Universidade Federal da Paraíba
CCEN - Departamento de matemática
http://www.mat.ufpb.br

1^a Prova: Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

João Pessoa, 15 de agosto de 2023

Prof.: Pedro A. Hinojosa

Nome: ______________________________ Matrícula: ________________

1 (2 pts.) *Seja $ABCD$ um paralelogramo e seja G o ponto de interseção das diagonais. Sabendo que $A = (2, -1, -5), B = (-1, 3, 2)$ e $G = (4, -1, 7)$. Determine os vértices C e D.*

2 (2 pts.) *Dados os pontos $A = (1, 2, 0)$, $B = (1, 2, 3)$ e $C = (-1, -2, 2)$ determine as coordenadas de um ponto D de modo que os pontos A, B, C e D sejam coplanares e o vetor $\overrightarrow{AD}$ seja ortogonal ao vetor $\overrightarrow{AB}$.*

3 (2 pts.) *Sabe-se que o vetor $\overrightarrow{v}$ é ortogonal aos vetores $[1, 1, 0]$ e $[-1, 0, 1]$. Além disso, $||\overrightarrow{v}|| = 2$ e se θ é o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{j}$, então $\cos(\theta) > 0$. Determine o vetor $\overrightarrow{v}$.*

4 (2 pts.) *Calcule o valor de t para que o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\overrightarrow{u} = [0, -1, 2]$, $\overrightarrow{v} = [-4, 2, -1]$ e $\overrightarrow{w} = [3, t, -2]$ seja igual a 33.*

5 (2 pts.) *Considere os vetores $\overrightarrow{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1, 1, 1]$, $\overrightarrow{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1, 0, -1]$ e $\overrightarrow{c} = \frac{1}{\sqrt{6}}[1, -2, 1]$. Verifique que eles formam uma base ortonormal e escreva o vetor $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$.*

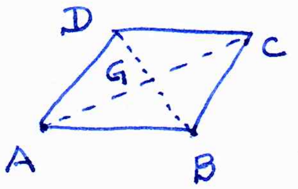
Boa Prova.

CVGA Prova 1 2023.1

(1) ABCD paralelogramo

G pto de interseção das diagonais

$A = (2,-1,-5)$, $B = (-1,3,2)$, $G = (4,-1,7)$



G é pto médio de AC e de BD

Se $C = (x, y, z)$, então $G = \left(\frac{x+2}{2}, \frac{y-1}{2}, \frac{z-5}{2}\right)$

Daí $\frac{x+2}{2} = 4$, $\frac{y-1}{2} = -1$, $\frac{z-5}{2} = 7$

$\therefore$ $\underline{x = 6}$, $\underline{y = -1}$ e $\underline{z = 19}$

$\therefore$ $C = (6,-1,19)$

Analogamente, supondo $D = (r, s, t)$ temos

$G = \left(\frac{r-1}{2}, \frac{s+3}{2}, \frac{t+2}{2}\right)$ $\therefore$ $\frac{r-1}{2} = 4$

$\frac{s+3}{2} = -1$

e $\frac{t+2}{2} = 7$

Daí $\underline{r = 9, \ s = -5 \ , t = 12}$

$\therefore$ $\underline{D = (9,-5,12)}$

(2) $A = (1,2,0)$, $B = (1,2,3)$, $C = (-1,-2,2)$

Determinar D de modo que

A, B, C e D sejam coplanares e $\vec{AD} \perp \vec{AB}$.

Suponha $D = (x,y,z)$.

$\vec{AD} = [x-1, y-2, z]$, $\vec{AB} = [0,0,3]$

$\vec{AD} \perp \vec{AB} \Rightarrow z = 0$

$\therefore \vec{AD} = [x-1, y-2, 0]$

A, B, C, D coplanares $\Leftrightarrow$ $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ e $\vec{AD}$ são l.d.

$\vec{AC} = [-2,-4,2]$.

$$\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD} \text{ l.d.} \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 2 \\ x-1 & y-2 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -6(y-2) + 12(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -6y + 12 + 12x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - y = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 2x$$

Assim, um pto D que verifica as condições é

$D = (1,2,3)$ (obtido com $z=3$, $x=1$)

Neste caso, D = A.

Com $x = 2$, por exemplo, obtemos $D = (2,4,0)$

etc

③ $\vec{v} \perp [1,1,0]$, $\vec{v} \perp [-1,0,1]$, $\|\vec{v}\| = 2$.

$\theta = \measuredangle(\vec{v}, \vec{j})$, $\cos\theta > 0$.

Determinar $\vec{v}$.

=/=

Suponha $\vec{v} = [x, y, z]$

$$\cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{j}}{\|\vec{j}\| \, \|\vec{v}\|} = \frac{y}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} y$$

$$\cos\theta > 0 \implies \boxed{y > 0}$$

$$\vec{v} \perp [1,1,0] \Rightarrow x + y = 0 \longrightarrow y = -x$$

$$\vec{v} \perp [-1,0,1] \Rightarrow -x + z = 0 \longrightarrow z = x$$

$$\|\vec{v}\| = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + (-x)^2 + x^2} = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{3x^2} = 2 \qquad \therefore |x| = 2/\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow |x|\sqrt{3} = 2$$

Note que $x = -y$ e $y > 0$, logo $x < 0$

$$\therefore \boxed{x = -2/\sqrt{3}}$$

Daí $\vec{v} = [x, -x, x] = [-2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}, -2/\sqrt{3}]$

$$\vec{v} = \frac{2}{\sqrt{3}}[-1, 1, -1]$$

4 $\vec{u} = [0,-1,2]$, $\vec{v} = [-4,2,-1]$, $\vec{w} = [3,t,-2]$

volume do paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ igual a 33
Calcular t.

#

V = vol. do paralelepípedo

$$V = |\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}|$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} = -3\vec{i} - 8\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = -9 - 8t + 8$$
$$= -8t - 1$$

$$|\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}| = 33 \Rightarrow |-8t-1| = 33$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8t + 1 = 33 \\ \text{ou} \\ -8t - 1 = 33 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{t = 4 \text{ ou } t = \frac{-17}{4}}$$

Daí $\vec{w} = [3, 4, -2]$ ou $\vec{w} = [3, -\frac{17}{4}, -2]$

(5) $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1,1,1]$, $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1,0,-1]$, $\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{6}}[1,-2,1]$

$\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

i) $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é uma base ortonormal

ii) Escrever $\vec{v}$ como comb. linear de $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}}(1+0-1) = 0 \quad \therefore \quad \vec{a}\perp\vec{b}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{6}}(1-2+1) = 0 \quad \therefore \quad \vec{a}\perp\vec{c}$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{6}}(1+0-1) = 0 \quad \therefore \quad \vec{b}\perp\vec{c}$$

Daí, $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é base ortogonal

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\tfrac{1}{3}(1+1+1)} = \sqrt{3/3} = \sqrt{1} = 1 \qquad \underline{\|\vec{a}\| = 1}$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+0+1)} = \sqrt{2/2} = \sqrt{1} = 1 \qquad \underline{\|\vec{b}\| = 1}$$

$$\|\vec{c}\| = \sqrt{\tfrac{1}{6}(1+4+1)} = \sqrt{6/6} = \sqrt{1} = 1 \qquad \underline{\|\vec{c}\| = 1}$$

$\therefore$ $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é base ortonormal

$$\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

$$x = \vec{v}\cdot\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}(3-2+1) = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad x = 2/\sqrt{3}$$

$$y = \vec{v}\cdot\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(3+0-1) = 2/\sqrt{2} \qquad y = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$z = \vec{v}\cdot\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{6}}(3+4+1) = 8/\sqrt{6} \qquad z = \frac{8}{\sqrt{6}}$$

Assim,

$$\vec{v} = \frac{2}{\sqrt{3}}\vec{a} + \sqrt{2}\,\vec{b} + \frac{8}{\sqrt{6}}\vec{c}$$