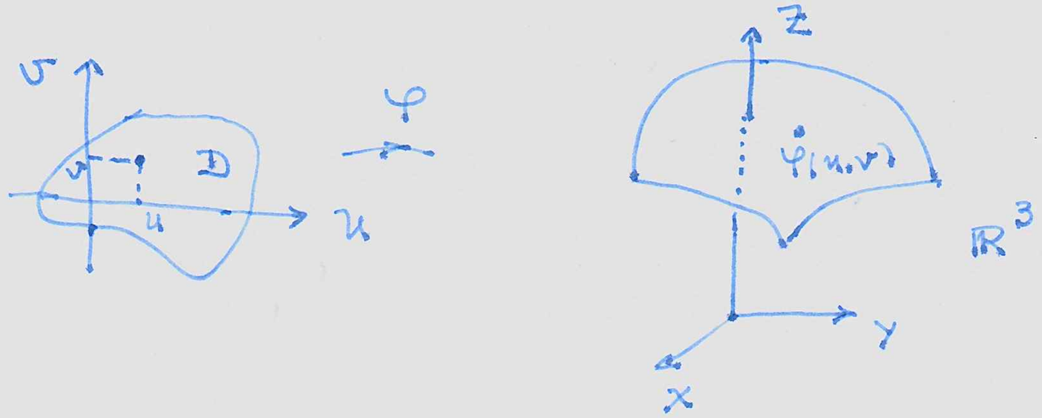
Superfícies Parametrizadas

Def: Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ diz-se uma superfície parametrizada sse existe uma função diferenciável

$$\varphi: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u,v) \longmapsto \varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

tal que $\varphi(D) = S$

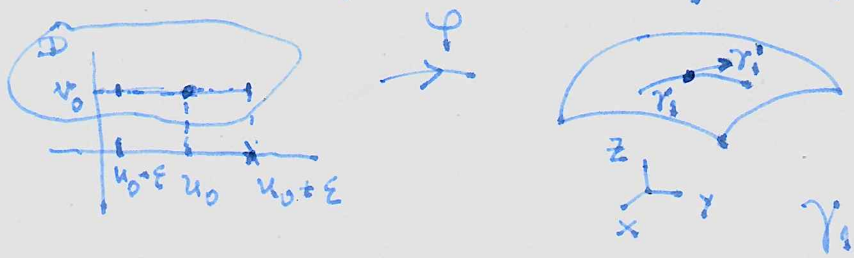


$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$ são as equações paramétricas de S

Dado um pto $(u_0, v_0) \in D$ temos as curvas diferenciáveis

$C_1: \ \gamma_1(u) = \varphi(u, v_0) = (x(u,v_0), y(u,v_0), z(u,v_0))$

definida para $u \in (u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon)$



$$\gamma_1 = \varphi\Big|_{(u_0-\varepsilon, u_0+\varepsilon) \times \{v_0\}}$$

o vetor $\gamma_1'(u_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)$ é tangente à curva C_1 no pto $\varphi(u_0, v_0)$

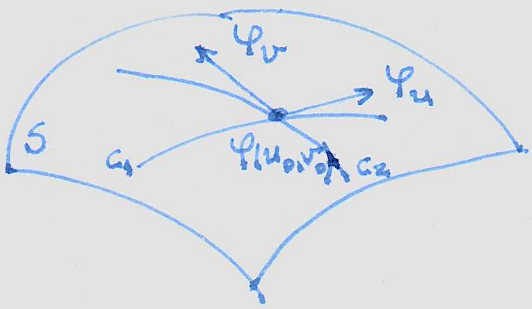
Analogamente temos a curva

C_2: $\gamma_2(v) = \varphi(u_0, v) = \left(x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v)\right)$

$v \in (v_0 - \varepsilon, v_0 + \varepsilon)$

$$\gamma_2 = \varphi\Big|_{\{u_0\} \times (v_0 - \varepsilon_0, v_0 + \varepsilon)}$$

$\gamma_2'(v_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$ é tg à curva C_2 no pto $\varphi(u_0, v_0)$.



$\varphi_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u}$

$\varphi_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}$

Dizemos que a superfície S é regular sse o vetor

$$\vec{N} = \vec{N}(u, v) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \neq \vec{0}$$

para todos $(u, v) \in D$

Se $\vec{N}(u_0, v_0) \neq \vec{0}$, então $\vec{N}(u_0, v_0)$ é um vetor normal a S em $\varphi(u_0, v_0)$ e, neste caso, $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$ é um vetor normal a S que é unitário.

Exemplos

① O Plano.

Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores em $\mathbb{R}^3$ não paralelos (l.i.) e seja S o plano que contém o pto P_0 e é paralelo aos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$

Se $P \in S$ é um pto qualquer, então existem escalares $u, v \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{P_0P} = u\,\vec{a} + v\,\vec{b} \quad \ldots\ldots (*)$$

ou seja, o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é combinação linear dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$

Se $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$,

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $P = (x, y, z)$ então a eq. $(*)$ nos dá

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 u + b_1 v \\ y = y_0 + a_2 u + b_2 v \\ z = z_0 + a_3 u + b_3 v \end{cases}$$

eq's paramétricas do plano S.

$$\left(\varphi(u,v) = (x, y, z) \right)$$

Da geometria analítica sabemos que $\vec{N} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ é um vetor normal ao plano.

② O gráfico de uma função diferenciável

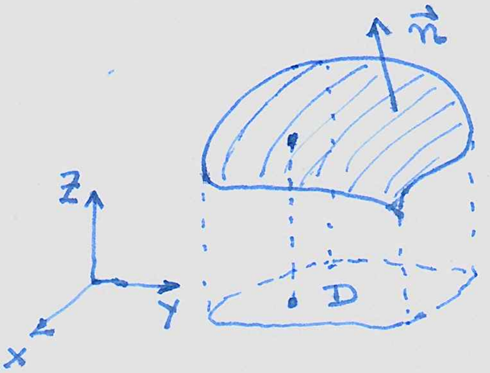
Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = z$$

uma função dif. (de classe C^1)

O gráfico de f é o conj.

$$\text{Graf}(f) = \{(x,y,z) : z = f(x,y),\ (x,y) \in D\}$$



$S : z = f(x,y)$

Uma parametrização (canônica) para $S = \text{Graf}(f)$ é dada por

$$\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \varphi(x,y) = (x, y, f(x,y))$$

Um vetor normal é

$$\vec{N} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (1, 0, f_x) \wedge (0, 1, f_y)$$

$$= (-f_x, -f_y, 1)$$

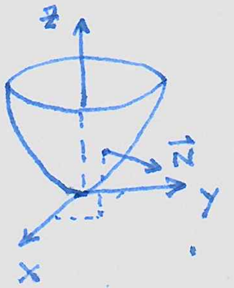
Como $\vec{N} \neq \vec{0}$, $\forall (x,y) \in D$, a superfície $S = \text{Graf}(f)$ é regular.

Casos Particulares

(a) O parabolóide : $z = x^2 + y^2$

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x,y) = (x, y, x^2+y^2)$$

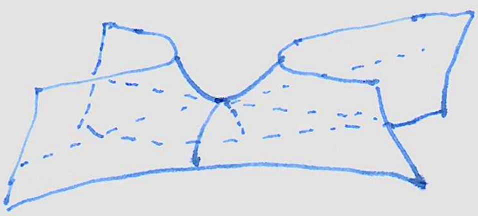


$$\varphi_x = (1, 0, 2x)$$
$$\varphi_y = (0, 1, 2y)$$
$$\vec{N} = \varphi_x \wedge \varphi_y = (-2x, -2y, 1)$$

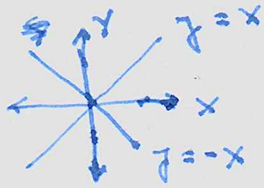
$$f = x^2 + y^2 \Rightarrow \nabla f = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$$
$$\Rightarrow \|\nabla f\|^2 = 4(x^2+y^2)$$

$$\|\vec{N}\| = \sqrt{4x^2+4y^2+1} = \sqrt{1+4(x^2+y^2)}$$
$$= \sqrt{1+\|\nabla f\|^2}$$

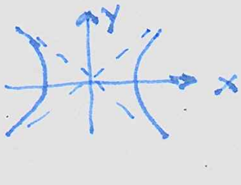
(b) A sela : $z = x^2 - y^2$, $\left(f(x,y) = x^2 - y^2\right)$



$z = 0$

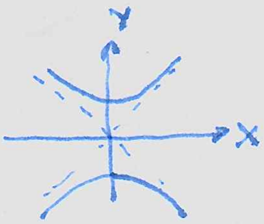


$z = k = \text{cte} > 0$



$x^2 - y^2 = k > 0$

$z = M = \text{cte} < 0$
$x^2 - y^2 = M < 0$
$y^2 - x^2 = -M > 0$



$$\varphi(x,y) = (x, y, x^2 - y^2)$$
$$\vec{N} = (-2x, 2y, 1)$$
$$\|\vec{N}\| = \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}$$

③ Cilindro (circular reto)

$$x^2+y^2=a^2 \ , \quad a\in\mathbb{R}, \ a>0.$$

Parametrizamos o cilindro de raio a com coord. cilíndricas

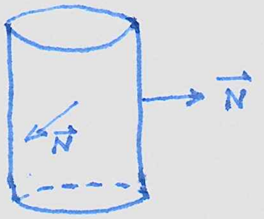
$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

Ou seja,

$$\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\varphi(\theta, z) = (a\cos\theta, a\,\text{sen}\,\theta, z)$$

$$D: \begin{cases} 0 < \theta < 2\pi \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$



observe que, neste domínio D, $\varphi(D)$ deixa a reta $(a, 0, z)$, $z\in\mathbb{R}$, fora do cilindro

$$D: \begin{cases} 0 < a \leq 2\pi \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{ou} \quad D: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Não são abertos em $\mathbb{R}^2$

e se $D: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$ então D não é aberto e além disso φ não é injetiva

$$\vec{N} = \varphi_\theta \wedge \varphi_z = (-a\,\text{sen}\,\theta, a\cos\theta, 0) \wedge (0,0,1)$$

$$= (a\cos\theta, -a\,\text{sen}\,\theta, 0) \ , \quad \|\vec{N}\| = a$$

(4) A Esfera : $x^2+y^2+z^2=a^2$, $a>0$

Usamos coord. esféricas para parametrizar a esfera de raio a

$$\begin{cases} x = a \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y = a \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z = a \cos\phi \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < \phi < \pi \\ 0 < \theta < 2\pi \end{cases}$$

$$\varphi(\phi,\theta) = (x,y,z)$$

$$\vec{N} = \varphi_\phi \wedge \varphi_\theta = \dots$$

$$= (a^2 \operatorname{sen}^2\phi \cos\theta,\ a^2 \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}\theta,\ a^2 \operatorname{sen}\phi \cos\phi)$$

$$\|\vec{N}\| = a^2 \operatorname{sen}\phi$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} = (\operatorname{sen}\phi\cos\theta,\ \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta,\ \cos\phi)$$

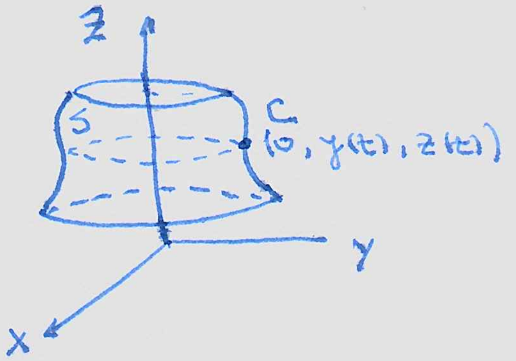
$$= \frac{1}{a}\varphi(\phi,\theta) = \frac{1}{a}(x,y,z)$$

---

(5) Superfícies de Revolução

Considere uma curva C no plano YZ dada por:

$$C : \begin{cases} x = 0 \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} a \leq t \leq b \\ y(t) \geq 0 \ \forall t \end{array}$$



Ao girar o pto $(0, y(t), z(t))$ em torno do eixo Z obtemos uma circunf. de raio $y(t)$, no plano $z = z(t)$, que podemos parametrizar por

$$(y(t)\cos\theta,\ y(t)\,\mathrm{sen}\,t,\ z(t))$$

com $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

Assim, uma parametrização para a superf. de revolução S obtida ao girar a curva C em torno do eixo Z é

$$S: \ \varphi(t,\theta) = (y(t)\cos\theta,\ y(t)\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z(t))$$

$$\text{com} \quad (t,\theta) \in D: \begin{cases} a \leq t \leq b \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\vec{N} = \varphi_t \wedge \varphi_\theta = (y'\cos\theta,\ y'\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z') \wedge (-y\,\mathrm{sen}\,\theta,\ y\cos\theta,\ 0)$$

$$= (-y z'\cos\theta,\ -y z'\,\mathrm{sen}\,\theta,\ y y')$$

$$\left(' = \frac{d}{dt} \right)$$

$$\|\vec{N}\| = y\sqrt{(y')^2 + (z')^2}$$

Parametrizando a curva C pelo comprimento de arco teremos $(y')^2 + (z')^2 = 1$ e $\|\vec{N}\| = y$

Área de superfícies

Seja $\varphi(u,v) = (x,y,z)$, $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$

uma parametrização de uma superfície $S = \varphi(D)$.
Suponha que $D \subseteq \mathbb{R}^2$ é compacto, que φ é de classe C^2 num aberto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ que contém D ($D \subseteq \mathcal{U}$) e suponha também que φ é injetiva, exceto, tal vez na fronteira de D, ∂D, e que $\varphi_u \wedge \varphi_v \neq \vec{0}$ em todos os pontos de D salvo um número finito.
Nestas condições definimos a área de S como:

$$\underbrace{\text{área de } S = A(S) = \int_D \| \varphi_u \wedge \varphi_v \| \, du\, dv}$$

A rigor, temos que verificar que esta def. não depende da parametrização φ, mas isto é ~~exatamente~~ consequência direta do Teor. de mudança de variáveis para integrais duplas.

Exemplos

(1) área da esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$, $a>0$.

usando coord. esféricas: (com $\rho = a$)

$$\varphi: \begin{cases} x = a \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y = a \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z = a\cos\phi \end{cases} \qquad (\phi,\theta)\in D: \begin{cases} 0\le\phi\le\pi \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$$

$(\varphi = \varphi(\phi,\theta))$

$$\varphi_\phi = (a\cos\phi\cos\theta,\ a\cos\phi\operatorname{sen}\theta,\ -a\operatorname{sen}\phi)$$

$$\varphi_\theta = (-a\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta,\ a\operatorname{sen}\phi\cos\theta,\ 0)$$

$$\varphi_\phi \wedge \varphi_\theta = \underset{\nearrow}{\ldots\ldots} = a\operatorname{sen}\phi \cdot \varphi(\phi,\theta)$$

faça a conta !!

$$\|\varphi_\phi\wedge\varphi_\theta\| = |a\operatorname{sen}\phi|\cdot \underbrace{\|\varphi(\phi,\theta)\|}_{\to\, a}$$

$$= a^2|\operatorname{sen}\phi| \qquad (0\le\phi\le\pi \Rightarrow \operatorname{sen}\phi\ge 0)$$

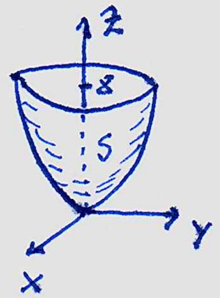
$$= a^2\operatorname{sen}\phi$$

$$A(S) = \int_D a^2\operatorname{sen}\phi\, dA = \int_0^\pi\int_0^{2\pi} a^2\operatorname{sen}\phi\, d\theta\, d\phi$$

$$= 2a^2\pi\int_0^\pi \operatorname{sen}\phi\, d\phi = 2a^2\pi\left(-\cos\phi\Big|_0^\pi\right)$$

$$= 4\pi a^2$$

(2) Área do paraboloide $z = 2(x^2+y^2)$ abaixo do plano $z = 8$



$$S: \quad z = 2(x^2+y^2)$$
$$D: \quad x^2+y^2 \leq 4$$

Em coord. polares

$$D_{r\theta}: \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$A(S) = \int_D \sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{1+16r^2}\, . r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^2 r\sqrt{1+16r^2}\, dr$$

$$= \frac{2\pi}{32}\int_1^{65} \sqrt{u}\, du$$

$u = 1+16r^2$
$du = 32r\,dr$
$r = 0 \Rightarrow u = 1$
$r = 2 \Rightarrow u = 65$

$$= \frac{2}{32}\pi . \frac{2}{3}\, u^{3/2}\Big|_1^{65}$$

$$= \frac{\pi}{24}\left(65\sqrt{65} - 1\right)$$