UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CCEN - Departamento de Matemática
http://www.mat.ufpb.br

Cálculo III - 3^a Prova

João Pessoa, 01 de novembro de 2023
Professor: Pedro A. Hinojosa

Nome: ______________________________ Matrícula: ________________

Questão 1 *(2.5 pts) Use o teorema de Stokes para calcular* $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, *onde*

$$\vec{F} = (y^2+z)\vec{i} + \left(1+e^{y^2}\right)\vec{j} + \left(y + ln(1+z^2)\right)\vec{k}$$

e curva C *está parametrizada por:*

$$\gamma(t) = (2cos(t),\, 2sen(t),\, 4-2sen(t)), \quad t\in[0,2\pi].$$

Observe que C *é a interseção do cilindro* $x^2+y^2=4$ *com o plano* $z=4-y$.

Questão 2 *(2.5 pts.) Calcular* $\int_S rot(\vec{F})\cdot\vec{\mathbf{n}}\,dS$.

$$\vec{F} = (e^x - y)\vec{i} + (xz+y^2)\vec{j} + 2yz\vec{k} \qquad\qquad S: x^2+y^2+z^2-4z=0, \quad z\le 1$$

Questão 3 *(2.5 pts) Sejam* $\vec{F} = (x+zcos(y))\vec{i} + (x-y+z)\vec{j} + (z^4-3a^2)\vec{k}$, $a>0$ *e* $S = S_1\cup S_2$, *onde*

$$S_1: \begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ 0\le z\le\sqrt{a} \end{cases} \qquad\qquad S_2: \begin{cases} x^2+y^2\le a^2 \\ z=0 \end{cases}$$

Sabendo que o fluxo de $\vec{F}$ *através de* S, *de dentro para fora, é igual a* πa^3 *calcule o valor de* a.

Questão 4 *(2.5 pts.) Seja* W *o sólido limitado pelas esferas concêntricas*

$$S_a: x^2+y^2+z^2=a^2 \qquad e \qquad S_b: x^2+y^2+z^2=b^2 \qquad com\ \ a<b$$

e orientação positiva (normal apontando para fora de W*). Calcule o fluxo do campo*

$$\vec{F} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)$$

através de $S = S_a\cup S_b$.

Boa Prova !!

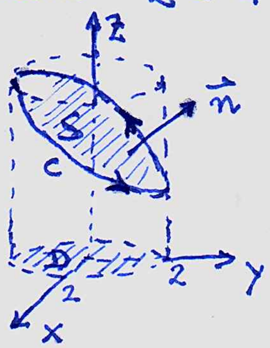
① Use o teor. de Stokes para calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$,

onde
$$\vec{F} = (y^2+z)\vec{i} + (1+e^{y^2})\vec{j} + (y + \ln(1+z^2))\vec{k}$$

C é a curva parametrizada por
$$\gamma(t) = (2\cos t, 2\,\text{sen}\,t, 4-2\,\text{sen}\,t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Solução

C é a curva interseção do cilindro $x^2+y^2=4$ com o plano $z = 4-y$



Seja S a parte do plano $z = 4-y$ limitada por C ($\partial S = C$)

Ou seja,
$$S : \begin{cases} z = 4-y \\ (x,y) \in D : x^2+y^2 \leq 4 \end{cases}$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) \qquad \left(dS = \sqrt{2}\, dx\, dy \right)$$

Stokes: $$\int_{C=\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS$$

$$\text{rot}(\vec{F}) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y^2+z & 1+e^{y^2} & y+\ln(1+z^2) \end{pmatrix}$$

$$= (1-0)\vec{i} - (0-1)\vec{j} + (0-2y)\vec{k}$$

$$= \vec{i} + \vec{j} - 2y\vec{k}$$

$$\int_S \mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS = \int_D (1,1,-2y) \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}(0,1,1) \cdot \cancel{\sqrt{2}}\, dx\,dy$$

$$= \int_D (1-2y)\, dx\,dy$$

$$= \int_D dx\,dy - 2\int_D y\, dx\,dy$$

$$\int_D dx\,dy = \text{área}(D) = 4\pi$$

(*) $\displaystyle\int_D y\, dx\,dy = 0$ ($f(x,y) = y$ é ímpar na variável y e D é simétrico c/r ao eixo x)

$$\therefore \int_S \mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS = 4\pi$$

Daí,

$$\boxed{\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 4\pi}$$

(*) $\displaystyle\int_D y\, dx\,dy = ?$ $\quad D_{r\theta}: \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 2 \end{cases}$ $\quad x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $dx\,dy = r\,d\theta\,dr$

$$\int_D y\, dx\,dy = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r\,\mathrm{sen}\,\theta \cdot r\, d\theta\, dr$$

$$= \int_0^2 -r^2 \cancel{\cos\theta}\Big|_0^{2\pi} dr = 0$$

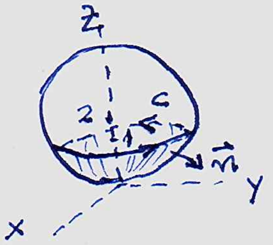
(2) Calcular $\int_S rot(\vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS$

$$\vec{F} = (e^x - y)\vec{i} + (xz + y^2)\vec{j} + 2xz\,\vec{k}$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0 \\ z \leq 1 \end{cases}$$

Solução:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0 \Rightarrow \underline{x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4}$$



$$\partial S = C : \begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$$

$$\int_S rot(\vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS = \int_{\partial S = C} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{(Teor de Stokes)}$$

Parametrizamos C por:

$$\gamma(t) = (\sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}\,\text{sen}\,t, 1), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Temos

$$\gamma'(t) = (-\sqrt{3}\,\text{sen}\,t, \sqrt{3}\cos t, 0)$$

$$F(\gamma(t)) = \left(e^{\sqrt{3}\cos t} - \sqrt{3}\,\text{sen}\,t\right)\vec{i} + \left(\sqrt{3}\cos t + 3\,\text{sen}^2 t\right)\vec{j} + $$
$$+ 2\sqrt{3}\cos t\,\vec{k}$$

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = -\sqrt{3}\,\text{sen}\,t\, e^{\sqrt{3}\cos t} + 3\,\text{sen}^2 t + 3\cos^2 t + 3\sqrt{3}\,\text{sen}^2 t \cos t$$
$$= 3 + 3\sqrt{3}\,\text{sen}^2 t \cos t - \sqrt{3}\,\text{sen}\,t\, e^{\sqrt{3}\cos t}$$

$$\int_{\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi}\left(3 + 3\sqrt{3}\,\text{sen}^2 t\cos t - \sqrt{3}\,\text{sen}\,t\, e^{\sqrt{3}\cos t}\right)dt$$

$$= 6\pi + \cancel{\sqrt{3}\,\text{sen}^3 t\Big|_0^{2\pi}}^{\to 0} + e^{\sqrt{3}\cos t}\Big|_0^{2\pi}$$

$$= 6\pi + \left(e^{\sqrt{3}} - e^{\sqrt{3}}\right) = 6\pi$$

$$\therefore \int_C \vec{F}\cdot dr = 6\pi$$

Daí,

$$\int_S rot(\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS = 6\pi$$

③ $\vec{F} = (x + z\cos y)\vec{i} + (x - y + z)\vec{j} + (z^4 - 3a^2)\vec{k}$

$a > 0$

$S = S_1 \cup S_2$

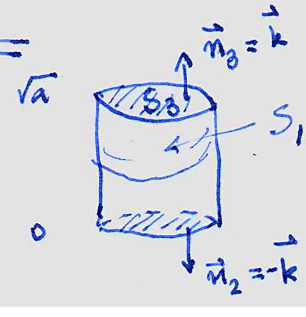
$S_1 : \begin{cases} x^2+y^2 = a^2 \\ 0 \leq z \leq \sqrt{a} \end{cases}$ $\quad S_2 : \begin{cases} x^2+y^2 \leq a^2 \\ z = 0 \end{cases}$

$$\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \pi a^3$$

$\vec{n}$ apontando para fora

$a = ?$

Solução



$S_3 : \begin{cases} x^2+y^2 \leq a^2 \\ z = \sqrt{a} \end{cases}$

Seja W o sólido t.q. $\partial W = S \cup S_3$

Teor da Divergência:

$$\int_{\partial W} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \int_W div(\vec{F})\, dV$$

$$div(F) = 1 - 1 + 4z^3 = 4z^3$$

W em coord. cilíndricas: $W_{r\theta z}: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq z \leq \sqrt{a} \end{cases}$

$$\int_W div(\vec{F})\, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a}} 4z^3 r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^a r \cdot z^4 \Big|_0^{\sqrt{a}} dr$$

$$= 2\pi a^2 \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_0^a = \pi a^4$$

$\therefore$

~~πa^4~~

$$\int_{\partial W} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \int_{S \cup S_3} \cdots = \underbrace{\int_S}_{\pi a^3} + \int_{S_3}$$

$$\|$$

$$\int_W div(\vec{F})\, dV$$

$$\|$$

$$\pi a^4$$

$$\therefore \quad \pi a^4 = \pi a^3 + \int_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{n}_3\, dS$$

$\vec{n}_3 = \vec{k}$

$\vec{F} \cdot \vec{k} = z^4 - 3a^2$.

em S_3, $z = \sqrt{a}$ $\therefore$ $\vec{F} \cdot \vec{k} = a^2 - 3a^2 = -2a^2$

$$\int_{S_3} \vec{F} \cdot n_3 \, dS = \int_{S_3} -2a^2 \, dS = -2a^2 \text{ área}(S_3)$$

$$= -2a^2 \cdot \pi a^2 = -2\pi a^4$$

Daí,

$$\pi a^4 = \pi a^3 - 2\pi a^4$$

$$\Rightarrow \quad 3a^4 - a^3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a^3(3a-1) = 0 \quad \therefore \quad a = 0 \text{ ou } a = 1/3$$

$\underline{a > 0}$!!

$\therefore$ $\underline{a = 1/3}$

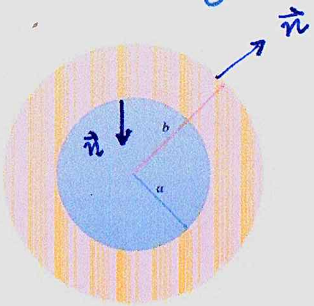
(5) Seja W o sólido limitado pelas esferas concêntricas $S_a : x^2+y^2+z^2 = a^2$ e $S_b : x^2+y^2+z^2 = b^2$, com $a < b$ e orientação positiva (normal apontando para fora de W) Calcule o fluxo do campo

$$\vec{F} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)$$

através de $S = S_a \cup S_b$

Solução:

$$\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = ?$$



Observe que W não contém a origem, de modo que $\vec{F}$ é de classe C^1 em W. Podemos aplicar o Teor de Gauss

$$\underbrace{\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds}_{\int_{S_a} \vec{F}\cdot\vec{n}_a ds + \int_{S_b} \vec{F}\cdot\vec{n}_b ds} = \int_W \operatorname{div}(\vec{F})\, dV$$

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{x^2+y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{x^2+y^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{x^2+y^2+z^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\underbrace{\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\therefore \int_W \operatorname{div}(\vec{F})\, dV = \int_W \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\, dx\,dy\,dz.$$

Em coord. esféricas $\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$ $\quad W: \begin{cases} a \le \rho \le b \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \phi \le \pi \end{cases}$

$$\int_W \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\, dx\,dy\,dz = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{\rho^2}\cdot \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi\, d\theta\, d\rho$$

$$= 2\pi(b-a)\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi\, d\phi = -2\pi(b-a)\cos\phi\Big|_0^{\pi}$$

$$= -2\pi(b-a)(-1-1) = 4\pi(b-a)$$

$$\therefore \int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = 4\pi(b-a)$$