O Teorema de Gauss

DM-UFPB
Cálculo III
Prof. Pedro A. Hinojosa

O teorema de Gauss estabelece uma relação entre uma integral tripla, numa região $W \subseteq \mathbb{R}^3$, com uma integral de superfície na fronteira de W, ∂W.

Teorema de Gauss (ou Teorema da Divergência)

Seja $W \subseteq \mathbb{R}^3$ um sólido com fronteira $\partial W = S$ uma superf. regular orientada por $\vec{n}$ exterior a W. Seja $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ um campo de classe C^1 definido num aberto U que contém W $(W \subseteq U)$. Então

$$\boxed{\iiint_W \operatorname{div}(\vec{F})\, dV = \int_{S=\partial W} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS}$$

Lembre que se $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, então

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

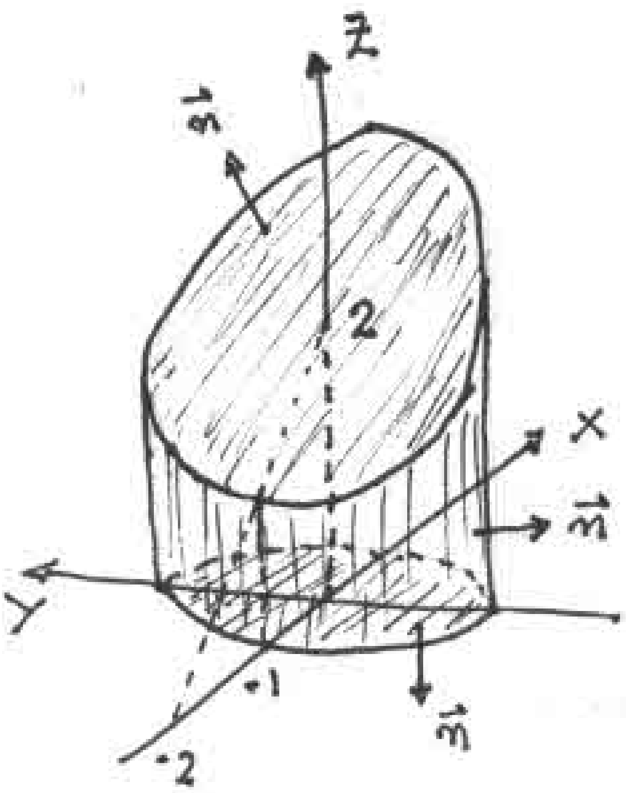
Exemplo 1:

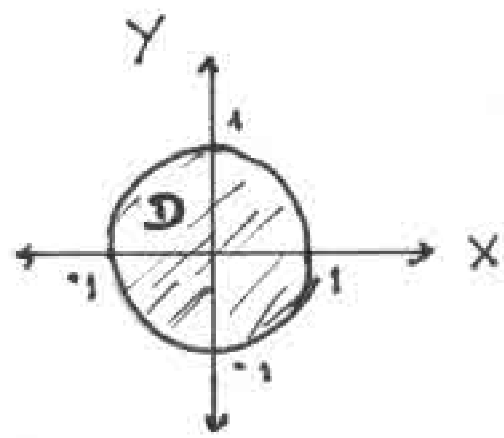
Calcule $\displaystyle\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS$, onde

$\vec{F}(x,y,z) = (x + ye^z)\vec{i} + (y + ze^x)\vec{j} + (z^2 + xe^y)\vec{k}$ e

S é a fronteira do sólido interior ao cilindro $x^2+y^2=1$, entre os planos $z=0$ e $z=x+2$, $\vec{n}$ é a normal exterior a S.

Solução:





Seja W o sólido limitado por S.

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS \overset{\text{Teor. Gauss}}{=} \iiint_W \operatorname{div}\vec{F}\,dV$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = 1 + 1 + 2z = 2(1+z)$$

$$\iiint_W \operatorname{div}\vec{F}\,dV = 2\iint_D \int_0^{x+2}(1+z)\,dz\,dx\,dy = 2\iint_D \left(z+\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^{x+2} dx\,dy$$

$$= 2\iint_D \left[x+2+\frac{(x+2)^2}{2}\right]dx\,dy$$

$$= \iint_D (x^2+6x+8)\,dx\,dy$$

$$= \underbrace{\iint_D x^2\,dx\,dy}_{①} + \underbrace{6\iint_D x\,dx\,dy}_{②} + \underbrace{8\iint_D dx\,dy}_{8\cdot\text{área}(D) = 8\pi}$$

② $\displaystyle\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\cos\theta\cdot r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{3}\operatorname{sen}\theta\Big|_0^{2\pi} = 0$

① $\iint_D x^2\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cos^2\theta\cdot r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos^2\theta\,dr\,d\theta$

$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\operatorname{sen}\theta}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}$

$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(2\pi + 0) - 0 = \pi/4$.

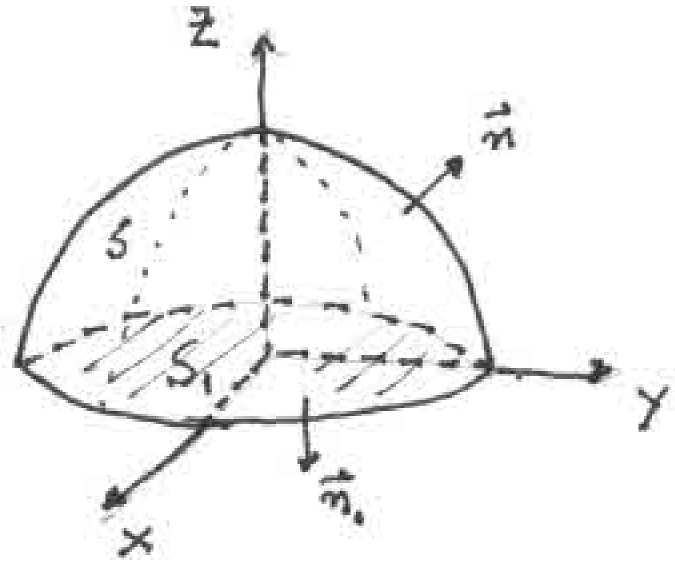
$\therefore \iiint_W \operatorname{div}\vec{F}\,dV = 8\pi + \pi/4 = \frac{33\pi}{4}$

Exemplo 2

Calcule $\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$, onde $\vec{F}(x,y,z) = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$,

S é a superfície $x^2+y^2+z^2 = 1$ com $z \geq 0$ orientada por $\vec{n}$ normal exterior.

Solução



Seja $\tilde{S} = S \cup S_1$, onde $S_1: \begin{cases} z = 0 \\ x^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$ com $\vec{n}_1 = -\vec{k}$

seja W o sólido limitado pela superf. fechada $\tilde{S}$. Então

$\int_{\tilde{S}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS + \int_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{n}_1\,dS$ e por outro lado,

$$\int_{\tilde{S}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \iiint_W \operatorname{div}\vec{F}\,dV$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = 3x^2+3y^2+3z^2 = 3(x^2+y^2+z^2), \text{ logo}$$

$$\iiint_W \operatorname{div}\vec{F}\,dV = 3\iiint_W (x^2+y^2+z^2)\,dV$$

Em coord. esféricas
$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$$

Temos $x^2+y^2+z^2=\rho^2$, $dV = \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

e W nas coord (ρ,ϕ,θ) é dado por

$$W: \begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \phi \le \pi/2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

Então

$$3\iiint_W (x^2+y^2+z^2)\,dV = 3\int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_0^{2\pi} \rho^2\cdot\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\theta\, d\rho\, d\phi$$

$$= 6\pi\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \rho^4 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi = \frac{6\pi}{5}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi\, d\phi$$

$$= \frac{6\pi}{5}\left(-\cos\phi\Big|_0^{\pi/2}\right) = -\frac{6\pi}{5}(0-1) = \underline{6\pi/5}$$

$$\therefore \boxed{\int_{\tilde{S}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = 6\pi/5}$$

Agora $\int_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}_1\,dS = 0$ já que $S_1: \begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2\le 1 \end{cases}$ e

$\vec{F} \cdot \vec{n}_1 = z^3 = 0$ em S_1.

$$\therefore \quad \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = 6\pi/5$$

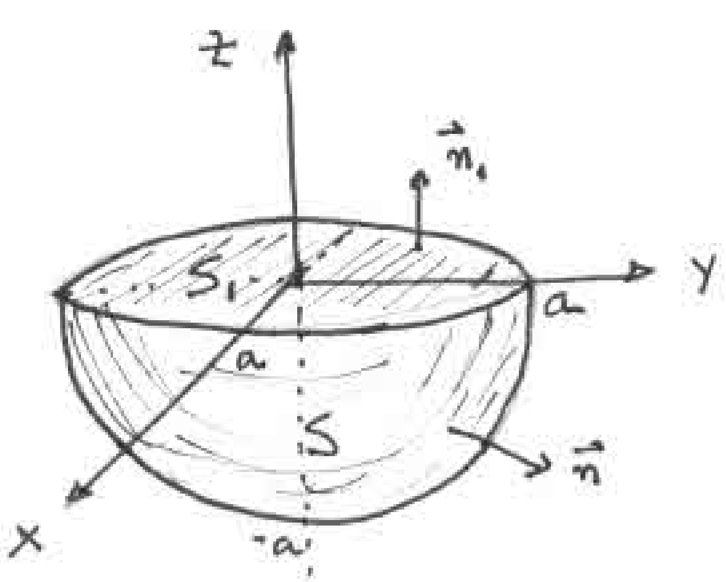
Exemplo 3

Calcule o fluxo do campo $\vec{F}$ através de S, com $\vec{n}$ exterior à superf. "fechada" S; onde,

$\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ e

$$S : \begin{cases} z \leq 0 \\ x^2+y^2+z^2 = a^2 \end{cases}$$

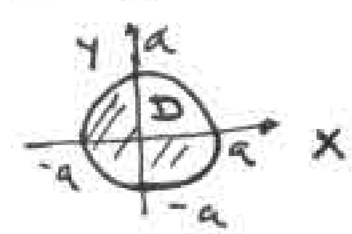
Solução



seja $\tilde{S} = S \cup S_1$, onde

$$S_1 : \begin{cases} z = 0 \\ x^2+y^2 \leq a^2 \end{cases}$$

$S_1 = \{(x,y,0) : (x,y) \in D\}$



$D: \; x^2+y^2 \leq a^2$

seja W o sólido limitado por $\tilde{S}$.

Pelo Teor de Gauss temos:

$$\int_{\tilde{S} = \partial W} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_W \operatorname{div} \vec{F} \, dV.$$

$\operatorname{div} \vec{F} = 1+1+1 = 3$, logo

$$\iiint_W \operatorname{div} \vec{F} \, dV = 3 \iiint_W dV = 3 \operatorname{vol}(W) = 3 \cdot \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi a^3$$

$$\therefore \iiint_W \operatorname{div} \vec{F}\, dV = 2\pi a^3 .$$

Dai $\displaystyle\int_{\tilde{S}} \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = \int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds + \int_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = 2\pi a^3$

$$\int_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = \iint_D (x,y,0)\cdot(0,0,1)\, dx\, dy = 0$$

$$\therefore \boxed{\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = 2\pi a^3}$$