Rasterização de curvas planas *

Lenimar N. Andrade

12 de maio de 1999

Resumo

Este texto descreve os algoritmos de Bresenham (1977) para rasterização de retas e circunferências. Alguns exemplos simples foram acrescentados. Um esboço para a construção de elipses também é apresentado.

Sumário

1 Introdução

Dado um reticulado do plano e um objeto gráfico planar (por exemplo, uma curva plana) chama-se **rasterização** (*raster graphics*) o processo de determinar uma representação matricial desse objeto.

Representaremos a tela do computador como um reticulado de *pixels* (*pixel* é uma abreviação de *picture element*). Dado um *pixel* de coordenadas (x_P, y_P), seus vizinhos (x_P, y_P+1), (x_P, y_P-1), (x_P+1, y_P), (x_P-1, y_P), (x_P+1, y_P+1), (x_P+1, y_P-1), (x_P-1, y_P+1) e (x_P-1, y_P-1) serão representados pelas letras N, S, L, O, NE, SE, NO e SO (norte, sul, leste, oeste, nordeste, sudeste, noroeste e sudoeste), respectivamente.

Em todo trabalho que envolva cálculo numérico, é desejável que a quantidade de divisões ou multiplicações envolvidas seja a menor possível. Isto porque, em determinados exemplos, se uma adição de inteiros for executada em T segundos, a multiplicação de inteiros é executada em $3,7T$ segundos e a divisão de inteiros em $31,2T$ segundos. O cálculo de funções trigonométricas ou de raízes quadradas, se possível, deve ser evitado.

*Disponível em ftp://mat.ufpb.br/pub/docs/cursos/raster.zip

2 Retas

Seja $F(x,y) = 2(ax + by + c) = 0$ [1] a equação de uma reta r com declividade no intervalo aberto $]0,1[$ com $a > 0$.[2]

Temos que $F(x,y) = 0$ nos pontos da reta, $F(x,y) > 0$ nos pontos (x,y) situados abaixo da reta e $F(x,y) < 0$ nos pontos acima da reta.

Dado um ponto previamente determinado no reticulado $P = (x_P, y_P)$, aproximação de ponto na reta r, o ponto atual a ser marcado será o que esteja a leste ou a nordeste de P. Na figura 1 estão representados esses pontos. Para decidirmos qual o ponto atual a ser escolhido no reticulado, usaremos a variável de decisão $d = F(M)$ onde M é o ponto médio do segmento ligando L a NE. Logo,

$$d = d_0 = F(x_P + 1, y_P + \frac{1}{2}) = 2(a(x_P + 1) + b(y_P + \frac{1}{2}) + c)$$

Se $d > 0$, escolhemos NE como o ponto atual do reticulado; caso contrário escolhemos L como sendo o ponto atual.

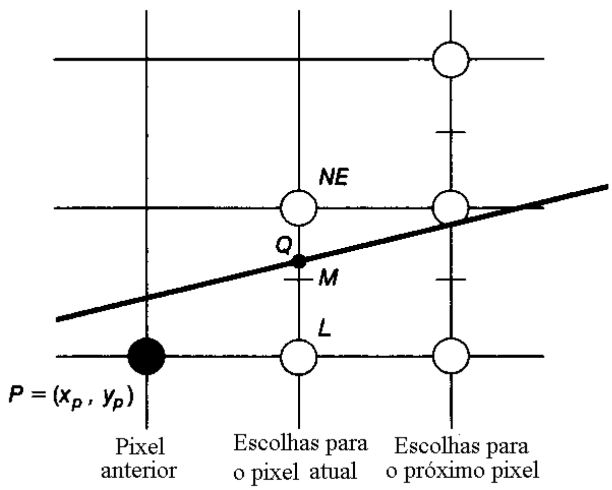

Figura 1: Determinando o pixel atual no reticulado

1º caso – Se L for escolhido como ponto atual, então M é aumentado de uma unidade na direção horizontal. Neste caso, a nova variável de decisão $d = d_1$ vale $d_1 = F(x_P + 2, y_P + \frac{1}{2}) = 2(a(x_P + 2) + b(y_P + \frac{1}{2}) + c)$. Portanto, $\Delta_L = d_1 - d_0 = 2a$. Assim, podemos calcular o valor da nova variável de decisão simplesmente acrescentando Δ_L a d_0, sem precisar calcular $F(M)$ diretamente.

2º caso – Se NE for escolhido como ponto atual, então M é aumentado de 1 unidade nas direções horizontal e vertical. Logo, $d_1 = F(x_P + 2, y_P + \frac{1}{2}) = 2(a(x_P + 2) + b(y_P + \frac{3}{2}) + c)$ de onde obtemos que $\Delta_{NE} = d_1 - d_0 = 2(a + b)$.

[1] O "2" multiplicando é para simplificar alguns cálculos

[2] Os casos em que a reta esteja em outra posição podem ser reduzidos a este por simetria.

Ponto de CD	d	L/NE	Δ	Ponto de AB
$(0,0)$	$d_0 = -1$	L	2	$(0,0)$
$(1,0)$	$d_1 = d_0 + \Delta_L = 1$	NE	-4	$(0,1)$
$(2,1)$	$d_2 = d_1 + \Delta_{NE} = -3$	L	2	$(1,2)$
$(3,1)$	$d_3 = d_2 + \Delta_L = -1$	L	2	$(3,1)$
$(4,1)$	$d_4 = d_3 + \Delta_L = 1$	NE	-4	$(1,4)$
$(5,2)$	$d_5 = d_4 + \Delta_{NE} = -3$	L	2	$(2,5)$
$(6,2)$	$d_6 = d_5 + \Delta_L = -1$	L	2	$(2,6)$
$(7,2)$	$d_7 = d_6 + \Delta_L = 1$	NE	-4	$(2,7)$
$(8,3)$	$d_8 = d_7 + \Delta_{NE} = -3$	L	2	$(3,8)$
$(9,3)$	$d_9 = d_8 + \Delta_L = -1$	L	2	$(3,9)$
$(10,3)$	$d_{10} = d_9 + \Delta_L = 1$	NE	-4	$(3,10)$
$(11,4)$	$d_{11} = d_{10} + \Delta_{NE} = -3$	L	2	$(4,11)$
$(12,4)$	$d_{12} = d_{11} + \Delta_L = -1$	L	2	$(4,12)$

Tabela 1: Exemplo 2.1

Resta agora calcular o primeiro valor de d. Sendo (x_0, y_0) a extremidade esquerda do segmento de reta, temos que $F(x_0, y_0) = 0$. Além disso, o primeiro ponto médio M será igual a $(x_0 + 1, y_0 + \frac{1}{2})$. Logo, o primeiro valor de d será dado por

$$d = F(M) = 2(a(x_0 + 1) + b(y_0 + \frac{1}{2}) + c) = F(x_0, y_0) + (2a + b) = 2a + b.$$

Exemplo 2.1 *Vamos determinar os pontos do segmento de reta AB onde $A = (0,0)$ e $B = (4,12)$.*

Como a inclinação de AB não está no intervalo $]0,1[$, construímos um segmento auxiliar CD, onde $C = (0,0)$ e $D = (12,4)$. Note que neste caso CD é simétrico a AB com relação à reta $y = x$.

A equação de CD é $y = \frac{1}{3}x$. Logo, da equação $F(x,y) = 2(x - 3y) = 0$ obtemos $a = 1$ e $b = -3$. Calculamos inicialmente os valores de Δ_L, Δ_{NE} e d_0:

$$\Delta_L = 2a = 2, \quad \Delta_{NE} = 2(a+b) = -4, \quad d_0 = 2a + b = -1.$$

Veja a tabela 1 para o cálculo dos pontos.

3 Circunferências

Vamos agora determinar um algoritmo que permita obter pontos aproximados para uma circunferência de raio R e centro na origem.[3] Além disso, pela simetria da figura, basta nos preocuparmos com a construção no segundo octante do plano cartesiano, ou seja, para cada ponto (x, y) encontrado na circunferência, obtemos também os pontos (y, x), $(y, -x)$, $(-y, -x)$, etc. (veja figura 2).

[3] Outros casos reduzem-se a este por translação.

Circ.centro $(0,0)$	d	L/SE	Δ	Circ.centro $(15,7)$
$(0,10)$	$d_0 = -\frac{35}{4}$	L	$2 \cdot 0 + 3 = 3$	$(15,17)$
$(1,10)$	$d_1 = d_0 + \Delta_L = -\frac{23}{4}$	L	$2 \cdot 1 + 3 = 5$	$(16,17)$
$(2,10)$	$d_2 = d_1 + \Delta_L = -\frac{3}{4}$	L	$2 \cdot 2 + 3 = 7$	$(17,17)$
$(3,10)$	$d_3 = d_2 + \Delta_L = \frac{25}{4}$	SE	$2 \cdot 3 - 2 \cdot 10 + 5 = -9$	$(18,17)$
$(4,9)$	$d_4 = d_3 + \Delta_{SE} = -\frac{11}{4}$	L	$2 \cdot 4 + 3 = 11$	$(19,16)$
$(5,9)$	$d_5 = d_4 + \Delta_L = \frac{33}{4}$	SE	$2 \cdot 5 - 2 \cdot 9 + 5 = -3$	$(20,16)$
$(6,8)$	$d_6 = d_5 + \Delta_{SE} = \frac{21}{4}$	SE	$2 \cdot 6 - 2 \cdot 8 + 5 = 1$	$(21,15)$
$(7,7)$	$d_7 = d_6 + \Delta_{SE} = \frac{25}{4}$	SE	$2 \cdot 7 - 2 \cdot 7 + 5 = 5$	$(22,14)$

Tabela 2: Exemplo 3.1

Seja $F(x,y) = x^2+y^2-R^2$. Então, $F(x,y) = 0$ se (x,y) estiver na circunferência, $F(x,y) > 0$ se (x,y) estiver no seu exterior e $F(x,y) < 0$ se (x,y) estiver no interior da circunferência,

Dado um ponto $P = (x_P, y_P)$ previamente determinado no reticulado, o ponto atual será o ponto L ou o SE (veja figura 3), dependendo do sinal de

$$d = d_0 = F(M) = F(x_P + 1, y_P - \frac{1}{2}) = (x_P + 1)^2 + (y_P - \frac{1}{2})^2 - R^2.$$

1º caso – Se $d < 0$, então o ponto L é escolhido como ponto atual e, neste caso,

$$d_1 = F(x_P + 2, y_P - \frac{1}{2}) = (x_P + 2)^2 + (y_P - \frac{1}{2})^2 - R^2$$

de onde obtemos que $\Delta_L = d_1 - d_0 = 2x_P + 3$.

2º caso – Se $d \geq 0$, escolhemos SE como ponto atual e, neste caso,

$$d_1 = F(x_P + 2, y_P - \frac{3}{2}) = (x_P + 2)^2 + (y_P - \frac{3}{2})^2 - R^2$$

de onde obtemos que $\Delta_{SE} = d_1 - d_0 = 2x_P - 2y_P + 5$.

O primeiro ponto do reticulado é o $(0,R)$ e o primeiro M é $(1, R - \frac{1}{2})$. Portanto, $d_0 = F(1, R - \frac{1}{2}) = \frac{5}{4} - R$.

Exemplo 3.1 *Determine os pontos situados no segundo octante da circunferência de raio 10 e centro* $(15,7)$.

Neste caso, $d_0 = \frac{5}{4} - 10 = -\frac{35}{4}$. *Para cada pixel* (x,y) *encontrado na circunferência de centro* $(0,0)$, *temos que* $(x+15, y+7)$ *é um pixel na circunferência desejada. Veja o cálculo dos pontos na tabela 2.*

A figura 4 mostra circunferências construídas com o auxílio do algoritmo de Bresenham descrito nesta seção.

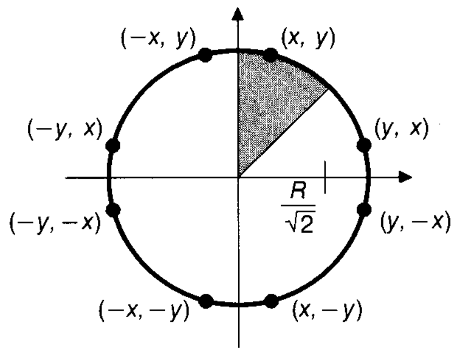

Figura 2: Simetrias em $x^2 + y^2 = R^2$

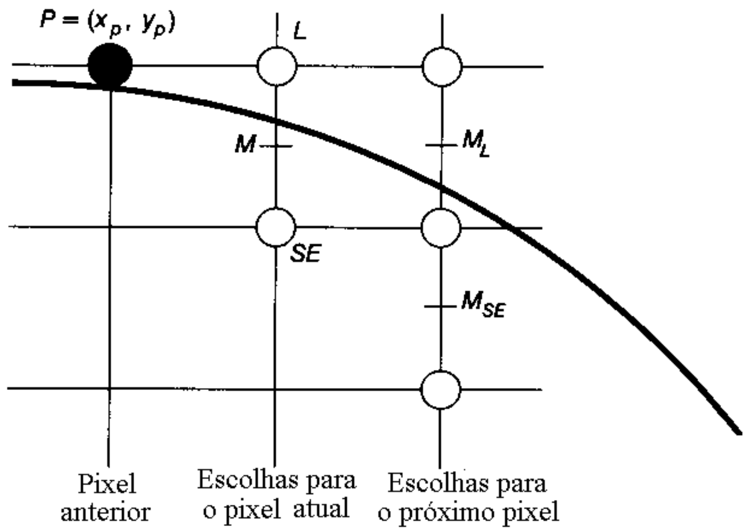

Figura 3: Determinando o pixel atual no reticulado

4 Outras curvas

Além de Bresenham, outros autores como Da Silva (1989), Pitteway (1967), Van Aken (1984), Kappel (1985) apresentaram técnicas para rasterização de outros tipos de curvas.

Curvas mais complexas do que retas ou circunferências, podem exigir separação do algoritmo em casos distintos, cada um aplicado a determinada região do plano.

Sendo $F(x,y) = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ a equação implícita de uma elipse, consideramos duas regiões no primeiro quadrante: uma região 1 na qual a reta tangente à elipse tem inclinação menor do que -1 e uma região 2 na qual a reta tangente tem inclinação maior do que ou igual a -1. Calculamos o gradiente de F

$$\nabla F(x,y) = 2b^2x\vec{i} + 2a^2y\vec{j}$$

de onde podemos deduzir que quando $a^2(y_P - \frac{1}{2}) \leq b^2(x_P + 1)$ passamos da região 1 para a região 2. Veja a figura 5.

Na região 1, o ponto atual a ser escolhido será L ou SE. Neste caso, $\Delta_L = b^2(2x_P + 3)$ e $\Delta_{SE} = b^2(2x_P + 3) + a^2(-2y_P + 2)$. Na região 2, dado um ponto anterior P, o ponto atual será

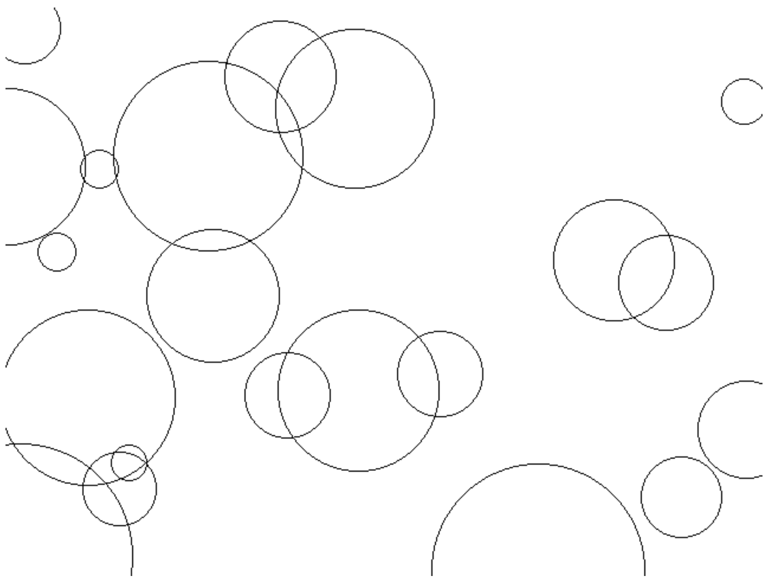

Figura 4: Aplicação do algoritmo de Bresenham

S ou SE.

5 Aplicações

Se conhecermos os pontos da fronteira de um polígono, fica fácil preenchê-lo, ou seja, pintá-lo com uma cor desejada (veja figura 6), basta fazer uma varredura por linhas.

A figura 7 mostra um catenóide construído preenchendo-se pequenos quadriláteros. As retas foram construídas com o algoritmo de Bresenham.

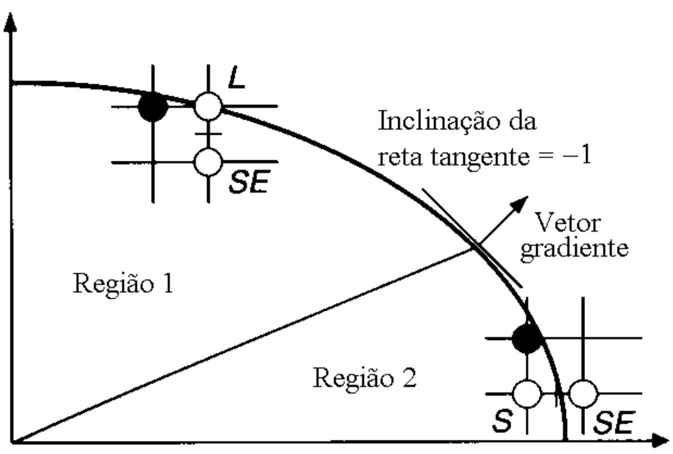

Figura 5: Rasterização de uma elipse

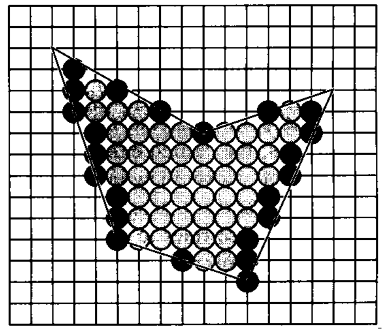

Figura 6: Preenchimento do interior de um polígono

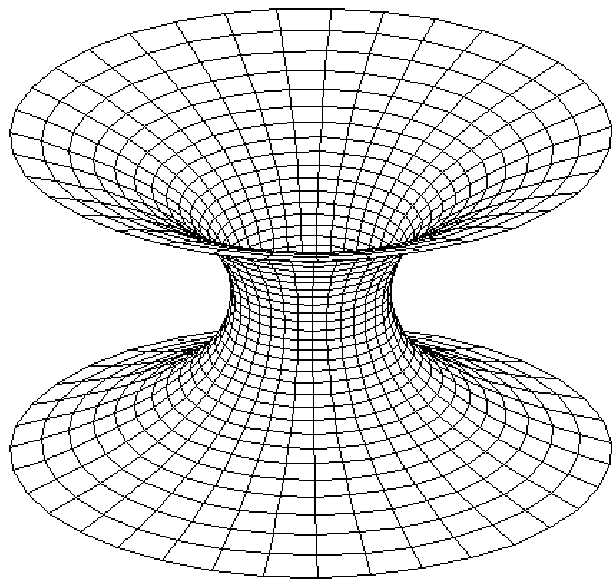

Figura 7: Helicóide construído com pequenos segmentos

Referências

[1] Foley, van Dam, Feiner, Hughes, *Computer Graphics, principles and practice*, Addison-Wesley, 1990.

[2] Plastock & Kalley, *Theory and problems of Computer Graphics*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1986.