0 \\ & x_2 & + & 3x_3 & & = & 0 \\ & & & & x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Este sistema tem como solução geral

$$\mathbb{W} = \{(3\alpha, -3\alpha, \alpha, 0) \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}\,.$$

Agora, para qualquer elemento de $\mathbb{W}$ temos:

$$(3\alpha, -3\alpha, \alpha, 0) = \alpha(3, -3, 1, 0)\,.$$

Logo, $S = \{V = (3, -3, 1, 0)\}$ gera $\mathbb{W}$. Como um conjunto formado por um único vetor não nulo é sempre L.I., então S é base para $\mathbb{W}$.

```
>> B2=subs(B,x,2)
     0     2     3     4
     0     0     3     2
     0     0    -1     1
     0     0     0    -1
>> escalona([B2,zeros(4,1)])
     0     1     0     0     0
     0     0     1     0     0
     0     0     0     1     0
     0     0     0     0     0
```

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_2 & & & = & 0 \\ & x_3 & & = & 0 \\ & & x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Este sistema tem como solução geral

$$\mathbb{W} = \{(\alpha, 0, 0, 0) \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}\,.$$

Agora, para qualquer elemento de $\mathbb{W}$ temos:

$$(\alpha, 0, 0, 0) = \alpha(1, 0, 0, 0)\,.$$

Logo, $S = \{V = (1, 0, 0, 0)\}$ gera $\mathbb{W}$. Como um conjunto formado por um único vetor não nulo é sempre L.I., então S é base para $\mathbb{W}$.

(c)
```
>> A=[1,1,-2;-1,2,1;0,1,-1]
>> B=A-x*eye(3)
[1-x,   1,   -2]
[ -1, 2-x,    1]
[  0,   1, -1-x]
>> solve(det(B))
ans = [ 1][ 2][-1]
>> Bm1=subs(B,x,-1)
     2     1    -2
    -1     3     1
     0     1     0
>> escalona([Bm1,zeros(3,1)])
     1     0    -1     0
     0     1     0     0
     0     0     0     0
```

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x_1 & & - & 3x_3 & = & 0 \\ & x_2 & & & = & 0 \end{array}\right.$$

Este sistema tem como solução geral

$$\mathbb{W} = \{(\alpha, 0, \alpha) \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}\,.$$

Agora, para qualquer elemento de $\mathbb{W}$ temos:

$$(\alpha, 0, \alpha) = \alpha(1, 0, 1)\,.$$

Logo, $S = \{V = (1, 0, 1)\}$ gera $\mathbb{W}$. Como um conjunto formado por um único vetor não nulo é sempre L.I., então S é base para $\mathbb{W}$.

```
>> B1=subs(B,x,1)
     0      1     -2
    -1      1      1
     0      1     -2
>> escalona([B1,zeros(3,1)])
     1      0     -3    0
     0      1     -2    0
     0      0      0    0
```

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x_1 & & -3x_3 & = & 0 \\ & x_2 & -2x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Este sistema tem como solução geral

$$\mathbb{W} = \{(3\alpha, 2\alpha, \alpha) \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}\,.$$

Agora, para qualquer elemento de $\mathbb{W}$ temos:

$$(3\alpha, 2\alpha, \alpha) = \alpha(3, 2, 1)\,.$$

Logo, $S = \{V = (3, 2, 1)\}$ gera $\mathbb{W}$. Como um conjunto formado por um único vetor não nulo é sempre L.I., então S é base para $\mathbb{W}$.

```
>> B2=subs(B,x,2)
    -1      1     -2
    -1      0      1
     0      1     -3
>> escalona([B2,zeros(3,1)])
     1      0     -1    0
     0      1     -3    0
     0      0      0    0
```

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x_1 & & -x_3 & = & 0 \\ & x_2 & -3x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Este sistema tem como solução geral

$$\mathbb{W} = \{(\alpha, 3\alpha, \alpha) \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}\,.$$

Agora, para qualquer elemento de $\mathbb{W}$ temos:

$$(\alpha, 3\alpha, \alpha) = \alpha(1, 3, 1)\,.$$

Logo, $S = \{V = (1, 3, 1)\}$ gera $\mathbb{W}$. Como um conjunto formado por um único vetor não nulo é sempre L.I., então S é base para $\mathbb{W}$.

(d)
```
>> A=[1,2,3,4;0,-1,3,2;0,0,3,3;0,0,0,2];
>> B=A-x*eye(4)
[1-x,     2,    3,    4]
[  0,  -1-x,    3,    2]
[  0,     0,  3-x,    3]
[  0,     0,    0,  2-x]
>> solve(det(B))
ans = [ 1][-1][ 3][ 2]
>> Bm1=subs(B,x,-1)
     2      2      3      4
     0      0      3      2
     0      0      4      3
     0      0      0      3
>> escalona([Bm1,zeros(4,1)])
     1      1      0      0      0
     0      0      1      0      0
     0      0      0      1      0
     0      0      0      0      0
```

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & & & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Este sistema tem como solução geral

$$\mathbb{W} = \{(-\alpha, \alpha, 0, 0) \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}\,.$$

Agora, para qualquer elemento de $\mathbb{W}$ temos:

$$(-\alpha, \alpha, 0, 0) = \alpha(-1, 1, 0, 0)\,.$$

Logo, $S = \{V = (-1, 1, 0, 0)\}$ gera $\mathbb{W}$. Como um conjunto formado por um único vetor não nulo é sempre L.I., então S é base para $\mathbb{W}$.

```
>> B1=subs(B,x,1)
     0     2     3     4
     0    -2     3     2
     0     0     2     3
     0     0     0     1
>> escalona([B1,zeros(4,1)])
     0     1     0     0     0
     0     0     1     0     0
     0     0     0     1     0
     0     0     0     0     0
```

$$\begin{cases} x_2 & & & = & 0 \\ & x_3 & & = & 0 \\ & & x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Este sistema tem como solução geral

$$\mathbb{W} = \{(\alpha, 0, 0, 0) \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}\,.$$

Agora, para qualquer elemento de $\mathbb{W}$ temos:

$$(\alpha, 0, 0, 0) = \alpha(1, 0, 0, 0)\,.$$

Logo, $S = \{V = (1, 0, 0, 0)\}$ gera $\mathbb{W}$. Como um conjunto formado por um único vetor não nulo é sempre L.I., então S é base para $\mathbb{W}$.

```
>> B2=subs(B,x,2)
    -1     2     3     4
     0    -3     3     2
     0     0     1     3
     0     0     0     0
>> escalona([B2,zeros(4,1)])
    1      0     0    29/3    0
    0      1     0     7/3    0
    0      0     1      3     0
    0      0     0      0     0
```

$$\begin{cases} x_1 & & & + & (29/7)x_4 & = & 0 \\ & x_2 & & + & (7/3)x_4 & = & 0 \\ & & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Este sistema tem como solução geral

$$\mathbb{W} = \{(-(29/3)\alpha, -(7/3)\alpha, -3\alpha, \alpha) \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}\,.$$

Agora, para qualquer elemento de $\mathbb{W}$ temos:

$$\begin{aligned} (-(29/3)\alpha, -(7/3)\alpha, -3\alpha, \alpha) &= \\ \alpha(-29/3, -7/3, -3, 1)\,. \end{aligned}$$

Logo, $S = \{V = (-29/3, -7/3, -3, 1)\}$ gera $\mathbb{W}$. Como um conjunto formado por um único vetor não nulo é sempre L.I., então S é base para $\mathbb{W}$.

```
>> B3=subs(B,x,3)
   -2      2       3      4
    0     -4       3      2
    0      0       0      3
    0      0       0     -1
>> escalona([B3,zeros(4,1)])
    1     0     -9/4     0    0
    0     1     -3/4     0    0
    0     0       0      1    0
    0     0       0      0    0
```

$$\begin{cases} x_1 & & - & (9/4)x_3 & & = & 0 \\ & x_2 & - & (3/4)x_3 & & = & 0 \\ & & & & x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Este sistema tem como solução geral

$$\mathbb{W} = \{((9/4)\alpha, (3/4)\alpha, \alpha, 0) \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}\,.$$

Agora, para qualquer elemento de $\mathbb{W}$ temos:

$$((9/4)\alpha, (3/4)\alpha, \alpha, 0) = \alpha(9/4, 3/4, 1, 0)\,.$$

Logo, $S = \{V = (9/4, 3/4, 1, 0)\}$ gera $\mathbb{W}$. Como um conjunto formado por um único vetor não nulo é sempre L.I., então S é base para $\mathbb{W}$.

5.3.6. (a)

```
>> v1=[2,1,3];v2=[3,-1,4];v3=[2,6,4];
>> A=[v1;v2;v3;zeros(1,3)].';
>> escalona(A)
[  1,  0,  4,  0]
[  0,  1, -2,  0]
[  0,  0,  0,  0]
```

A equação $xV_1 + yV_2 + zV_3 = \bar{0}$ admite solução não trivial.

(b) V_1 e V_2 são L.I. pois um vetor não é múltiplo escalar do outro.

(c) A dimensão do subespaço gerado por V_1, V_2 e V_3, é 2, pois, pelos itens anteriores, V_1 e V_2 formam uma base para ele.

(d) Este subespaço é um plano que passa pela origem com vetor normal $N = V_1 \times V_2 = (7, 1, -5)$, ou seja, é o plano $7x + y - 5z = 0$.

5.3.7. (a) Não. O $\mathbb{R}^3$ é um subespaço de dimensão 3.

(b) V_3 deve ser um vetor que não seja combinação linear de V_1 e V_2.

(c)
```
>> v1=[1,1,1];v2=[3,-1,4];
>> syms a b c
>> A=[v1;v2;[a,b,c]].';
>> escalona(A)
[         1,         0,    4*a-3*c]
[         0,         1,        c-a]
[         0,         0, b-5*a+4*c]
```
Seja $V_3 = (a, b, c)$ tal que $b - 5a + 4c \neq 0$. Por exemplo, $V_3 = (0, 0, 1)$, é tal que V_1, V_2 e V_3 formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

5.3.8. Fazendo $z = \alpha$ e $y = \beta$, obtemos que $x = -2\beta - 4\alpha$. Assim, os pontos do plano $x + 2y + 4z = 0$ são da forma $(x, y, z) = (-2\beta - 4\alpha, \beta, \alpha)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ou seja, são da forma $(x, y, z) = \alpha(-4, 0, 1) + \beta(-2, 1, 0) = \alpha V_1 + \beta V_2$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, onde $V_1 = (-4, 0, 1)$ e $V_2 = (-2, 1, 0)$. Assim, V_1 e V_2 formam uma base do plano $\mathbb{W}$, pois são L.I. (um não é múltiplo escalar do outro) e geram $\mathbb{W}$ (todo vetor de $\mathbb{W}$ é combinação linear deles). Para estender V_1 e V_2 a uma base de $\mathbb{R}^3$, precisamos acrescentar um vetor que não seja combinação linear de V_1 e V_2. Uma maneira de se conseguir isso é tomar um vetor que não pertença ao plano, ou seja, um vetor (x, y, z) tal que $x + 2y + 4z \neq 0$. Por exemplo $V_3 = (1, 0, 0)$. Uma outra maneira de se conseguir isso é a seguinte. Um dos vetores da base canônica não é combinação linear de V_1 e V_2. Para se descobrir qual, podemos escalonar a matriz cujas colunas são os vetores V_1, V_2, E_1, E_2, E_3, ou seja,

```
>> V1=[-4;0;1];V2=[-2;1;0];
>> A=[V1,V2,eye(3)];
>> escalona(A)
[ -4, -2,  1,  0,  0]
[  0,  1,  0,  1,  0]
[  1,  0,  0,  0,  1]

[ 1, 0, 0, 0, 1]
[ 0, 1, 0, 1, 0]
[ 0, 0, 1, 2, 4]
```

Assim, nenhum dos vetores da base canônica é combinação linear (somente) de V_1 e V_2. Portanto, se o vetor V_3 é qualquer um dos vetores da base canônica, então $\{V_1, V_2, V_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

5.3.9. (a)
```
>> V1=[1;2;3]; V2=[3;4;5]; V3=[5;6;7];
>> V=randi(3,1)
V =    0
       4
       3
>> escalona([V1,V2,V3,V])
ans = 1      0      -1      0
      0      1       2      0
      0      0       0      1
```
Assim, `V` **não** é combinação linear de `V1, V2` e `V3`.

(b)
```
>> M=randi(3,5)
M =  -2     -4      1     -5      5
      3     -3     -3      3      0
     -5     -3     -3     -1     -1
>> escalona([V1,V2,V3,M])
1   0  -1   0   37/13  -101/26  173/26   -96/13
0   1   2   0  -29/13    37/26  -85/26    51/13
0   0   0   1    1/13    -4/13   12/13    -4/13
```
Assim, nenhuma das colunas de `M` é combinação linear de `V1, V2` e `V3`. Como as colunas de `M` foram geradas aleatoriamente, o mais provável é que elas não pertençam ao plano gerado por `V1, V2` e `V3`.

(c) `V3=-V1+2V2`, que é a mesma relação que é válida entre as colunas de forma escalonada reduzida da matriz `[V1,V2,V3,M]`.

5.3.10.
```
>> A=randi(3,2)*randi(2,5,2)
A =  -2    4   -2   -8    -8
     -4    0   -4   -8     0
      5   -3    5   13     6
>> escalona(A)
ans = 1    0    1    2     0
      0    1    0   -1    -2
```

```
     0     0     0     0     0
```

$A_3 = 1A_1 + 0A_2$, $A_4 = 2A_1 - A_2$, $A_5 = 0A_1 - 2A_2$. Observe que as relações que são válidas entre as colunas de `A` são válidas entre as colunas da forma escalonada reduzida de `A`.

5.3.11.
```
>> A=randi(4,3)*randi(3,5,2);
>> R=escalona(A)
[  6, -2,  1,  8,  2]
[ 12,  6, -1,  8,  9]
[ 20, 12,  1, 15, 16]
[  0,  8,  5,  1,  4]
R =[ 1,    0,    0,    1,  1/2]
[    0,    1,    0, -1/2,  1/2]
[    0,    0,    1,    1,    0]
[    0,    0,    0,    0,    0]
```

O conjunto solução de $AX = \bar{0}$ é o mesmo de $RX = \bar{0}$. Assim, a mesma relação que é válida entre as colunas de R é válida entre as colunas de A. Portanto, as colunas de `A` que correspondem aos pivôs de `R` formam uma base para o subespaço gerado pelas colunas de `A`, pois as outras colunas são combinação linear destas.

5.3.12.
```
>> A=randi(4,2)
A =   2     1
      2    -4
      3    -1
      0     2
>> B=[A,eye(4)];
>> R=escalona(B)
[  2,  1,  1,  0,  0,  0]
[  2, -4,  0,  1,  0,  0]
[  3, -1,  0,  0,  1,  0]
[  0,  2,  0,  0,  0,  1]
R =[ 1,    0,    0,    0,  1/3,  1/6]
[    0,    1,    0,    0,    0,  1/2]
[    0,    0,    1,    0, -2/3, -5/6]
[    0,    0,    0,    1, -2/3,  5/3]
```

As colunas de `B` que correspondem aos pivôs de `R` formam uma base para o subespaço gerado pelas colunas de `B`, pois as outras colunas são combinação linear destas.

5.3.13. (a)
```
>> A=randi(4,3)*randi(3,5,2)
A =  5    -4     1    -5    -3
    -9     5    -4    -3     1
     5    -5     0    -7    -5
     6    -3     3    11     0
>> escalona([A(:,1)+A(:,2),A])
[  1,  5, -4,  1, -5, -3]
[ -4, -9,  5, -4, -3,  1]
[  0,  5, -5,  0, -7, -5]
[  3,  6, -3,  3, 11,  0]
ans =
[  1,  0,  1,  1,  0,  2]
[  0,  1, -1,  0,  0, -1]
[  0,  0,  0,  0,  1,  0]
[  0,  0,  0,  0,  0,  0]
```

A base do subespaço é formada por $V_1 = A_1 + A_2$, $V_2 = A_2 = (5, -9, 5, 6)$, $V_3 = A_4 = (-5, -3, -7, 11)$.

(b)
```
>> B=A*randi(5,2)
B =-61    -17
    42    -35
   -78    -33
    11     62
>> escalona([B,A])
[ -61, -17,   5,  -4,   1,  -5,  -3]
[  42, -35,  -9,   5,  -4,  -3,   1]
[ -78, -33,   5,  -5,   0,  -7,  -5]
[  11,  62,   6,  -3,   3,  11,   0]
ans =
[1,     0,     0,     1,     1,    -2,     2]
[0,     1,     0,    -1,    -1,   9/4,    -2]
[0,     0,     1,     8,     9, -71/4,    17]
[0,     0,     0,     0,     0,     0,     0]
```

A base do subespaço é formada por $V_1 = (-61, 42, -78, 11), V_2 = (-17, -35, -33, 62), V_3 = A_1 = (5, -9, 5, 6)$.

5.4. Produto Escalar em R-n(página 241)

5.4.1.
```
>> syms a
>> x=[1,1,-2];y=[a,-1,2];
>> solve(pe(x,y))
ans = 5
```

5.4.2.
```
>> syms a b
>> x=[1/2^(1/2),0,1/2^(1/2)];y=[a,1/2^(1/2),-b];
>> sol=solve(pe(x,y),no(y)-1)
sol =
     a: [2x1 sym]
     b: [2x1 sym]
>> sol.a, sol.b
ans = [  1/2] [ -1/2] ans = [  1/2] [ -1/2]
```

5.4.3.
```
>> v1=[1,1,-1,0];v2=[0,2,0,1];v3=[-1,0,0,1];
>> w1=v1; w2=v2-proj(w1,v2)
w2 = [-2/3, 4/3, 2/3, 1]
>> w3=v3-proj(w1,v3)-proj(w2,v3)
w3 = [-4/11, -3/11, -7/11, 6/11]
>> u1=w1/no(w1),u2=w2/no(w2),u3=w3/no(w3)
```

$$u_1 = \left[\begin{array}{cccc} \frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{3} & 0 \end{array}\right]$$

$$u2 = \left[\begin{array}{cccc} -\frac{2}{33}\sqrt{11}\sqrt{3} & \frac{4}{33}\sqrt{11}\sqrt{3} & \frac{2}{33}\sqrt{11}\sqrt{3} & \frac{1}{11}\sqrt{11}\sqrt{3} \end{array}\right]$$

$$u3 = \left[\begin{array}{cccc} -\frac{2}{55}\sqrt{110} & -\frac{3}{110}\sqrt{110} & -\frac{7}{110}\sqrt{110} & \frac{3}{55}\sqrt{110} \end{array}\right]$$

5.4.4.
```
>> v1=[1,1,1];v2=[0,1,1];v3=[1,2,3];
>> w1=v1; w2=v2-proj(w1,v2)
w2 =  [-2/3, 1/3, 1/3]
>> w3=v3-proj(w1,v3)-proj(w2,v3)
w3 = [0, -1/2, 1/2]
>> u1=w1/no(w1),u2=w2/no(w2),u3=w3/no(w3)
```

$$u_1 = \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{array}\right]$$

$$u_2 = \left[\begin{array}{ccc} -\frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} & \frac{1}{6}\sqrt{2}\sqrt{3} & \frac{1}{6}\sqrt{2}\sqrt{3} \end{array}\right]$$

$$u_3 = \left[\begin{array}{ccc} 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]$$

5.4.5. Este subespaço consiste dos vetores da forma:

$$\begin{array}{rcl} (-\alpha-\beta,\beta,\alpha) & = & (-\alpha,0,\alpha)+(-\beta,\beta,0) \\ & = & \alpha(-1,0,1)+\beta(-1,1,0) \end{array}$$

```
>> v1=[-1,0,1];v2=[-1,1,0];
>> w1=v1; w2=v2-proj(w1,v2);
>> u1=w1/no(w1), u2=w2/no(w2)
```

$$u_1 = \left[\begin{array}{ccc} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]$$

$$u_2 = \left[\begin{array}{ccc} -\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{2} & \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{2} \end{array}\right]$$

5.4.6. Este subespaço consiste dos vetores da forma:

$$\begin{array}{rc} (-\alpha+2\beta+\gamma,\gamma,\beta,\alpha) & = \\ (-\alpha,0,0,\alpha)+(2\beta,0,\beta,0)+(\gamma,\gamma,0,0) & = \\ \alpha(-1,0,0,1)+\beta(2,0,1,0)+\gamma(1,1,0,0) & \end{array}$$

```
>> v1=[-1,0,0,1];v2=[2,0,1,0];v3=[1,1,0,0];
>> w1=v1; w2=v2-proj(w1,v2);
>> w3=v3-proj(w1,v3)-proj(w2,v3);
>> u1=w1/no(w1), u2=w2/no(w2), u3=w3/no(w3)
```

$$u_1 = \left[\begin{array}{cccc} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right]$$

$$u_2 = \left[\begin{array}{cccc} \frac{1}{3}\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{array}\right]$$

$$u_3 = \left[\begin{array}{cccc} \frac{1}{42}\sqrt{42} & \frac{1}{7}\sqrt{42} & -\frac{1}{21}\sqrt{42} & \frac{1}{42}\sqrt{42} \end{array}\right]$$

5.4.7.
```
>> A=[1,1,-1,0;2,1,2,0];
>> escalona(A)
  1     0     3   0
  0     1    -4   0
```

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x_1 & & + & 3x_3 & = 0 \\ & x_2 & - & 4x_3 & = 0 \end{array}\right.$$

Este sistema tem como solução geral

$$\mathbb{W} = \{(-3\alpha, 4\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}\,.$$

Agora, para qualquer elemento de $\mathbb{W}$ temos:

$$(-3\alpha, 4\alpha, \alpha) = \alpha(-3,4,1)\,.$$

Logo, $S = \{V = (-3,4,1)\}$ gera $\mathbb{W}$. Como um conjunto formado por um único vetor não nulo é sempre L.I., então S é base para $\mathbb{W}$.

```
>> v=[-3,4,1];
>> u=v/no(v)
```

$$u = \left[\begin{array}{ccc} -\frac{3}{26}\sqrt{26} & \frac{2}{13}\sqrt{26} & \frac{1}{26}\sqrt{26} \end{array} \right]$$

5.4.8.
```
>> V1=[1,2,-3]; P1=[0,0,0];
>> V2=[2,4,-6]; P2=[0,1,2];
>> pv(V1,V2)
ans =    0     0     0
>> syms x y z; X=[x,y,z];
>> M=[X-P1;V1;P2-P1], expr=det(M)
M =[  x,   y,   z]
   [  1,   2,  -3]
   [  0,   1,   2] expr = 7*x-2*y+z
```

Como o produto vetorial de V_1 e V_2 (os dois vetores diretores das retas) é igual ao vetor nulo, então as retas são paralelas. Neste caso, os vetores V_1 e $\overrightarrow{P_1P_2}$ são não colineares e paralelos ao plano procurado. Assim, $7x-2y+z=0$ é a equação do plano, que passa pela origem, logo é um subespaço. Este subespaço consiste dos vetores da forma:

$$\begin{array}{rcl} (\alpha,\beta,-7\alpha+2\beta) & = & (\alpha,0,-7\alpha)+(0,\beta,2\beta) \\ & = & \alpha(1,0,-7)+\beta(0,1,2) \end{array}$$

```
>> V1=[1,0,-7];V2=[0,1,2];
>> W1=V1; W2=V2-proj(W1,V2)
W2 =[ 7/25,      1,  1/25]
>> U1=W1/no(W1), U2=W2/no(W2)
```

$$U_1 = \left[\begin{array}{ccc} 1/10\sqrt{2} & 0 & -\frac{7}{10}\sqrt{2} \end{array} \right]$$

$$U_2 = \left[\begin{array}{ccc} \frac{7}{45}\sqrt{3} & 5/9\sqrt{3} & 1/45\sqrt{3} \end{array} \right]$$

Para completarmos a uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, basta acrescentarmos $U_3 = U_1 \times U_2$.

```
>> U3=pv(U1,U2)
```

$$U_3 = \left[\begin{array}{ccc} \frac{7}{18}\sqrt{2}\sqrt{3} & -1/9\sqrt{2}\sqrt{3} & 1/18\sqrt{2}\sqrt{3} \end{array} \right]$$

5.4.9.
```
>> syms x y z d
>> expr1=2*x+2*y+2*z+d;
>> P1=[0,0,-d/2]; N=[2,2,2]; P=[1,1,1];
>> expr2=abs(pe(P-P1,N))/no(N)
```

$$\texttt{expr2} = 1/6\ |6+d|\sqrt{3}$$

```
>> solve(expr2-sqrt(3),d)
ans = [   0][ -12]
```

Os planos $2x+2y+2z=0$ e $2x+2y+2z-12=0$ satisfazem as condições do exercício. Apenas o primeiro plano é um subespaço. Este subespaço consiste dos vetores da forma:

$$\begin{array}{rcl} (\alpha,\beta,-\alpha-\beta) & = & (\alpha,0,-\alpha)+(0,\beta,-\beta) \\ & = & \alpha(1,0,-1)+\beta(0,1,-1) \end{array}$$

```
>> V1=[1,0,-1];V2=[0,1,-1];
>> W1=V1; W2=V2-proj(W1,V2)
W2 = [ -1/2,      1, -1/2]
>> U1=W1/no(W1), U2=W2/no(W2)
```

$$U_1 = \left[\begin{array}{ccc} 1/2\sqrt{2} & 0 & -1/2\sqrt{2} \end{array} \right]$$

$$U_2 = \left[\begin{array}{ccc} -1/6\sqrt{3}\sqrt{2} & 1/3\sqrt{3}\sqrt{2} & -1/6\sqrt{3}\sqrt{2} \end{array} \right].$$

6.1. Diagonalização de Matrizes (página 262)

6.1.1.

(a)
```
>> A=[1,1;1,1];
>> B=A-x*eye(2)
[1-x,   1]
[  1, 1-x]
>> p=det(B)
p =-2*x+x^2
>> solve(p)
[0][2]
>> B0=subs(B,x,0)
[1, 1]
[1, 1]
>> escalona(B0)
     1      1
     0      0
>> B2=subs(B,x,2)
[-1,  1]
[ 1, -1]
>> escalona(B2)
     1     -1
     0      0
```

$$\mathbb{V}_0 = \{(-\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{V}_2 = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

(b)
```
>> A=[1,-1;2,4];
>> B=A-x*eye(2)
[1-x,  -1]
[  2, 4-x]
>> p=det(B)
p =6-5*x+x^2
>> solve(p)
[3][2]
>> B2=subs(B,x,2)
[-1, -1]
[ 2,  2]
>> escalona(B2)
     1      1
     0      0
>> B3=subs(B,x,3)
[-2, -1]
[ 2,  1]
>> escalona(B3)
      1            1/2
      0             0
```

$$\mathbb{V}_2 = \{(-\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{V}_3 = \{(-\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

(c)
```
>> A=[0,1,2;0,0,3;0,0,0];
>> B=A-x*eye(3)
[-x,  1,  2]
[ 0, -x,  3]
[ 0,  0, -x]
>> p=det(B)
p=-x^3
>> solve(p)
[0][0][0]
```

```
>> B0=subs(B,x,0)
[0, 1, 2]
[0, 0, 3]
[0, 0, 0]
>> escalona(B0)
[0, 1, 0]
[0, 0, 1]
[0, 0, 0]
```

$$\mathbb{V}_0 = \{(\alpha, 0, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

(d)
```
>> A=[1,0,0;-1,3,0;3,2,-2];
>> B=A-x*eye(3)
[1-x,   0,    0]
[ -1, 3-x,    0]
[  3,   2, -2-x]
>> p=det(B)
p =(1-x)*(3-x)*(-2-x)
>> solve(p)
[ 1][ 3][-2]
```

```
>> Bm2=subs(B,x,-2)
[ 3, 0, 0]
[-1, 5, 0]
[ 3, 2, 0]
>> escalona(Bm2)
[1, 0, 0]
[0, 1, 0]
[0, 0, 0]
```

```
>> B1=subst(B,x,1)
[ 0, 0,  0]
[-1, 2,  0]
[ 3, 2, -3]
>> escalona(B1)
[1, 0, -3/4]
[0, 1, -3/8]
[0, 0,    0]
```

```
>> B3=subs(B,x,3)
[-2, 0,  0]
[-1, 0,  0]
[ 3, 2, -5]
>> escalona(B3)
[1, 0,    0]
[0, 1, -5/2]
[0, 0,    0]
```

$$\mathbb{V}_{-2} = \{(0, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{V}_1 = \{(6\alpha, 3\alpha, 8\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{V}_3 = \{(0, 5\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

(e)

```
>> A=[2,-2,3;0,3,-2;0,-1,2];
>> B=A-x*eye(3)
[2-x,  -2,   3]
[  0, 3-x,  -2]
[  0,  -1, 2-x]
>> p=det(B)
p =(2-x)*(4-5*x+x^2)
>> solve(p)
[2][4][1]
>> B1=subs(B,x,1)
[1, -2,  3]
[0,  2, -2]
[0, -1,  1]
>> escalona(B1)
[1, 0,  1]
[0, 1, -1]
[0, 0,  0]
```

```
>> B2=subs(B,x,2)
[0, -2,  3]
[0,  1, -2]
[0, -1,  0]
>> escalona(B2)
[0, 1, 0]
[0, 0, 1]
[0, 0, 0]
>> B4=subs(B,x,4)
[-2, -2,  3]
[ 0, -1, -2]
[ 0, -1, -2]
>> escalona(B4)
[1, 0, -7/2]
[0, 1,    2]
[0, 0,    0]
```

$$\mathbb{V}_1 = \{(-\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{V}_2 = \{(\alpha, 0, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{V}_4 = \{(7\alpha, -4\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

(f)

```
>> A=[2,2,3;1,2,1;2,-2,1];
>> B=A-x*eye(3)
[2-x,    2,    3]
[  1, 2-x,     1]
[  2,   -2, 1-x]
>> p=det(B)
p =-8-2*x+5*x^2-x^3
>> solve(p)
[ 2][ 4][-1]
>> Bm1=subs(B,x,-1)
[3,   2, 3]
[1,   3, 1]
[2, -2, 2]
>> escalona(Bm1)
[1, 0, 1]
[0, 1, 0]
[0, 0, 0]
```

```
>> B2=subs(B,x,2)
[0,  2,  3]
[1,  0,  1]
[2, -2, -1]
>> escalona(B2)
[1, 0,    1]
[0, 1, 3/2]
[0, 0,    0]
>> B4=subs(B,x,4)
[-2,  2,  3]
[ 1, -2,  1]
[ 2, -2, -3]
>> escalona(B4)
[1, 0,    -4]
[0, 1, -5/2]
[0, 0,     0]
```

$\mathbb{V}_{-1} = \{(-\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{V}_2 = \{(-2\alpha, -3\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ e $\mathbb{V}_4 = \{(8\alpha, 5\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

6.1.2. (a)

```
>> A=[2,0,0;3,-1,0;0,4,3];
>> B=A-x*eye(3)
[2-x,     0,    0]
[  3, -1-x,     0]
[  0,     4, 3-x]
>> p=det(B)
p =(2-x)*(-1-x)*(3-x)
>> solve(p)
[ 2][-1][ 3]
>> Bm1=subs(B,x,-1)
[3, 0, 0]
[3, 0, 0]
[0, 4, 4]
>> escalona(Bm1)
[1, 0, 0]
[0, 1, 1]
[0, 0, 0]
```

```
>> B2=subs(B,x,2)
[0,   0, 0]
[3, -3, 0]
[0,   4, 1]
>> escalona(B2)
[1, 0, 1/4]
[0, 1, 1/4]
[0, 0,    0]
>> B3=subst(B,x,3)
[-1,   0, 0]
[ 3, -4, 0]
[ 0,   4, 0]
>> escalona(B3)
[1, 0, 0]
[0, 1, 0]
[0, 0, 0]
```

$\mathbb{V}_{-1} = \{(0, -\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\{(0, -1, 1)\}$ é base para $\mathbb{V}_{-1}$, pois gera $\mathbb{V}_{-1}$ $((0, -\alpha, \alpha) = \alpha(0, -1, 1))$ e um vetor não nulo é L.I.

$\mathbb{V}_2 = \{(-\alpha, -\alpha, 4\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\{(-1, -1, 4)\}$ é base para $\mathbb{V}_2$, pois gera $\mathbb{V}_2$ $((-\alpha, -\alpha, 4\alpha) = \alpha(-1, -1, 4))$ e um vetor não nulo é L.I.

$\mathbb{V}_3 = \{(0, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\{(0, 0, 1)\}$ é base para $\mathbb{V}_3$, pois gera $\mathbb{V}_3$ $((0, 0, \alpha) = \alpha(0, 0, 1))$ e um vetor não nulo é L.I.

(b)

```
>> A=[2,3,0;0,1,0;0,0,2];
>> B=A-x*eye(3)
[2-x,    3,    0]
[  0,  1-x,    0]
[  0,    0,  2-x]
>> p=det(B)
p =(2-x)^2*(1-x)
>> solve(p)
[2][2][1]
>> B1=subs(B,x,1)
[1, 3, 0]
[0, 0, 0]
[0, 0, 1]
```

```
>> escalona(B1)
[1, 3, 0]
[0, 0, 1]
[0, 0, 0]
>> B2=subs(B,x,2)
[0,  3, 0]
[0, -1, 0]
[0,  0, 0]
>> escalona(B2)
[0, 1, 0]
[0, 0, 0]
[0, 0, 0]
```

$\mathbb{V}_1 = \{(-3\alpha, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\{(-3, 1, 0)\}$ é base para $\mathbb{V}_1$, pois gera $\mathbb{V}_1$ $((-3\alpha, \alpha, 0) = \alpha(-3, 1, 0))$ e um vetor não nulo é L.I.

$\mathbb{V}_2 = \{(\alpha, 0, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. $\{V_1 = (1, 0, 0), V_2 = (0, 0, 1)\}$ é base para $\mathbb{V}_2$, pois gera $\mathbb{V}_2$ $((\alpha, 0, \beta) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 0, 1))$ e é L.I. ($xV_1 + yV_2 = \bar{0}$ se, e somente se, $(x, 0, y) = (0, 0, 0)$ ou $x = 0$ e $y = 0$).

(c)

```
>> A=[1,2,3,4;0,-1,3,2;0,0,3,3;0,0,0,2];
>> B=A-x*eye(4)
[1-x,     2,    3,    4]
[  0,  -1-x,    3,    2]
[  0,     0,  3-x,    3]
[  0,     0,    0,  2-x]
>> p=det(B)
p =(1-x)*(2-x)*(-1-x)*(3-x)
>> solve(p)
[ 1][ 2][-1][ 3]
```

```
>> Bm1=subs(B,x,-1)
[2, 2, 3, 4]
[0, 0, 3, 2]
[0, 0, 4, 3]
[0, 0, 0, 3]
>> escalona(Bm1)
[1, 1, 0, 0]
[0, 0, 1, 0]
[0, 0, 0, 1]
[0, 0, 0, 0]
```

```
>> B1=subs(B,x,1)
[0,  2, 3, 4]
[0, -2, 3, 2]
[0,  0, 2, 3]
[0,  0, 0, 1]
>> escalona(B1)
[0, 1, 0, 0]
[0, 0, 1, 0]
[0, 0, 0, 1]
[0, 0, 0, 0]
```

```
>> B2=subs(B,x,2)
[-1,  2, 3, 4]
[ 0, -3, 3, 2]
[ 0,  0, 1, 3]
[ 0,  0, 0, 0]
>> escalona(B2)
[1, 0, 0, 29/3]
[0, 1, 0,  7/3]
[0, 0, 1,    3]
[0, 0, 0,    0]
```

```
>> B3=subst(B,x,3)
[-2,  2, 3,  4]
[ 0, -4, 3,  2]
[ 0,  0, 0,  3]
[ 0,  0, 0, -1]
>> escalona(B3)
[1, 0, -9/4, 0]
[0, 1, -3/4, 0]
[0, 0,    0, 1]
[0, 0,    0, 0]
```

$\mathbb{V}_{-1} = \{(-\alpha, \alpha, 0, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\{(-1, 1, 0, 0)\}$ é base para $\mathbb{V}_{-1}$, pois gera $\mathbb{V}_{-1}$ ($(-\alpha, \alpha, 0, 0) = \alpha(-1, 1, 0, 0)$) e um vetor não nulo é L.I.

$\mathbb{V}_1 = \{(\alpha, 0, 0, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\{(1, 0, 0, 0)\}$ é base para $\mathbb{V}_1$, pois gera $\mathbb{V}_1$ ($(\alpha, 0, 0, 0) = \alpha(1, 0, 0, 0)$) e um vetor não nulo é L.I.

$\mathbb{V}_2 = \{(-29\alpha, -7\alpha, -9\alpha, 3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\{(-29, -7, -9, 3)\}$ é base para $\mathbb{V}_2$, pois gera $\mathbb{V}_2$ ($(-29\alpha, -7\alpha, -9\alpha, 3\alpha) = \alpha(-29, -7, -9, 3)$) e um vetor não nulo é L.I.

$\mathbb{V}_3 = \{(9\alpha, 3\alpha, 4\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\{(9, 3, 4, 0)\}$ é base para $\mathbb{V}_3$, pois gera $\mathbb{V}_3$ ($(9\alpha, 3\alpha, 4\alpha, 0) = \alpha(9, 3, 4, 0)$) e um vetor não nulo é L.I.

(d)

```
>> A=[2,2,3,4;0,2,3,2;0,0,1,1;0,0,0,1];
>> B=A-x*eye(4)
[2-x,    2,    3,    4]
[  0, 2-x,    3,    2]
[  0,    0, 1-x,    1]
[  0,    0,    0, 1-x]
>> p=det(B)
p =(2-x)^2*(1-x)^2
>> solve(p)
[2][2][1][1]
```

```
>> B1=subs(B,x,1)
[1, 2, 3, 4]
[0, 1, 3, 2]
[0, 0, 0, 1]
[0, 0, 0, 0]
>> escalona(B1)
[1, 0, -3, 0]
[0, 1,  3, 0]
[0, 0,  0, 1]
[0, 0,  0, 0]
```

```
>> B2=subs(B,x,2)
[0, 2,  3,  4]
[0, 0,  3,  2]
[0, 0, -1,  1]
[0, 0,  0, -1]
>> escalona(B2)
[0, 1, 0, 0]
[0, 0, 1, 0]
[0, 0, 0, 1]
[0, 0, 0, 0]
```

$\mathbb{V}_1 = \{(3\alpha, -3\alpha, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\{(3, -3, 1, 0)\}$ é base para $\mathbb{V}_1$, pois gera $\mathbb{V}_1$ ($(3\alpha, -3\alpha, \alpha, 0) = \alpha(3, -3, 1, 0)$) e um vetor não nulo é L.I.

$\mathbb{V}_2 = \{(\alpha, 0, 0, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\{(1, 0, 0, 0)\}$ é base para $\mathbb{V}_2$, pois gera $\mathbb{V}_2$ ($(\alpha, 0, 0, 0) = \alpha(1, 0, 0, 0)$) e um vetor não nulo é L.I.

6.1.3.

(a)

```
>> A=[1,4;1,-2];
>> B=A-x*eye(2)
[1-x,    4]
[  1, -2-x]
```

```
>> p=det(B)
p =-6+x+x^2
>> solve(p)
[ 2][-3]
```

A matriz A possui dois autovalores diferentes, logo possui dois autovetores L.I. (Proposição 6.3 na página 258). A matriz A é diagonalizável pois, é 2×2 e possui dois autovetores L.I. (Teorema 6.2 na página 256).

(b)
```
>> A=[1,0;-2,1];
>> B=A-x*eye(2)
[1-x,    0]
[ -2, 1-x]
>> p=det(B)
p =(1-x)^2
>> solve(p)
[1][1]
```

```
>> B1=subs(B,x,1)
[ 0, 0]
[-2, 0]
>> escalona(numeric(B1))
[1, 0]
[0, 0]
```

$$\mathbb{V}_1 = \{(\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

A matriz A não é diagonalizável pois, não possui dois autoovetores L.I. (Teorema 6.2 na página 256).

(c)
```
>> A=[1,1,-2;4,0,4;1,-1,4]
A =   1          1          -2
      4          0           4
      1         -1           4
>> B=A-x*eye(3); p=det(B)
p =5*x^2-6*x-x^3
>> solve(p)
ans =[0][2][3]
```

A matriz A possui três autovalores diferentes, logo possui três autovetores L.I. (Proposição 6.3 na página 258). A matriz A é diagonalizável pois, é 3×3 e possui três autovetores L.I. (Teorema 6.2 na página 256).

(d)
```
>> A=[1,2,3;0,-1,2;0,0,2];
>> B=A-x*eye(3)
[1-x,    2,    3]
[  0, -1-x,    2]
[  0,    0, 2-x]
```

```
>> p=det(B)
p =(1-x)*(-1-x)*(2-x)
>> solve(p)
[ 1][-1][ 2]
```

A matriz A possui três autovalores diferentes, logo possui três autovetores L.I. (Proposição 6.3 na página 258). A matriz A é diagonalizável pois, é 3×3 e possui três autovetores L.I. (Teorema 6.2 na página 256).

6.1.4.

(a)
```
>> A=[1,1,2;0,1,0;0,1,3];
>> B=A-x*eye(3)
[1-x,    1,    2]
[  0, 1-x,    0]
[  0,    1, 3-x]
>> p=det(B)
p =(1-x)^2*(3-x)
>> solve(p)
[1][1][3]
```

```
>> B1=subs(B,x,1)
[0, 1, 2]
[0, 0, 0]
[1, 1, 2]
>> escalona(B1)
[ 0, 1, 2]
[ 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0]
```

```
>> B3=subs(B,x,3)
[ -2,  1,  2]
[  0, -2,  0]
[  0,  1,  0]
>> escalona(B3)
[  1,  0, -1]
[  0,  1,  0]
[  0,  0,  0]
```

$\mathbb{V}_1 = \{(\beta, -2\alpha, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. $\{(1,0,0),(0,-2,1)\}$ é base para $\mathbb{V}_1$, pois gera $\mathbb{V}_1$ $((\beta,-2\alpha,\alpha) = \alpha(0,-2,1)+\beta(1,0,0))$ e são L.I. (um vetor não é múltiplo escalar do outro)

$\mathbb{V}_3 = \{((\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\{(1,0,1)\}$ é base para $\mathbb{V}_3$, pois gera $\mathbb{V}_3$ $((\alpha,0,\alpha) = \alpha(1,0,1))$ e um vetor não nulo é L.I.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(b)
```
>> A=[4,2,3;2,1,2;-1,-2,0];
>> B=A-x*eye(3)
[4-x,   2,  3]
[  2, 1-x,  2]
[ -1,  -2, -x]
>> p=det(B)
p =-7*x+5*x^2+3-x^3
>> solve(p)
[3][1][1]
>> B1=subs(B,x,1)
[ 3,  2,  3]
[ 2,  0,  2]
[-1, -2, -1]
>> escalona(B1)
[1, 0, 1]
[0, 1, 0]
[0, 0, 0]
```

```
>> B3=subs(B,x,3)
[ 1,  2,  3]
[ 2, -2,  2]
[-1, -2, -3]
>> escalona(B3)
[1, 0, 5/3]
[0, 1, 2/3]
[0, 0,   0]
```

$\mathbb{V}_1 = \{(-\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\{(-1,0,1)\}$ é base para $\mathbb{V}_1$, pois gera $\mathbb{V}_1$ $((-\alpha,0,\alpha) = \alpha(-1,0,1))$ e um vetor não nulo é L.I.

$\mathbb{V}_2 = \{(-5\alpha, -2\alpha, 3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\{(-5,-2,3)\}$ é base para $\mathbb{V}_2$, pois gera $\mathbb{V}_2$ $((-5\alpha,-2\alpha,3\alpha) = \alpha(-5,-2,3))$ e um vetor não nulo é L.I.

A matriz não é diagonalizável pois só possui dois autovalores e cada um deles só possui um autovetor L.I. associado (Teorema 6.2 na página 256).

(c)
```
>> A=[1,2,3;0,1,0;2,1,2];
>> B=A-x*eye(3)
[1-x,   2,   3]
[  0, 1-x,   0]
[  2,   1, 2-x]
>> p=det(B)
p =-4+x+4*x^2-x^3
>> solve(p)
[ 1][ 4][-1]
>> B1=subst(B,x,1)
[0, 2, 3]
[0, 0, 0]
[2, 1, 1]
>> escalona(B1)
[1, 0, -1/4]
[0, 1,  3/2]
[0, 0,    0]
```

```
>> Bm1=subs(B,x,-1)
[2, 2, 3]
[0, 2, 0]
[2, 1, 3]
>> escalona(Bm1)
[1, 0, 3/2]
[0, 1,   0]
[0, 0,   0]
>> B4=subs(B,x,4)
[-3,  2,  3]
[ 0, -3,  0]
[ 2,  1, -2]
>> escalona(B4)
[1, 0, -1]
[0, 1,  0]
[0, 0,  0]
```

$\mathbb{V}_{-1} = \{(-3\alpha, 0, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\{(-3, 0, 2)\}$ é base para $\mathbb{V}_{-1}$, pois gera $\mathbb{V}_{-1}$ $((-3\alpha, 0, 2\alpha) = \alpha(-3, 0, 2))$ e um vetor não nulo é L.I.

$\mathbb{V}_1 = \{(\alpha, -6\alpha, 4\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\{(1, -6, 4)\}$ é base para $\mathbb{V}_1$, pois gera $\mathbb{V}_1$ $((\alpha, -6\alpha, 4\alpha) = \alpha(1, -6, 4))$ e um vetor não nulo é L.I.

$\mathbb{V}_4 = \{(\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\{(1, 0, 1)\}$ é base para $\mathbb{V}_4$, pois gera $\mathbb{V}_4$ $((\alpha, 0, \alpha) = \alpha(1, 0, 1))$ e um vetor não nulo é L.I.

$$P = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(d)
```
>> A=[3,-2,1;0,2,0;0,0,0];
>> B=A-x*eye(3)
[3-x,  -2,  1]
[  0, 2-x,  0]
[  0,   0, -x]
>> p=det(B)
p =-(3-x)*(2-x)*x
>> solve(p)
[3][2][0]
>> B2=subs(B,x,2)
[1, -2,  1]
[0,  0,  0]
[0,  0, -2]
>> escalona(B2)
[1, -2, 0]
[0,  0, 1]
[0,  0, 0]
```

```
>> B0=subs(B,x,0)
[3, -2, 1]
[0,  2, 0]
[0,  0, 0]
>> escalona(B0)
[1, 0, 1/3]
[0, 1,   0]
[0, 0,   0]
>> B3=subs(B,x,3)
[0, -2,  1]
[0, -1,  0]
[0,  0, -3]
>> escalona(B3)
[0, 1, 0]
[0, 0, 1]
[0, 0, 0]
```

$\mathbb{V}_0 = \{(-\alpha, 0, 3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\{(-1, 0, 3)\}$ é base para $\mathbb{V}_0$, pois gera $\mathbb{V}_0$ $((-\alpha, 0, 3\alpha) = \alpha(-1, 0, 3))$ e um vetor não nulo é L.I.

$\mathbb{V}_2 = \{(2\alpha, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\{(2, 1, 0)\}$ é base para $\mathbb{V}_2$, pois gera $\mathbb{V}_2$ $((2\alpha, \alpha, 0) = \alpha(2, 1, 0))$ e um vetor não nulo é L.I.

$\mathbb{V}_3 = \{(\alpha, 0, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\{(1, 0, 0)\}$ é base para $\mathbb{V}_3$, pois gera $\mathbb{V}_3$ $((\alpha, 0, 0) = \alpha(1, 0, 0))$ e um vetor não nulo é L.I.

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6.1.5.
```
>> B=randi(2), A=[B-B',zeros(2,1);zeros(1,2),randi]
B =  5    -1
     3     0
A =  0    -4     0
     4     0     0
     0     0    -3
>> syms x, p=det(A-x*eye(3)), solve(p)
p = -3*x^2-x^3-48-16*x
ans = [   -3][  4*i][ -4*i]
>> escalona(A+3*eye(3))
ans =[ 1, 0, 0]
```

```
[ 0, 1, 0]
[ 0, 0, 0]
```

A matriz A não é diagonalizável pois ela só tem um autovalor e auto espaço associado a este autovalor tem dimensão 2. Assim, não é possível encontrar 3 autovetores L.I.

6.1.6.

```
>> L=[eye(2),zeros(2,1);randi(1,2),0]; A=L*L'
A =  1     0     2
     0     1    -2
     2    -2     8
>> syms x, p=det(A-x*eye(3)), solve(p)
p = -9*x+10*x^2-x^3
ans = [ 0][ 1][ 9]
>> escalona(A)
ans =[  1,  0,  2]
     [  0,  1, -2]
     [  0,  0,  0]
```

O autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 0$ é

$$\mathbb{V}_0 = \{(-2\alpha, 2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Assim, $\{V_1 = (-2, 2, 1)\}$ é um conjunto com o maior número possível de autovetores L.I. associado a $\lambda = 0$.

```
>> escalona(A-eye(3))
ans =[  1, -1,  0]
     [  0,  0,  1]
     [  0,  0,  0]
```

O autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 1$ é

$$\mathbb{V}_1 = \{(\alpha, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Assim, $\{V_2 = (1, 1, 0)\}$ é um conjunto com o maior número possível de autovetores L.I. associado a $\lambda = 1$.

```
>> escalona(A-9*eye(3))
ans =[    1,     0, -1/4]
     [    0,     1,  1/4]
     [    0,     0,    0]
```

O autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 9$ é

$$\mathbb{V}_9 = \{(\alpha, -\alpha, 4\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Assim, $\{V_3 = (1, -1, 4)\}$ é um conjunto com o maior número possível de autovetores L.I. associado a $\lambda = 9$.

```
>> V1=[-2,2,1];V2=[1,1,0];V3=[1,-1,4];
>> P=[V1',V2',V3'], D=diag([0,1,9])
P = -2     1     1
     2     1    -1
     1     0     4
D =  0     0     0
     0     1     0
     0     0     9
>> inv(P)*A*P
ans =     0     0     0
          0     1     0
          0     0     9
>> [P,D]=eig(sym(A))
P =[ -1, -2,  1]
   [  1,  2,  1]
   [ -4,  1,  0]
D =[ 9, 0, 0]
   [ 0, 0, 0]
   [ 0, 0, 1]
```

Os elementos da diagonal da matriz D têm que ser os autovalores de A. As matrizes D podem diferir na ordem com que os autovalores aparecem. As colunas de P são autovetores associados aos autovalores que aparecem nas colunas correspondentes de D. Assim, fazendo uma reordenacão das colunas das matrizes P e D de forma que as matrizes D sejam iguais, as colunas de uma matriz P são múltiplos escalares das colunas correspondentes da outra matriz P.

6.2. Diagonalização de Matrizes Simétricas (página 274)

6.2.1.

(a)
```
>> A=[2,2;2,2];
>> B=A-x*eye(2)
[2-x,   2]
[  2, 2-x]
>> p=det(B)
p =-4*x+x^2
>> solve(p)
[0][4]
```

```
>> B0=subs(B,x,0)
[2, 2]
[2, 2]
>> escalona(B0)
[1, 1]
[0, 0]
```

```
>> B4=subs(B,x,4)
[-2,  2]
[ 2, -2]
>> escalona(B4)
[1, -1]
[0,  0]
```

$\mathbb{V}_0 = \{(-\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\{V_1 = (-1, 1)\}$ é base para $\mathbb{V}_0$, pois gera $\mathbb{V}_0$ $((-\alpha, \alpha) = \alpha(-1, 1))$ e um vetor não nulo é L.I. Seja $W_1 = (1/||V_1||)V_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. $\{W_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$ é base ortonormal de $\mathbb{V}_0$.

$\mathbb{V}_4 = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\{V_2 = (1, 1)\}$ é base para $\mathbb{V}_4$, pois gera $\mathbb{V}_4$ $((\alpha, \alpha) = \alpha(1, 1))$ e um vetor não nulo é L.I. Seja $W_2 = (1/||V_2||)V_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. $\{W_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$ é base ortonormal de $\mathbb{V}_4$.

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(b)
```
>> A=[2,1;1,2];
>> B=A-x*eye(2)
[2-x,   1]
[  1, 2-x]
>> p=det(B)
p =3-4*x+x^2
>> solve(p)
[3][1]
>> B1=subs(B,x,1)
[1, 1]
[1, 1]
>> escalona(numeric(B1))
[1, 1]
[0, 0]
```
```
>> B3=subs(B,x,3)
[-1,  1]
[ 1, -1]
>> escalona(B3)
[1, -1]
[0,  0]
```
$\mathbb{V}_1 = \{(-\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\{V_1 = (-1, 1)\}$ é base para $\mathbb{V}_1$, pois gera $\mathbb{V}_1$ $((-\alpha, \alpha) = \alpha(-1, 1))$ e um vetor não nulo é L.I. Seja $W_1 = (1/||V_1||)V_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. $\{W_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$ é base ortonormal de $\mathbb{V}_1$.
$\mathbb{V}_3 = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\{V_2 = (1, 1)\}$ é base para $\mathbb{V}_3$, pois gera $\mathbb{V}_3$ $((\alpha, \alpha) = \alpha(1, 1))$ e um vetor não nulo é L.I. Seja $W_2 = (1/||V_2||)V_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. $\{W_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$ é base ortonormal de $\mathbb{V}_3$.

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(c)
```
>> A=[0,0,1;0,0,0;1,0,0];
>> B=A-x*eye(3)
[-x,  0,  1]
[ 0, -x,  0]
[ 1,  0, -x]
>> p=det(B)
p =-x^3+x
>> solve(p)
[ 0][-1][ 1]
>> Bm1=subs(B,x,-1)
[1, 0, 1]
[0, 1, 0]
[1, 0, 1]
>> escalona(Bm1)
[1, 0, 1]
[0, 1, 0]
[0, 0, 0]
```
```
>> B0=subs(B,x,0)
[0, 0, 1]
[0, 0, 0]
[1, 0, 0]
>> escalona(B0)
[1, 0, 0]
[0, 0, 1]
[0, 0, 0]
>> B1=subs(B,x,1)
[-1,  0,  1]
[ 0, -1,  0]
[ 1,  0, -1]
>> escalona(B1)
[1, 0, -1]
[0, 1,  0]
[0, 0,  0]
```
$\mathbb{V}_0 = \{(0, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\{V_1 = (0, 1, 0)\}$ é base para $\mathbb{V}_0$, pois gera $\mathbb{V}_0$ $((0, \alpha, 0) = \alpha(0, 1, 0))$ e um vetor não nulo é L.I. $\{V_1 = (0, 1, 0)\}$ é base ortonormal de $\mathbb{V}_0$, pois $||V_1|| = 1$.

$\mathbb{V}_{-1} = \{(-\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\{V_2 = (-1, 0, 1)\}$ é base para $\mathbb{V}_{-1}$, pois gera $\mathbb{V}_{-1}$ ($(-\alpha, 0, \alpha) = \alpha(-1, 0, 1)$) e um vetor não nulo é L.I. Seja $W_2 = (1/||V_2||)V_2 = (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$. $\{W_2 = (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})\}$ é base ortonormal de $\mathbb{V}_{-1}$.
$\mathbb{V}_1 = \{(\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\{V_3 = (1, 0, 1)\}$ é base para $\mathbb{V}_1$, pois gera $\mathbb{V}_1$ ($(\alpha, 0, \alpha) = \alpha(1, 0, 1)$) e um vetor não nulo é L.I. Seja $W_3 = (1/||V_3||)V_3 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$. $\{W_3 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})\}$ é base ortonormal de $\mathbb{V}_1$.
Como a matriz A é simétrica, autovetores associados a autovalores diferentes são ortogonais (Proposição 6.5 na página 271). Portanto, $\{W_1, W_2, W_3\}$ é uma base ortonormal de autovetores de A.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(d)
```
>> A=[0,0,0;0,2,2;0,2,2];
>> B=A-x*eye(3)
[-x,   0,   0]
[ 0, 2-x,   2]
[ 0,   2, 2-x]
>> p=det(B)
p =-x*(-4*x+x^2)
>> solve(p)
[0][0][4]
>> B0=subs(B,x,0)
[0, 0, 0]
[0, 2, 2]
[0, 2, 2]
```

```
>> escalona(B0)
[0, 1, 1]
[0, 0, 0]
[0, 0, 0]
>> B4=subs(B,x,4)
[-4,  0,  0]
[ 0, -2,  2]
[ 0,  2, -2]
>> escalona(B4)
[1, 0,  0]
[0, 1, -1]
[0, 0,  0]
```

$\mathbb{V}_0 = \{(\alpha, -\beta, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. $\{V_1 = (1, 0, 0), V_2 = (0, -1, 1)\}$ é base para $\mathbb{V}_0$, pois gera $\mathbb{V}_0$ ($(\alpha, -\beta, \beta) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, -1, 1)$) e é L.I. ($xV_1 + yV_2 = \bar{0}$ se, e somente se, $(x, -y, y) = (0, 0, 0)$ ou $x = 0$ e $y = 0$). Sejam $W_1 = V_1$, $W_2 = V_2 - \mathrm{proj}_{W_1} V_2 = V_2 - \bar{0} = V_2$. Sejam $U_1 = (1/||W_1||)W_1 = W_1 = V_1 = (1, 0, 0)$ e $U_2 = (1/||W_2||)W_2 = (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. $\{U_1 = (1, 0, 0), U_2 = ((0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$ é base ortonormal de $\mathbb{V}_0$.
$\mathbb{V}_4 = \{(0, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\{V_3 = (0, 1, 1)\}$ é base para $\mathbb{V}_4$, pois gera $\mathbb{V}_4$ ($(0, \alpha, \alpha) = \alpha(0, 1, 1)$) e um vetor não nulo é L.I. Seja $U_3 = (1/||V_3||)V_3 = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. $\{U_3 = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$ é base ortonormal de $\mathbb{V}_4$. Como a matriz A é simétrica, autovetores associados a autovalores diferentes são ortogonais (Proposição 6.5 na página 271). Portanto, $\{U_1, U_2, U_3\}$ é uma base ortonormal de autovetores de A.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(e)
```
>> A=[1,1,0;1,1,0;0,0,1];
>> B=A-x*eye(3)
[1-x,   1,   0]
[  1, 1-x,   0]
[  0,   0, 1-x]
>> p=det(B)
p =-2*x+3*x^2-x^3
>> solve(p)
[0][1][2]
```

```
>> B0=subs(B,x,0)
[1, 1, 0]
[1, 1, 0]
[0, 0, 1]
>> escalona(B0)
[1, 1, 0]
[0, 0, 1]
[0, 0, 0]
```

```
>> B1=subs(B,x,1)
[0, 1, 0]
[1, 0, 0]
[0, 0, 0]
>> escalona(B1)
[1, 0, 0]
[0, 1, 0]
[0, 0, 0]
```

```
>> B2=subs(B,x,2)
[-1,  1,  0]
[ 1, -1,  0]
[ 0,  0, -1]
>> escalona(B2)
[1, -1, 0]
[0,  0, 1]
[0,  0, 0]
```

$\mathbb{V}_0 = \{(-\alpha, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\{V_1 = (-1, 1, 0)\}$ é base para $\mathbb{V}_0$, pois gera $\mathbb{V}_0$ ($(-\alpha, \alpha, 0) = \alpha(-1, 1, 0)$) e um vetor não nulo é L.I. Seja $U_1 = (1/||V_1||)V_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$. $\{U_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)\}$ é base ortonormal de $\mathbb{V}_0$.
$\mathbb{V}_1 = \{(0, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\{V_2 = (0, 0, 1)\}$ é base para $\mathbb{V}_1$, pois gera $\mathbb{V}_1$ ($(0, 0, \alpha) = \alpha(0, 0, 1)$) e um vetor não nulo é L.I. Seja $W_2 = (1/||V_2||)V_2 = (0, 0, 1)$. $\{W_2 = (0, 0, 1)\}$ é base ortonormal de $\mathbb{V}_1$.
$\mathbb{V}_2 = \{(\alpha, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\{V_3 = (1, 1, 0)\}$ é base para $\mathbb{V}_1$, pois gera $\mathbb{V}_1$ ($(\alpha, \alpha, 0) = \alpha(1, 1, 0)$) e um vetor não nulo é L.I. Seja $W_3 = (1/||V_3||)V_3 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$. $\{W_3 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)\}$ é base ortonormal de $\mathbb{V}_1$.
Como a matriz A é simétrica, autovetores associados a autovalores diferentes são ortogonais (Proposição 6.5 na página 271). Portanto, $\{W_1, W_2, W_3\}$ é uma base ortonormal de autovetores de A.

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(f)
```
>> A=[2,1,1;1,2,1;1,1,2];
>> B=A-x*eye(3)
[2-x,   1,   1]
[  1, 2-x,   1]
[  1,   1, 2-x]
>> p=det(B)
p =4-9*x+6*x^2-x^3
>> solve(p)
[4][1][1]
>> B1=subs(B,x,1)
[1, 1, 1]
[1, 1, 1]
[1, 1, 1]
```

```
>> escalona(B1)
[1, 1, 1]
[0, 0, 0]
[0, 0, 0]
>> B4=subst(B,x,4)
[-2,  1,  1]
[ 1, -2,  1]
[ 1,  1, -2]
>> escalona(B4)
[1, 0, -1]
[0, 1, -1]
[0, 0,  0]
```

$\mathbb{V}_1 = \{(-\alpha - \beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. $\{V_1 = (-1, 1, 0), V_2 = (-1, 0, 1)\}$ é base para $\mathbb{V}_1$, pois gera $\mathbb{V}_0$ ($(-\alpha - \beta, \alpha, \beta) = \alpha(-1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1)$) e é L.I.(um vetor não é múltiplo escalar do outro). Sejam $W_1 = V_1$, $W_2 = V_2 - \text{proj}_{W_1} V_2 = V_2 - (-1/2, 1/2, 0) = (-1/2, -1/2, 1)$. Sejam $U_1 = (1/||W_1||)W_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ e $U_2 = (1/||W_2||)W_2 = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{6}}{3})$. $\{U_1, U_2\}$ é base ortonormal de $\mathbb{V}_1$.
$\mathbb{V}_4 = \{(\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\{V_3 = (1, 1, 1)\}$ é base para $\mathbb{V}_4$, pois gera $\mathbb{V}_4$ ($(\alpha, \alpha, \alpha) = \alpha(1, 1, 1)$) e um vetor não nulo é L.I. Seja $U_3 = (1/||V_3||)V_3 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. $\{U_3 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\}$ é base ortonormal de $\mathbb{V}_4$. Como a matriz A é simétrica, autovetores associados a autovalores diferentes são ortogonais (Proposição 6.5 na página 271). Portanto, $\{U_1, U_2, U_3\}$ é uma base ortonormal de autovetores de A.

$$P = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & \sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(g)
```
>> A=[1,2,0,0;2,1,0,0;0,0,1,2;0,0,2,1];
>> B=A-x*eye(4)
[1-x,   2,   0,   0]
[  2, 1-x,   0,   0]
[  0,   0, 1-x,   2]
[  0,   0,   2, 1-x]
>> p=det(B)
p =9+12*x-2*x^2-4*x^3+x^4
>> solve(p)
[-1][-1][ 3][ 3]
```

```
>> Bm1=subs(B,x,-1)
[2, 2, 0, 0]
[2, 2, 0, 0]
[0, 0, 2, 2]
[0, 0, 2, 2]
>> escalona(Bm1)
[1, 1, 0, 0]
[0, 0, 1, 1]
[0, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 0]
```

```
>> B3=subs(B,x,3)
[-2,  2,  0,  0]
[ 2, -2,  0,  0]
[ 0,  0, -2,  2]
[ 0,  0,  2, -2]
>> escalona(B3)
[1, -1, 0,  0]
[0,  0, 1, -1]
[0,  0, 0,  0]
[0,  0, 0,  0]
```

$\mathbb{V}_{-1} = \{(-\alpha,\alpha,-\beta,\beta) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$. $\{V_1 = (-1,1,0,0), V_2 = (0,0,-1,1)\}$ é base para $\mathbb{V}_{-1}$, pois gera $\mathbb{V}_{-1}$ ($(-\alpha,\alpha,-\beta,\beta) = \alpha(-1,1,0,0)+\beta(0,0,-1,1)$) e é L.I.(um vetor não é múltiplo escalar do outro). Sejam $W_1 = V_1$, $W_2 = V_2 - \mathrm{proj}_{W_1}V_2 = V_2 - \bar{0} = V_2$. Sejam $U_1 = (1/||W_1||)W_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0)$ e $U_2 = (1/||W_2||)W_2 = (0,0,-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$. $\{U_1,U_2\}$ é base ortonormal de $\mathbb{V}_{-1}$.

$\mathbb{V}_3 = \{(\alpha,\alpha,\beta,\beta) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$. $\{V_3 = (1,1,0,0), V_4 = (0,0,1,1)\}$ é base para $\mathbb{V}_3$, pois gera $\mathbb{V}_{-1}$ ($(\alpha,\alpha,\beta,\beta) = \alpha(1,1,0,0)+\beta(0,0,1,1)$) e é L.I.(um vetor não é múltiplo escalar do outro). Sejam $W_3 = V_3$, $W_4 = V_4 - \mathrm{proj}_{W_3}V_4 = V_4 - \bar{0} = V_4$. Sejam $U_3 = (1/||W_3||)W_3 = (1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0,0)$ e $U_4 = (1/||W_4||)W_4 = (0,0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$. $\{U_1,U_2\}$ é base ortonormal de $\mathbb{V}_3$. Como a matriz A é simétrica, autovetores associados a autovalores diferentes são ortogonais (Proposição 6.5 na página 271). Portanto, $\{U_1,U_2,U_3,U_4\}$ é uma base ortonormal de autovetores de A.

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(h)
```
>> A=[0,0,0,0;0,0,0,0;0,0,0,1;0,0,1,0];
>> B=A-x*eye(4)
[-x,  0,  0,  0]
[ 0, -x,  0,  0]
[ 0,  0, -x,  1]
[ 0,  0,  1, -x]
>> p=det(B)
p =x^2*(x^2-1)
>> solve(p)
[ 0][ 0][ 1][-1]
```

```
>> B0=subs(B,x,0)
[0, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 1]
[0, 0, 1, 0]
>> escalona(B0)
[0, 0, 1, 0]
[0, 0, 0, 1]
[0, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 0]
```

```
>> Bm1=subs(B,x,-1)
[1, 0, 0, 0]
[0, 1, 0, 0]
[0, 0, 1, 1]
[0, 0, 1, 1]
>> escalona(Bm1)
[1, 0, 0, 0]
[0, 1, 0, 0]
[0, 0, 1, 1]
[0, 0, 0, 0]
```

```
>> B1=subs(B,x,1)
B1 =
[-1,  0,  0,  0]
[ 0, -1,  0,  0]
[ 0,  0, -1,  1]
[ 0,  0,  1, -1]
>> escalona(B1)
[1, 0, 0,  0]
[0, 1, 0,  0]
[0, 0, 1, -1]
[0, 0, 0,  0]
```

$\mathbb{V}_0 = \{(\alpha,\beta,0,0) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$. $\{V_1 = (1,0,0,0), V_2 = (0,1,0,0)\}$ é base para $\mathbb{V}_0$, pois gera $\mathbb{V}_{-1}$ $((\alpha,\beta,0,0) = \alpha(1,0,0,0)+\beta(0,1,0,0))$ e é L.I.(um vetor não é múltiplo escalar do outro). Claramente $V_1 \cdot V_2 = 0$ e possuem norma igual a 1. Sejam $U_1 = V_1$ e $U_2 = V_2$. $\{U_1, U_2\}$ é base ortonormal de $\mathbb{V}_0$.

$\mathbb{V}_1 = \{(0,0,-\alpha,\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\{V_3 = (0,0,-1,1)\}$ é base para $\mathbb{V}_1$, pois gera $\mathbb{V}_1$ $((0,0,-\alpha,\alpha) = \alpha(0,0,-1,1))$ e um vetor não nulo é L.I. Seja $U_3 = (1/||V_3||)V_3 = (0,0,-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$. $\{U_3 = (0,0,-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})\}$ é base ortonormal de $\mathbb{V}_1$.

$\mathbb{V}_{-1} = \{(0,0,\alpha,\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\{V_4 = (0,0,1,1)\}$ é base para $\mathbb{V}_{-1}$, pois gera $\mathbb{V}_{-1}$ $((0,0,\alpha,\alpha) = \alpha(0,0,1,1))$ e um vetor não nulo é L.I. Seja $U_4 = (1/||V_4||)V_4 = (0,0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$. $\{U_4 = (0,0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})\}$ é base ortonormal de $\mathbb{V}_{-1}$.
Como a matriz A é simétrica, autovetores associados a autovalores diferentes são ortogonais (Proposição 6.5 na página 271). Portanto, $\{U_1,U_2,U_3,U_4\}$ é uma base ortonormal de autovetores de A.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

6.3. Aplicação ao Estudo de Cônicas (página 297)

6.3.1.
```
>> A=[9,-2;-2,6];
>> syms x y; X=[x;y];
>> expr=simplify(X.'*A*X-30)
```

$9\,x^2-4\,xy+6\,y^2-30$

```
>> [P,D]=diagonal(A)
```

$$P=\left[\begin{array}{cc}\sqrt{5}/5 & -2\sqrt{5}/5\\ 2\sqrt{5}/5 & \sqrt{5}/5\end{array}\right]$$

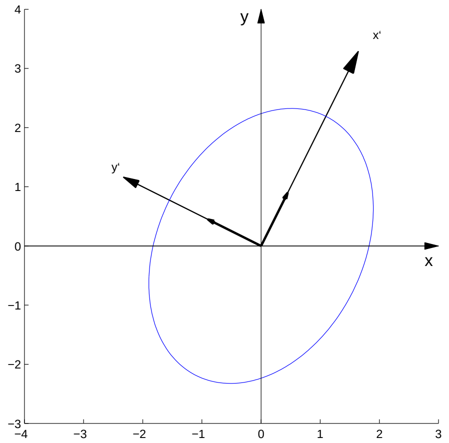
```
D=[5, 0]
  [0,10]
>> syms x1 y1; X1=[x1;y1];
>> expr=subst(expr,X,P*X1)
```

$5\,{x_1}^2+10\,{y_1}^2-30$

```
>> expr=expr/30
```

${x_1}^2/6+{y_1}^2/3-1$

```
>> elipse(sqrt(6),sqrt(3),P)
```



6.3.2.
```
>> A=[3,-4;-4,-12];
>> expr=simplify(X.'*A*X+81)
```

$3\,x^2-8\,xy-12\,y^2+81$

```
>> [P,D]=diagonal(A)
```

$$P=\left[\begin{array}{cc}\sqrt{17}/17 & -4\sqrt{17}/17\\ 4\sqrt{17}/17 & \sqrt{17}/17\end{array}\right]$$

```
D=[-13,0]
  [  0,4]
>> expr=subst(expr,X,P*X1)
```

$-13\,{x_1}^2+4\,{y_1}^2+81$

```
>> expr=expr/81
```

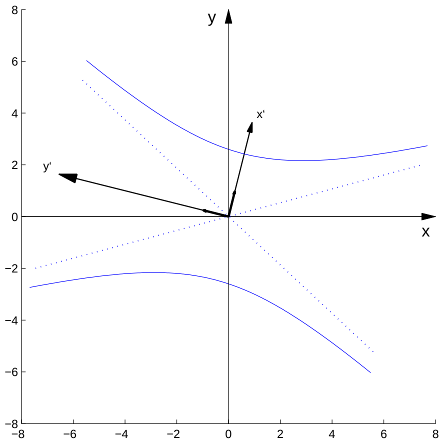
$-\frac{13}{81}\,{x_1}^2+\frac{4}{81}\,{y_1}^2+1$

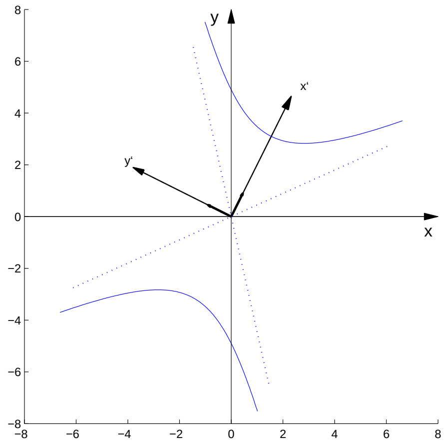
```
>> hiperbx(9/sqrt(13),9/2,P)
```

6.3.3.
```
>> A=[2,-2;-2,-1];
>> expr=simplify(X.'*A*X+K*X+24)
```

$2\,x^2-4\,xy-y^2+24$

```
>> [P,D]=diagonal(A)
```





$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{5}/5 & -2\sqrt{5}/5 \\ 2\sqrt{5}/5 & 1\sqrt{5}/5 \end{bmatrix}$$

```
D =[-2, 0]
   [ 0, 3]
>> expr=subst(expr,X,P*X1)
```

$$-2\,{x_1}^2 + 3\,{y_1}^2 + 24$$

```
>> expr=expr/24
```

$$-{x_1}^2/12 + {y_1}^2/8 + 1$$

```
>> hiperbx(sqrt(12),sqrt(8),P)
```

6.3.4.
```
>> A=[21,3;3,13];
>> expr=simplify(X.'*A*X-132)
```

$$21\,x^2 + 6\,xy + 13\,y^2 - 132$$

```
>> [P,D]=diagonal(A)
```

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 & 3\sqrt{10}/10 \\ -3\sqrt{10}/10 & \sqrt{10}/10 \end{bmatrix}$$

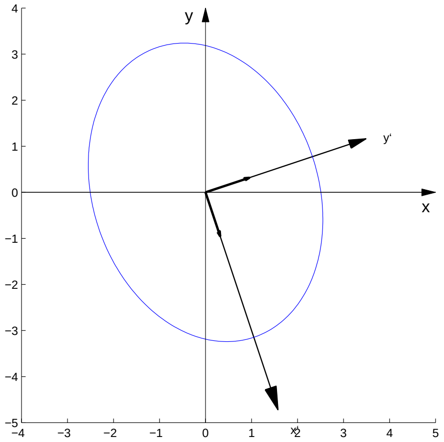
```
D=[12, 0]
  [ 0,22]
>> expr=subst(expr,X,P*X1)
```

$$12\,{x_1}^2 + 22\,{y_1}^2 - 132$$

```
>> expr=expr/132
```

$x_1{}^2/11 + y_1{}^2/6 - 1$

```
>> elipse(sqrt(11),sqrt(6),P)
```



6.3.5.
```
>> A=[4,-10;-10,25];
>> K=[-15,-6];
>> expr=simplify(X.'*A*X+K*X)
```

$4\,x^2 - 20\,xy + 25\,y^2 - 15\,x - 6\,y$

```
>> [P,D]=diagonal(A)
```

$$P = \begin{bmatrix} \frac{5}{29}\sqrt{29} & -\frac{2}{29}\sqrt{29} \\ \frac{2}{29}\sqrt{29} & \frac{5}{29}\sqrt{29} \end{bmatrix}$$

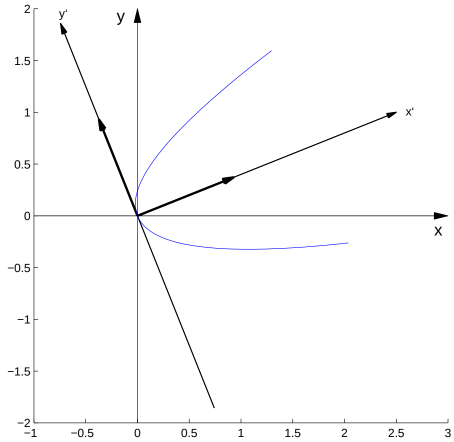
```
D =[0,  0]
   [0, 29]
>> expr=subst(expr,X,P*X1)
```

$29\,y_1{}^2 - 3\,\sqrt{29}x_1$

```
>> expr=expr/29
```

$y_1{}^2 - \frac{3}{29}\,\sqrt{29}x_1$

```
>> parabx(3/(4*sqrt(29)),P)
```



6.3.6.
```
>> A=[9,3;3,1]; K=[-10*10^(1/2),10*10^(1/2)];
>> expr=simplify(X.'*A*X+K*X+90)
```

$9\,x^2 + 6\,xy + y^2 - 10\,\sqrt{10}x + 10\,\sqrt{10}y + 90$

```
>> [P,D]=diagonal(A)
```

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 & 3\sqrt{10}/10 \\ -3\sqrt{10}/10 & \sqrt{10}/10 \end{bmatrix}$$

```
D =[0,  0]
   [0, 10]
>> expr=subst(expr,X,P*X1)
```

$10\,{y_1}^2 - 20\,y_1 - 40\,x_1 + 90$

```
EDU≫ expr=subst(expr,y1,y2+1)
```

$10\,{y_2}^2 + 80 - 40\,x_1$

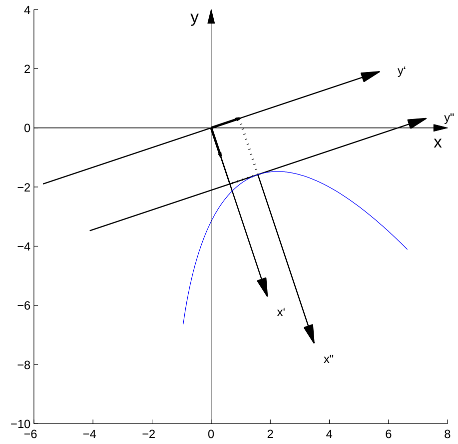
```
>> expr=subst(expr,x1,x2+2)
```

$10\,{y_2}^2 - 40\,x_2$

```
>> expr=expr/10
```

${y_2}^2 - 4\,x_2$

```
>> paraby(1,P,[2;1])
```



6.3.7.

```
>> A=[5,-3;-3,5];
>> K=[-30*(2)^(1/2),18*(2)^(1/2)];
>> expr=simplify(X.'*A*X+K*X+82)
```

$5\,x^2 - 6\,xy + 5\,y^2 - 30\,\sqrt{2}x + 18\,\sqrt{2}y + 82$

```
>> [P,D]=diagonal(A)
```

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

```
D =[2, 0]
   [0, 8]
>> expr=subst(expr,X,P*X1)
```

$2\,{x_1}^2 + 8\,{y_1}^2 - 12\,x_1 + 48\,y_1 + 82$

```
>> X0=[3;-3];
>> expr=subst(expr,X1,X2+X0)
```

$2\,{x_2}^2 - 8 + 8\,{y_2}^2$

```
>> expr=expr/8
```

${x_2}^2/4 - 1 + {y_2}^2$

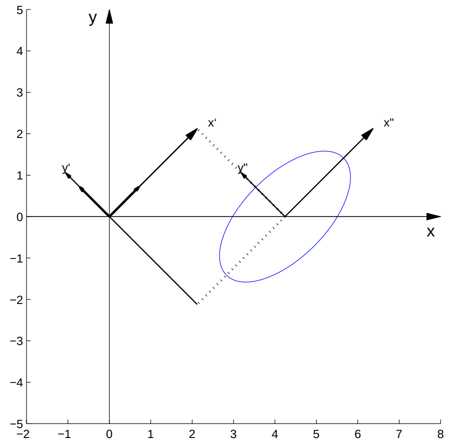
```
>> elipse(2,1,P,X0)
```

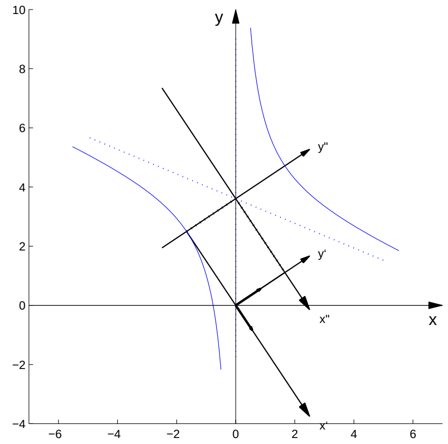
6.3.8.

```
>> A=[5,6;6,0];
>> K=[-12*(13)^(1/2),0];
>> expr=simplify(X.'*A*X+K*X-36)
```

$5\,x^2 + 12\,xy - 12\,\sqrt{13}x - 36$

```
>> [P,D]=diagonal(A)
```





$$P = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \\ -3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} \end{bmatrix}$$

```
D =[-4, 0]
   [ 0, 9]
>> expr=subst(expr,X,P*X1)
```

$$-4\,{x_1}^2 + 9\,{y_1}^2 - 24\,x_1 - 36\,y_1 - 36$$

```
>> X0=[-3;2];
>> expr=subst(expr,X1,X2+X0)
```

$$-4\,{x_2}^2 - 36 + 9\,{y_2}^2$$

```
>> expr=expr/36
```

$$-{x_2}^2/9 - 1 + {y_2}^2/4$$

```
>> hiperby(2,3,P,X0)
```

6.3.9.
```
>> A=[6,-2;-2,9];
>> K=[-4*5^(1/2),-18*5^(1/2)];
>> expr=simplify(X.'*A*X+K*X-5)
```

$$6\,x^2 - 4\,xy + 9\,y^2 - 4\,\sqrt{5}x - 18\,\sqrt{5}y - 5$$

```
>> [P,D]=diagonal(A)
```

$$P = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

```
D =[5,  0]
   [0, 10]
>> expr=subst(expr,X,P*X1)
```

$$5\,{x_1}^2 + 10\,{y_1}^2 - 26\,x_1 - 32\,y_1 - 5$$

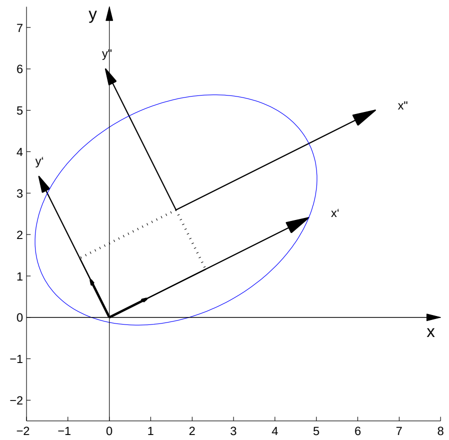
```
>> X0=[26/10;32/20];
>> expr=subst(expr,X1,X2+X0)
```

$5\,{x_2}^2-\frac{322}{5}+10\,{y_2}^2$

```
>> expr=expr*5/322
```

$\frac{25}{322}\,{x_2}^2-1+\frac{25}{161}\,{y_2}^2$

```
>> elipse(sqrt(322)/5,sqrt(161)/5,P,X0)
```



6.3.10.
```
>> A=[1,3^(1/2);3^(1/2),-1];
>> K=[6,0];
>> expr=simplify(X.'*A*X+K*X)
```

$x^2+2\,xy\sqrt{3}-y^2+6\,x$

```
>> [P,D]=diagonal(A)
```

$$P=\left[\begin{array}{cc}\sqrt{3}/2 & -1/2\\ 1/2 & \sqrt{3}/2\end{array}\right]$$

```
D =[ 2, 0]
   [ 0,-2]
>> expr=subst(expr,X,P*X1)
```

$2\,{x_1}^2-2\,{y_1}^2+3\,\sqrt{3}x_1-3\,y_1$

```
>> X0=[-3*3^(1/2)/4;-3/4];
>> expr=subst(expr,X1,X2+X0)
```

$2\,{x_2}^2-9/4-2\,{y_2}^2$

```
>> expr=expr*4/9
```

$\frac{8}{9}\,{x_2}^2-1-\frac{8}{9}\,{y_2}^2$

```
>> hiperbx(3/sqrt(8),3/sqrt(8),P,X0)
```

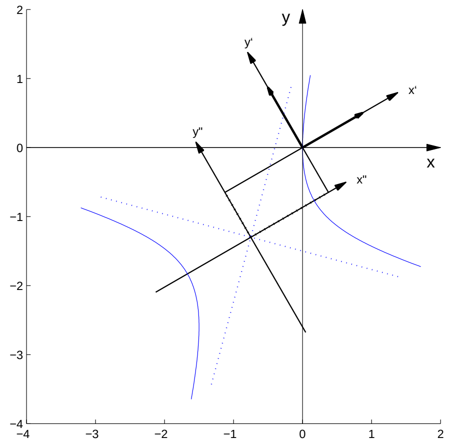
6.3.11.
```
>> A=[8,-8;-8,8];
>> K=[33*2^(1/2),-31*2^(1/2)];
>> expr=simplify(X.'*A*X+K*X+70)
```

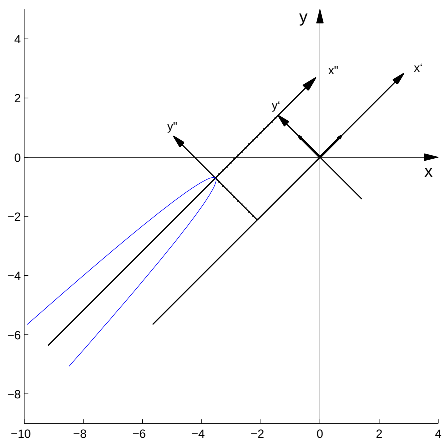
$8\,x^2-16\,xy+8\,y^2+33\,\sqrt{2}x-31\,\sqrt{2}y+70$

```
>> [P,D]=diagonal(A)
```

$$P=\left[\begin{array}{cc}\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{array}\right]$$

```
D =[0,  0]
   [0, 16]
>> expr=subst(expr,X,P*X1)
```





$16\,{y_1}^2 + 2\,x_1 - 64\,y_1 + 70$

```
>> expr=subst(expr,y1,y2+2)
```

$16\,{y_2}^2 + 6 + 2\,x_1$

```
>> expr=subst(expr,x1,x2-3)
```

$16\,{y_2}^2 + 2\,x_2$

```
>> expr=expr/16
```

${y_2}^2 + x_2/8$

```
>> parabx(-1/32,P,[-3;2])
```

6.3.12.
```
>> A=[1,-3;-3,-7];
>> K=[10,2];
>> expr=simplify(X.'*A*X+K*X+9)
```

$x^2 - 6\,xy - 7\,y^2 + 10\,x + 2\,y + 9$

```
>> [P,D]=diagonal(A)
```

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

```
D =[-8,  0]
   [ 0,  2]
>> expr=subst(expr,X,P*X1)
```

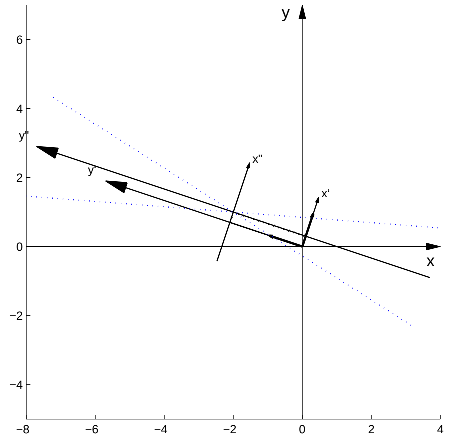
$-8\,{x_1}^2 + 2\,{y_1}^2 + \frac{8}{5}\,\sqrt{10}x_1 - \frac{14}{5}\,\sqrt{10}y_1 + 9$

```
>> X0=[1/10^(1/2);7/10^(1/2)];
>> expr=subst(expr,X1,X2+X0)
```

$-8\,{x_2}^2 + 2\,{y_2}^2$

```
>> hiperby(4,1,P,X0,'d')
```

Esta é uma cônica degenerada. A equação representa as duas retas $y''^2 = 4x''^2$, ou $y'' = \pm 2x''$.



Bibliografia

[1] Howard Anton e Chris Rorres. *Elementary Linear Algebra - Applications Version*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 6a. edição, 1991.

[2] José L. Boldrini, Sueli I. R. Costa, Vera L. Figueiredo, e Henry G. Wetzler. *Álgebra Linear*. Ed. Harbra Ltda., São Paulo, 3a. edição, 1986.

[3] Paulo Boulos e Ivan de C. e Oliveira. *Geometria Analítica - um tratamento vetorial*. Mc Graw-Hill, São Paulo, 2a. edição, 1987.

[4] Frederico F. C., filho. *Introdução ao MATLAB*. Departamento de Ciência da Computação - UFMG, Belo Horizonte, Fevereiro de 2000.

[5] Carlos A. Callioli, Hygino H. Domingues, e Roberto C. F. Costa. *Álgebra Linear e Aplicações*. Atual Editora, São Paulo, 6a. edição, 1995.

[6] Adilson Gonçalves e Rita M. L. de Souza. *Introdução à Álgebra Linear*. Edgard Blücher, Rio de Janeiro, 1977.

[7] Alésio de Caroli, Carlos A. Callioli, e Miguel O. Feitosa. *Matrizes, Vetores, Geometria Analítica*. Nobel, São Paulo, 1976.

[8] João Pitombeira de Carvalho. *Álgebra Linear - Introdução*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 2a. edição, 1977.

[9] Nathan M. dos Santos. *Vetores e Matrizes*. Livros Técnicos e Científicos Ed. S.A., Rio de Janeiro, 3a. edição, 1988.

[10] John B. Fraleigh e Raymond A. Beauregard. *Linear Algebra*. Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 3a. edição, 1995.

[11] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, e Lawrence E. Spence. *Linear Algebra*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 3a. edição, 1997.

[12] G. H. Golub e C. F. Van Loan. *Matrix Computations*. Johns Hopkins U.P., Baltimore, 3a. edição, 1996.

[13] Stanley I. Grossman. *Elementary Linear Algebra*. Saunders College Publishing, New York, 5a. edição, 1994.

[14] David R. Hill e David E. Zitarelli. *Linear Algebra Labs with MATLAB*. Macmillan Publishing Company, New York, 1994.

[15] Morris W. Hirsch e Stephen Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, Inc., New York, 1974.

[16] Kenneth Hoffman e Ray Kunze. *Álgebra Linear*. Livros Técnicos e Científicos Ed. S.A., Rio de Janeiro, 3a. edição, 1979.

[17] Bernard Kolman. *Introdução à Álgebra Linear*. Prentice Hall do Brasil, Rio de Janeiro, 6a. edição, 1998.

[18] Serge Lang. *Introduction to Linear Algebra*. Springer, New York, 2a. edição, 1986.

[19] Serge Lang. *Linear Algebra*. Springer Verlag, New York, 3a. edição, 1987.

[20] David C. Lay. *Linear Algebra and its Applications*. Addison-Wesley, Reading, 2a. edição, 1997.

[21] Steven Leon, Eugene Herman, e Richard Faulkenberry. *ATLAST Computer Exercises for Linear Algebra*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.

[22] Steven J. Leon. *Linear Algebra with Applications*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 5a. edição, 1998.

[23] Emília Giraldes, Vitor H. Fernandes, e Maria P. M Smith. *Curso de Álgebra Linear e Geometria Analítica*. Mc Graw Hill, Lisboa, 1995.

[24] Elon L. Lima. *Coordenadas no Espaço*. SBM, Rio de Janeiro, 1993.

[25] Elon L. Lima. *Álgebra Linear*. IMPA, Rio de Janeiro, 2a. edição, 1996.

[26] Seymour Lipschutz. *Álgebra Linear*. McGraw-Hill, São Paulo, 3a. edição, 1994.

[27] Mathworks Inc. *MATLAB Version 5 for Windows - Student User's Guide*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997.

[28] Ben Noble e James W. Daniel. *Applied Linear Algebra*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 3a. edição, 1988.

[29] Reginaldo J. Santos. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2000.

[30] Shayle R. Searle. *Matrix Algebra Useful for Statistics*. John Wiley and Sons, New York, 1982.

[31] Georgi E. Shilov. *Linear Algebra*. Dover Publications Inc., New York, 1977.

[32] Carl P. Simon and Lawrence Blume. *Mathematics for Economists*. W. W. Norton and Co. Inc., 1994.

[33] Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle. *Geometria Analítica*. Makron Books, São Paulo, 2a. edição, 1987.

[34] Gilbert Strang. *Linear Algebra and its Applications*. Harcourt Brace Jovanovich, Inc., Orlando, 3a. edição, 1988.

[35] Gilbert Strang. *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, 1993.

Índice Alfabético