UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CCEN - Departamento de Matemática
http://www.mat.ufpb.br

Cálculo III - 2^a Prova

João Pessoa, 01 de abril de 2024
Professor: Pedro A. Hinojosa

Nome: ______________________________ Matrícula: ________________

Questão 1 *(3.0 pts) Calcule o trabalho realizado pelo campo*

$$\overrightarrow{F} = (x + e^{y^2})\,\overrightarrow{i} + (x^3 + 3xy^2 + 2xye^{y^2})\,\overrightarrow{j}$$

para deslocar uma partícula ao longo da semicircunferência $C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y \geq 0 \end{cases}$ *do ponto* $A = (2, 0)$ *até o ponto* $B = (-2, 0)$.

Questão 2 *(3.0 pts.) Considere o campo*

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = 2xy\,\overrightarrow{i} + (x^2 + zcos(yz))\,\overrightarrow{j} + ycos(yz)\,\overrightarrow{k},$$

definido em $\mathbb{R}^3$.

(a) *Mostre que* $\overrightarrow{F}$ *é um campo conservativo;*

(b) *Determine um potencial para* $\overrightarrow{F}$;

(c) *Calcule* $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ *sendo* C *a curva parametrizada por:*

$$\alpha : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \alpha(t) = (cos(t), sen(t), t)\,.$$

Questão 3 *(3.0 pts) Calcule* $\int_C zdx + ydy - xdz$, *onde* C *é a interseção do plano* $y + z = 8$ *e a esfera* $x^2 + y^2 + z^2 - 8z = 0$, *com* $x \geq 0$, *orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.*

Questão 4 *(1,0 pts.) Seja* $\overrightarrow{F} = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j} + R\overrightarrow{k}$, *um campo vetorial, de classe* C^1, *em* $\mathbb{R}^3$ *e* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *um campo escalar, de classe* C^1. *Verifique que:*

$$div(f\overrightarrow{F}) = fdiv(\overrightarrow{F}) + \nabla f \cdot \overrightarrow{F}$$

Boa Prova !!

C3

Prova 2 01/04/2024

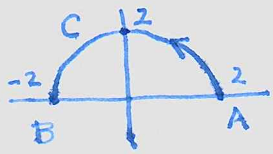
(1) $\vec{F} = (x + e^{y^2})\vec{i} + (x^3 + 3xy^2 + 2xy\,e^{y^2})\vec{j}$

$C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y \geq 0 \end{cases}$ $\quad A = (2,0)$, $B = (-2,0)$

Trabalho realizado por $\vec{F}$ para deslocar uma partícula ao longo de C do pto A até o pto B.

Solução

$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$



Sejam $P = x + e^{y^2}$ e $Q = x^3 + 3xy^2 + 2xy\,e^{y^2}$.

Note que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2 + 2y\,e^{y^2} - 2y\,e^{y^2}$$

$$= 3x^2 + 3y^2 \neq 0$$

Logo $\vec{F}$ não é conservativo.

Por outro lado, calcular a integral diretamente parece complicado (por conta do termo e^{y^2})

Também não podemos aplicar o Teor de Green diretamente (a curva C não limita domínio nenhum)

Entretanto...

Seja C_1 o segmento de reta que liga o pto B ao pto A

$(C_1 : \alpha_1(t) = (t, 0)\ ,\ -2 \leq t \leq 2)$

Consideremos a curva fechada $C \cup C_1$ (orientada no sentido anti-horário) e seja $D \subseteq \mathbb{R}^2$ o domínio t.q. $\partial D = C \cup C_1$.

Pelo Teor. de Green:

$$\int_{C \cup C_1} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

$$= 3 \int_D (x^2+y^2)\,dA$$

Em coord. polares: $D_{r\theta}: \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$

$(dA = r\,dr\,d\theta)$

$$3\int_D (x^2+y^2)\,dA = 3\int_0^{\pi}\int_0^2 r^2 . r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi} \frac{3}{4} r^4 \Big|_0^2 d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{3}{4} . 16\,d\theta = 12\pi$$

Daí

$$\int_C \vec{F} . dr + \int_{C_1} \vec{F} . d\vec{r} = 12\pi$$

$$\therefore \quad W = \int_C \vec{F}\,dr = 12\pi - \int_{C_1} \vec{F} . d\vec{r}$$

$$\int_{C_1} \vec{F} . d\vec{r} = \int_{-2}^{2} (t+1)\,dt = \left(\frac{t^2}{2} + t\right)\Big|_{-2}^{2} = \frac{4}{2} + 2 - \left(\frac{(-4)^2}{2} - 2\right)$$

$$= 2 + 2 - (2-2) = 4$$

Daí $$W = \int_C \vec{F} \cdot dr = 12\pi - 4$$

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot dr = \int_{C_1} P\,dx + \cancel{Q\,dy}^{\,0} \qquad C_1: \alpha(t) = (t, 0),\ -2 \le t \le 2$$

$$= \int_{-2}^{2} (t+1)\,dt$$

$dx = dt$

$dy = 0$

$P = x + e^{y^2}$

$P(\alpha(t)) = t + e^0 = t + 1$

② $$\vec{F} = 2xy\,\vec{i} + (x^2 + z\cos(yz))\,\vec{j} + y\cos(yz)\,\vec{k}$$

(a) $\vec{F}$ é conservativo.

$\vec{F}$ é de classe C^2 e está definido em todo $\mathbb{R}^3$ que é simplesmente conexo. Além disso:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2xy & x^2 + z\cos(yz) & y\cos(yz) \end{pmatrix}$$

$$= \Big(\cos(yz) - yz\,\text{sen}(yz) - (\cos(yz) - yz\,\text{sen}(yz))\Big)\vec{i}$$

$$- (0 - 0)\,\vec{j} + (2x - 2x)\,\vec{k}$$

$$= \vec{0}$$

Logo $\vec{F}$ é conservativo.

(b) Um potencial para $\vec{F}$.

Queremos uma função $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ t.q. $\nabla f = \vec{F}$.

$$f_x = 2xy \Rightarrow f = x^2 y + g(y,z)$$

$$\Rightarrow f_y = x^2 + \frac{\partial g}{\partial y} = x^2 + z\cos(yz)$$

$$\therefore \frac{\partial g}{\partial y} = z\cos(yz)$$

Daí, $g = \operatorname{sen}(yz) + h(z)$

$$\therefore \quad f = x^2 y + \operatorname{sen} yz + h(z)$$

$$\Rightarrow f_z = y\cos(yz) + \frac{dh}{dz} = y\cos(yz)$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dz} = 0 \quad \therefore \quad \underline{h = C = cte}$$

Logo $\underline{f = x^2 y + \operatorname{sen} yz + C}$

(c) Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, C parametrizada por

$$\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t), \quad t \in [0, \pi].$$

O campo $\vec{F}$ é conservativo, então $\int_C \vec{F} \cdot dr$ não dependa da curva C, só dos ptos inicial, $\alpha(0)$, e final, $\alpha(\pi)$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C \nabla f\cdot d\vec{r} = f(\alpha(\pi)) - f(\alpha(0))$$

$$\alpha(\pi) = (-1, 0, \pi) \quad , \quad f(-1,0,\pi) = c$$

$$\alpha(0) = (1, 0, 0) \quad , \quad f(1,0,0) = c$$

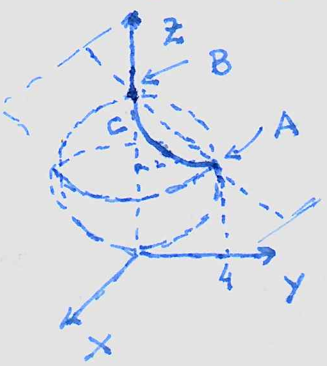
$$\therefore \quad \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

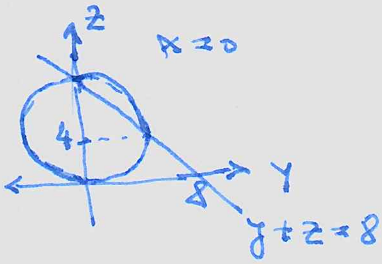
(3) Calcular $\displaystyle\int_C z\,dx + y\,dy - x\,dz$.

$$C: \begin{cases} y + z = 8 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 8z = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

C orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

Solução:





$A = (0, 4, 4)$

$B = (0, 0, 8)$

$$z = 8 - y$$

$$x^2 + y^2 + (8-y)^2 - 8(8-y) = 0$$

$$x^2 + 2y^2 - 16y + 64 - 64 + 8y = 0$$

$$x^2 + 2y^2 - 8y = 0$$

$$x^2 + 2(y-2)^2 = 8$$

$$\frac{x^2}{8} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

$$\left\{ \left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{2}\right)^2 = 1. \right.$$

uma parametrização para C é

$$\gamma: \begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t \\ y = 2 + 2\,\text{sen}\,t \\ z = 6 - 2\,\text{sen}\,t \end{cases} \qquad -\pi/2 \leq t \leq \pi/2 \qquad (z = 8 - y)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 4 \\ z = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow t = \pi/2 \qquad \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow t = -\pi/2$$

$$\left(\begin{array}{l} \cos t = 0 \\ \text{sen}\,t = 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{l} \cos t = 0 \\ \text{sen}\,t = -1 \end{array}\right)$$

$$\gamma': \begin{cases} x' = -2\sqrt{2}\,\text{sen}\,t \\ y' = 2\cos t \\ z' = -2\cos t \end{cases} \qquad \|\gamma'\|^2 = 8\,\text{sen}^2 t + 4\cos^2 t + 4\cos^2 t = 8$$

$$\therefore \|\gamma'\| = 2\sqrt{2}$$

$$\int_C z\,dx + y\,dy - x\,dz = \cancel{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} -8\,\text{sen}\,t\cos t}$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[(6 - 2\,\text{sen}\,t)(-2\sqrt{2}\,\text{sen}\,t) + (2 + 2\,\text{sen}\,t)\,2\cos t - 2\sqrt{2}\cos t(-2\cos t)\right]$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(-12\sqrt{2}\,\text{sen}\,t + 4\sqrt{2}\,\text{sen}^2 t + 4\cos t + 4\,\text{sen}\,t\cos t + 4\sqrt{2}\cos^2 t\right) dt$$

$$\cancel{+4\sqrt{2}\cos^2 t)\,dt}$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(4\sqrt{2} - 12\sqrt{2}\,\text{sen}\,t + 4\cos t + 4\,\text{sen}\,t\cos t\right) dt$$

$$= 4\sqrt{2}\,\pi + \underbrace{12\sqrt{2}\cos t\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}}_{0} + 4\,\text{sen}\,t\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \underbrace{\frac{4}{2}\,\text{sen}^2 t\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}}_{0}$$

$$= 4\sqrt{2}\,\pi + 8$$

(4) $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ Verificar que

$$div(f\vec{F}) = f\,div(\vec{F}) + \nabla f \cdot \vec{F}$$

Solução

$$\begin{aligned} div(f\vec{F}) &= div(fP\vec{i} + fQ\vec{j} + fR\vec{k}) \\ &= (fP)_x + (fQ)_y + (fR)_z \\ &= f_x P + f P_x + f_y Q + f Q_y + f_z R + f R_z \\ &= f(P_x + Q_y + R_z) + f_x P + f_y Q + f_z R \\ &= f\,div(\vec{F}) + \nabla f \cdot \vec{F} \end{aligned}$$