CVGA — LISTA 4

(1) $A = (1,2,1)$, $B = (3,0,2)$, $C = (0,3,-1)$ e $D = (2,1,2)$

- A, B, C e D são coplanares
- Eq. cartesiana do plano que os contém.

Solução

A, B, C, D coplanares $\iff$ $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ e $\vec{AD}$ são l.d.

$\vec{AB} = [2,-2,1]$, $\vec{AC} = [-1,1,-2]$, $\vec{AD} = [1,-1,1]$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2+1+4-1-4-2 = 0.$$

$\therefore$ A, B, C e D são coplanares.

Note que A, B e C não são colineares ($\vec{AB} \nparallel \vec{AC}$)

O único plano que contém A, B e C tem que conter também o pto D !! ... (certo?)

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = [3,3,0]$$

$$\pi_{ABC}: \; 3x+3y = 3+3\cdot 2 = 9$$

$$\therefore \quad \pi_{ABC}: \; x+y = 3$$

Claro que $D \in \pi_{ABC}$!

② Eq's paramétricas e cartesiana do plano π.

(a) $A = (1,1,0)$, $B = (1,-1,-1)$, $v = [1,2,0]$

$A, B \in \pi$, $\vec{v} \parallel \pi$.

Solução

$\vec{AB} \parallel \pi$ $(A, B \in \pi)$

$\vec{AB} = [0,-2,-1]$

Eq's paramétricas: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t - 2s \\ z = 0 - s \end{cases}$ $t, s \in \mathbb{R}$

$\vec{AB} \times \vec{v} = [2,-1,2]$

Eq. cartesiana: $2x - y + 2z = 2 - 1 = 1$

$$\boxed{2x - y + 2z = 1}$$

(b) $A = (1,1,0)$, $B = (0,1,0)$, $C = (2,-1,3)$

$A, B, C \in \pi$.

Solução

$\vec{AB} = [-1,0,0]$ $\quad$ $\vec{AB} \times \vec{AC} = [0,3,2]$

$\vec{AC} = [1,-2,3]$

Eq. Param. $\begin{cases} x = 1 - t + s \\ y = 1 - 2s \\ z = 0 + 3s \end{cases}$

Eq. cartesiana: $3y + z = 3$

(c) $A = (-1, 2, -1)$, $\vec{n} = [3, 2, 4]$

$A \in \pi$, $\vec{n} \perp \pi$

Solução

Eq. cartesiana: $3x + 2y + 4z = -3 + 4 - 4 = -3$

$$3x + 2y + 4z = -3$$

Eq's paramétricas:

Precisamos dois vetores l.i. paralelos ao plano π (ortogonais a $\vec{n}$)

$\vec{u} = [-2, 3, 0] \parallel \pi$ $\quad$ $\vec{u} \cdot \vec{n} = -6 + 6 + 0 = 0$ $\therefore \vec{u} \perp \vec{n}$

$\vec{v} = [0, -4, 2] \parallel \pi$ $\quad$ $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 - 8 + 8 = 0$ $\quad \vec{v} \perp \vec{n}$

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ são l.i. De fato, $\vec{u} \nparallel \vec{v}$.

$$\pi : \begin{cases} x = -1 - 2t + 0 \cdot s \\ y = 2 + 3t - 4s \\ z = -1 + 0t + 2s \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

(d) $A = (1, 0, -3)$

$\vec{u} = [1, 2, 3]$ $\quad$ $A \in \pi$

$\vec{v} = [-2, 0, 1]$ $\quad$ $\vec{u} \parallel \pi$ e $\vec{v} \parallel \pi$

Solução

Eq's Paramétricas: $\pi : \begin{cases} x = 1 + t - 2s \\ y = 0 + 2t \\ z = -3 + 3t + s \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$

observe que $\vec{u} \nparallel \vec{v}$

Eq. cartesiana:

$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = [2, -7, 4] \perp \pi.$

$\pi: \quad 2x - 7y + 4z = 2 - 0 - 12 = -10$

$\pi: \ 2x - 7y + 4z = -10$

③ Eq's Paramétricas dos planos abaixo

(a) $\pi: \ 2x - y + 3z = 12$

Solução

$\vec{n} = [2, -1, 3] \perp \pi$

Logo $\vec{u} = [1, 2, 0] \parallel \pi \quad (\vec{u} \cdot \vec{n} = 0)$ e

$\vec{v} = [-3, 0, 2] \parallel \pi \quad (\vec{v} \cdot \vec{n} = 0)$

$A = (0, 0, 4) \in \pi.$

$$\therefore \quad \pi: \begin{cases} x = 0 + t - 3s \\ y = 0 + 2t \\ z = 4 + 2s \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R}$$

(b) $\pi: \ x + y + z = 0$

Solução

$\vec{n} = [1, 1, 1] \perp \pi.$

$\vec{u} = [-1, 1, 0]$

$\vec{v} = [0, -1, 1].$

$\vec{u}, \vec{v} \parallel \pi.$

$A = (1, 1, -2) \in \pi$

$$\pi: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t - s \\ z = -2 + s \end{cases}$$

(c) $\pi: \; 2x - 3y + 4z = 9$

Faça !!

④ $\pi_1 = \pi_2$?

(a) $\pi_1: \begin{cases} x = 2 + \alpha - \frac{1}{2}\beta \\ y = 2 - \alpha + \frac{2}{3}\beta \\ z = 1 + 2\alpha - \beta \end{cases}$ $\qquad \pi_2: \begin{cases} x = 21\alpha - 3\beta \\ y = 1 + \alpha + 4\beta \\ z = 3 - 2\alpha - 6\beta \end{cases}$

Solução

$\vec{u}_1 = [1, -1, 2]$ $\qquad \vec{u}_1 \parallel \pi_1 \,,\; \vec{v}_1 \parallel \pi_1$

$\vec{v}_1 = [-1/2, 2/3, -1]$

$\vec{n}_1 = \vec{u}_1 \times \vec{v}_1 = [-1/3, 0, 1/6]$ $\qquad \vec{n}_1 \perp \pi_1$

$\vec{u}_2 = [21, 1, -2]$

$\vec{v}_2 = [-3, 4, -6]$

$\vec{n}_2 = \vec{u}_2 \times \vec{v}_2 = [2, 132, 84]$ $\qquad \vec{n}_2 \perp \pi_2$

$\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2 \implies \pi_1 \neq \pi_2$

(b) $\pi_1: \begin{cases} x = 1 - \alpha + 2\beta \\ y = 6 + \alpha + 3\beta \\ z = 2 + \alpha - \beta \end{cases}$ $\qquad \pi_2: \begin{cases} x = 3 + 3\alpha - 2\beta \\ y = 9 + 2\alpha - 3\beta \\ z = 1 - 2\alpha + \beta \end{cases}$

Solução

$\vec{u}_1 = [-1, 1, 1]$

$\vec{v}_1 = [2, 3, -1]$

$\vec{n}_1 = \vec{u}_1 \times \vec{v}_1 = [-4, 1, -5]$

$\vec{n}_1 \perp \pi_1$

$\vec{u}_2 = [3, 2, -2]$

$\vec{v}_2 = [-2, -3, 1]$ $\qquad \vec{n}_2 = \vec{u}_2 \times \vec{v}_2 = [-4, 1, -5]$

$n_2 \perp \pi_2$

$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ (De fato, $\vec{n}_1 = \vec{n}_2$)

$\therefore \quad \pi_1 \parallel \pi_2.$

Além disso $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \phi$.

$(1, 6, 2) \in \pi_1$ e fazendo $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ em π_2

obtemos $\begin{cases} x = 3 - 2 = 1 \\ y = 9 - 3 = 6 \\ z = 1 + 1 = 2 \end{cases}$

ou seja, $(1, 6, 2) \in \pi_2$ $\qquad \therefore (1, 6, 2) \in \pi_1 \cap \pi_2$

$\therefore \quad \pi_1 = \pi_2$

5 Eq. cartesiana do plano $\pi : \begin{cases} x = -2 + 2\alpha - \beta \\ y = 3 - 3\alpha + 3\beta \\ z = 1 + \alpha - 2\beta \end{cases}$

Solução

$\vec{u} = [2, -3, 1]$ $\qquad \vec{u}, \vec{v} \parallel \pi$

$\vec{v} = [-1, 3, -2]$

$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} \perp \pi$ $\qquad \vec{n} = [3, 3, 3]$

$A = (-2, 3, 1) \in \pi$

$\therefore \quad \pi : 3x + 3y + 3z = -6 + 9 + 3 = 6$

$\pi : x + y + z = 2$

(6) $\pi_1 : x - y + 2z = 2$, $\pi_2 : 2x - y + 3z = 4$

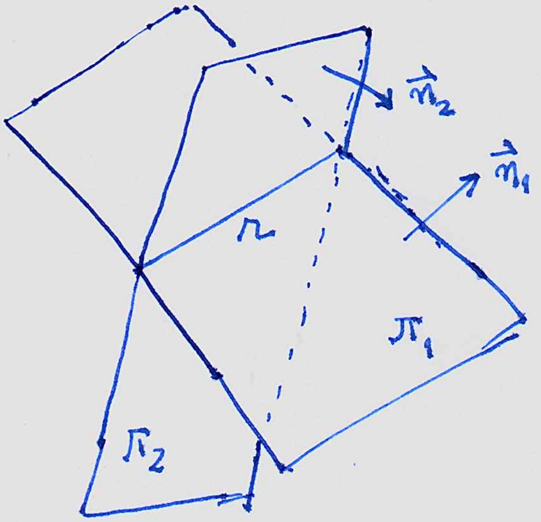
$\pi_1 \cap \pi_2 = ?$

Solução

$\vec{n}_1 = [1, -1, 2] \perp \pi_1$

$\vec{n}_2 = [2, -1, 3] \perp \pi_2$

$\vec{n}_1 \not\parallel \vec{n}_2$ Logo $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \phi$. (De fato $\pi_1 \cap \pi_2$ é uma reta)



$\vec{v} \parallel r$

$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = [-1, 1, 1]$

$A = (2, 0, 0) \in \pi_1 \cap \pi_2 = r$

$\therefore \quad r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 0 + t \\ z = 0 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$