CVGA LISTA 2

① $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$
$\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$
$\vec{w} = -3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são l.i ?

Solução

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = -4 + 9 \cancel{-2} \cancel{-6} \cancel{+2} \cancel{+6} = 5 \neq 0$$

os vetores são l.i.

② $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$
$\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$
$\vec{w} = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

Verificar que $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ formam uma base para $\mathbb{R}^3$.
~~Encontrar~~ Determinar as coord. de $\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ nesta base.

Solução:

Lembre: uma base p/ $\mathbb{R}^3$ é um conj. de 3 vetores l.i ou 3 vetores que geram $\mathbb{R}^3$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = -4 + 1 \cancel{+2} \cancel{-2} \cancel{+2} \cancel{-2} = -3 \neq 0$$

$\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.i. Formam uma base p/ $\mathbb{R}^3$.

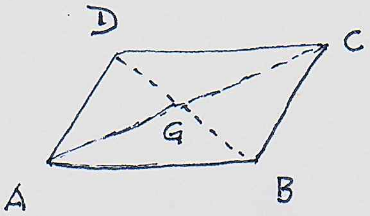
$$\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k} = x(2\vec{i} + \vec{j} - 2k) + y(-\vec{i} + \vec{j} - k) + z(-\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k})$$
$$= (2x - y - z)\vec{i} + (x + y + z)\vec{j} + (-2x - y - 2z)k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x + y + z = -3 \\ -2x - y - 2z = 5 \end{cases}$$

$x = -2/3,\ y = -1/3,\ z = -2$

$\therefore\ \vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k} = \left(\frac{2}{3}\right)\vec{u} + \left(\frac{-1}{3}\right)v - 2\vec{w}$

(3)



ABCD paralelogramo

G pto de interseção das diagonais

$A = (2,-1,-5)$, $B = (-1,3,2)$, $G = (4,-1,7)$

Determinar C e D.

Solução:

$C = (c_1, c_2, c_3)$ G é pto médio de AC

$$\therefore \; G = \left(\frac{c_1+2}{2}, \frac{c_2-1}{2}, \frac{c_3-5}{2} \right)$$

$$\frac{c_1+2}{2} = 4 \Rightarrow \boxed{c_1 = 6} . \quad \frac{c_2-1}{2} = -1 \Rightarrow \boxed{c_2 = -1}$$

$$\frac{c_3-5}{2} = 7 \Rightarrow \boxed{c_3 = 19} \qquad \boxed{C = (6,-1,19)}$$

Analogamente, agora usando que G é o pto médio de BD,

$D = (9,-5,12)$

(4) $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ vetores l.i. em $\mathbb{R}^3$.

$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $\vec{u}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ e $\vec{u}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_3$

$\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ e $\vec{u}_3$ são l.i.?

Solução:

Como $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ formam uma base para $\mathbb{R}^3$, basta verificar se o determinante da matriz cujas colunas são as coord. dos vetores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ e $\vec{u}_3$ ~~nessa~~ na base, é zero ou não.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

Logo $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ e $\vec{u}_3$ são l.i.

(5) Escrever $\vec{v} = [1,-2,5]$ como comb. linear de $\vec{v}_1 = [1,1,1]$, $\vec{v}_2 = [1,2,3]$ e $\vec{v}_3 = [2,-1,1]$

Solução

$$\vec{v} = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 + z\vec{v}_3 \Rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + 2y - z = -2 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} x = -6 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{array}$$

$$\therefore \quad \vec{v} = -6\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3$$

(6) $\{[1,1,1], [0,1,2], [0,0,1], [2,3,4]\}$ não é base de $\mathbb{R}^3$. Pode-se extrair uma base de $\mathbb{R}^3$ desse conj.?

Solução

O conj. contém 4 vetores, logo não é l.i. Não pode ser base de $\mathbb{R}^3$.

Tomemos os 3 primeiros.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Os 3 primeiros vetores formam uma base p/ $\mathbb{R}^3$.

(7) $\vec{u} = [1,1,1]$, $\vec{v} = [-1,1,0]$ e $\vec{w} = [1,0,-1]$

- $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é base p/ $\mathbb{R}^3$
- Coord. de $\vec{a} = [2,1,-2]$ nessa base.

Solução

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1+0+0-1-0-1 = -3 \neq 0$$

os vetores são l.i. e sendo 3 formam uma base p/ $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{a} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 7/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 7/3 \end{array}\right)$$

$$x = 1/3,\ y = 2/3,\ z = 7/3$$

as coord. de $\vec{a}$ na base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ são:

$1/3$, $2/3$ e $7/3$

(8) Determinar x e y sabendo que: $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são l.i.

e $(x-1)\vec{u} + y\vec{v} = y\vec{u} - (x+y)\vec{v}$

Solução

$$(x-1)\vec{u} + y\vec{v} = y\vec{u} - (x+y)\vec{v} \Rightarrow (x-1-y)\vec{u} + (y+x+y)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1-y = 0 \\ y+x+y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x - y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x = 2/3,\ y = -1/3$$

(9) $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$
$\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
$\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\,k$

Determinar uma condição necessária e suficiente sobre x, y, z para que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sejam l.i.

Solução.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \neq 0 \iff z + x - y - z \neq 0$$

$$\iff x - y \neq 0$$

$$\iff x \neq y$$

(10) $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{k}$

a) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é base p/ $\mathbb{R}^3$

b) Coord. do vetor $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3k$ nessa base.

Solução

a) $$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 2 + 0 - 0 - 0 - 0 = 2 \neq 0$$

... etc

b) $$\vec{a} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\dots \Rightarrow x = 1/2,\ y = -3/2,\ z = 3$$ etc

(11) $\vec{u} = [3, 2, 1]$, $\vec{v} = [x-1, x+1, -1]$, $\vec{w} = [x+1, x-1, 1]$

Para que valores de x, $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.d.?

Solução

$$\det\begin{pmatrix} 3 & x-1 & x+1 \\ 2 & x+1 & x-1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3(x+1) - 2(x+1) + (x-1)^2 - (x+1)^2 + 3(x-1) - 2(x-1)$$

$$= x + 1 - 4x + (x-1) = -2x$$

Só p/ $x = 0$ os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.d.