CVGA Lista 1

① verificar que $\vec{BC} - \vec{BA} = \vec{AC}$

Solução

$$\begin{aligned}
\vec{BC} - \vec{BA} &= \vec{BC} + \vec{AB} && (\vec{BA} = -\vec{AB}) \\
&= \vec{AB} + \vec{BC} && (\text{A soma de vetores é comutativa}) \\
&= \vec{AC} && (\text{def. da soma})
\end{aligned}$$

② Os ptos A, B, C são vértices de um triângulo?

(a) $A = (1,2,3)$, $B = (3,-1,0)$, $C = (1,3,5)$

Solução

A, B e C são vértices de um triângulo sse os vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ não são paralelos (ou seja, os ptos A, B e C não são colineares)

$$\vec{AB} = [3-1, -1-2, 0-3] = [2, -3, -3]$$

$$\vec{AC} = [1-3, 3-(-1), 5-0] = [-2, 4, 5]$$

É claro que $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ não são paralelos.

(Não existe $\alpha \in \mathbb{R}$ t.q. $\vec{AB} = \alpha \cdot \vec{AC}$)

(b) $A = (-1,0,-1)$, $B = (1,1,1)$, $C = (2,2,2)$

Solução

$$\vec{AB} = [1-(-1), 1-0, 1-(-1)] = [2, 1, 2]$$

$$\vec{AC} = [2-(-1), 2-0, 2-(-1)] = [3, 2, 3]$$

$\vec{AB} \nparallel \vec{AC}$ $\therefore$ A, B e C são vértices de um triângulo

(3) $P = (3, -1, 2)$, $\vec{v} = [-1, 3, 5]$.

Determinar Q de modo que $\vec{PQ} = -3\vec{v}$

Solução

Seja $Q = (x, y, z)$.

$$\vec{PQ} = [x-3, y-(-1), z-2] = [x-3, y+1, z-2]$$

$$-3\vec{v} = -3 \cdot [-1, 3, 5] = [3, -9, -15]$$

$$\vec{PQ} = -3\vec{v} \Rightarrow \begin{cases} x-3 = 3 \\ y+1 = -9 \\ z-2 = -15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 6, \; y = -10, \; z = -13$$

$$\therefore \quad \underline{Q = (6, -10, -13)}$$

(4) $A = (2, -1, 5)$, $B = (1, 3, 2)$, $C = (6, -1, 2)$, $D = (4, -9, 8)$

(a) A, B, C, D são coplanares?

Sse os vetores $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ e $\vec{AD}$ são l.d.

$$\vec{AB} = [1-2, 3-(-1), 2-5] = [-1, 4, -3]$$

$$\vec{AC} = [6-2, -1-(-1), 2-5] = [4, 0, -3]$$

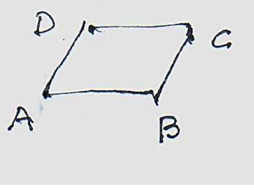
$$\vec{AD} = [4-2, -9-(-1), 8-5] = [2, -8, 3]$$

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & -8 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = 0 - \cancel{24} + 96 + 0 + \cancel{24} - 48 = 48 \neq 0$$

os vetores são l.i.!

os ptos A, B, C, D <u>não</u> são coplanares.

(b) $\square ABCD$ é um paralelogramo?



$\vec{AB} = [-1, 4, -3]$, $\vec{DC} = [2, 8, -6]$

$\vec{AB} \not\parallel \vec{DC}$

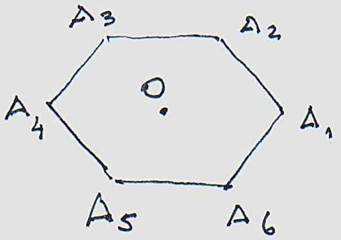
$\therefore$ $\square ABCD$ não é um paralelogramo

(5) $A_1, A_2, \ldots, A_6$ vértices de um hexágono regular com centro no pto O.

(a) calcular

$\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \ldots + \vec{OA_6}$

Solução



Note que

$\vec{OA_1} = -\vec{OA_4}$

$\vec{OA_2} = -OA_5$ (o hexágono é regular)

$OA_3 = -OA_6$

Assim, $\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3} + \vec{OA_4} + \vec{OA_5} + \vec{OA_6} =$

$= -\vec{OA_4} - \vec{OA_5} - \vec{OA_6} + \vec{OA_4} + \vec{OA_5} + \vec{OA_6}$

$= \vec{O}$

(b) $\vec{A_1A_2} + \vec{A_1A_3} + \ldots + \vec{A_1A_6} = 6\,\vec{A_1O}$.

Solução

$\vec{A_1A_2} + \vec{A_1A_3} + \vec{A_1A_4} + \vec{A_1A_5} + \vec{A_1A_6} =$

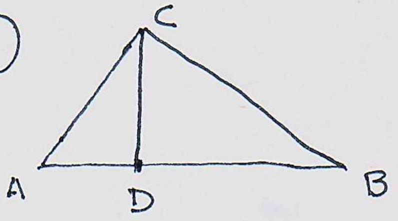
$= (\vec{A_1O} + \vec{OA_2}) + (\vec{A_1O} + \vec{OA_3}) + (\vec{A_1O} + \vec{OA_4}) + (\vec{A_1O} + \vec{OA_5}) +$

$+ \vec{A_1O} + \vec{OA_6}$

$= 5\,\vec{A_1O} + \underbrace{(\vec{OA_2} + OA_3 + \vec{OA_4} + \vec{OA_5} + \vec{OA_6})}_{-\vec{OA_1} \text{ (Parte (a))}}$

$= 5\,\vec{A_1O} - \vec{OA_1} = 5\,\vec{A_1O} + \vec{A_1O} = 6\,\vec{A_1O}$

(6)



Na fig. $\vec{DB} = 3\vec{AD}$.

Escrever $\vec{CD}$ em função de $\vec{AC}$ e $\vec{BC}$.

Solução

$$\vec{CD} = \vec{CA} + \vec{AD}$$
$$= -\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{DB}$$
$$= -\vec{AC} + \frac{1}{3}\left(\vec{DC} + \vec{CB}\right)$$
$$= -\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{DC} + \frac{1}{3}\vec{CB}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{CD} - \frac{1}{3}\vec{DC} = -\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{CB}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{CD} + \frac{1}{3}\vec{CD} = -\vec{AC} - \frac{1}{3}\vec{BC}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{3}\vec{CD} = -\vec{AC} - \frac{1}{3}\vec{BC}$$

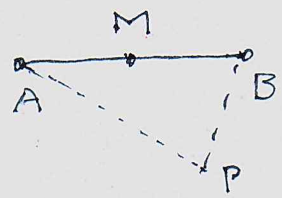
$$\therefore \quad \vec{CD} = -\frac{3}{4}\vec{AC} - \frac{1}{4}\vec{BC}$$

(7) $A \neq B$, M pto médio de $\vec{AB}$. P um pto qq.

Mostrar que $\vec{PA} + \vec{PB} = 2\vec{PM}$

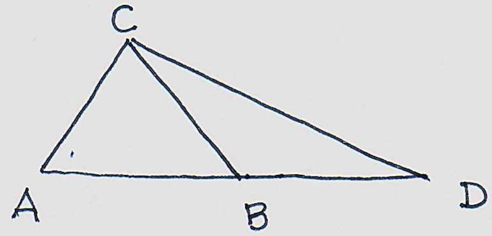
Solução

$$\vec{AM} = \vec{MB} \Rightarrow \vec{MA} = -\vec{MB}$$



$$\vec{PA} + \vec{PB} = \left(\vec{PM} + \vec{MA}\right) + \left(\vec{PM} + \vec{MB}\right)$$
$$= 2\vec{PM} - \vec{MB} + \vec{MB}$$
$$= 2\vec{PM}$$

8



Na figura, $3\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$

Escrever $\overrightarrow{CD}$ em função de $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{CB}$

Solução

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \qquad \left(\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right) \\ &= \overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) \\ &= \frac{5}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$