3. Integrais de Linha

Neste capítulo estudaremos integrais de de campos, escalares e vetoriais, sobre uma curva C.

3.1 Integral de Linha de um Campo Escalar

Dada uma função contínua $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida num aberto $A \subset \mathbb{R}^3$ e uma curva $C \subset A$ queremos definir $\int_C f\,ds$

A função f como definida acima diz-se um **Campo Escalar sobre** $A \subset \mathbb{R}^3$

Seja $\alpha : I = [a,b] \to A \subset \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ uma parametrização da curva C. suponhamos que α é de classe C^1, ou seja, as funções $x, y, z : I :\to \mathbb{R}$ têm derivadas continuas. Seja $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ uma partição do intervalo $[a,b]$ tal que

$$\Delta t = t_j - t_{j-1} = \frac{b-a}{n}, \quad j = 1, 2, ..., n$$

Dessa forma, temos dividido o intervalo $[a,b]$ em n-subintervalos $I_1, I_2, ..., I_n$ todos com o mesmo comprimento Δt. A curva C fica dividida em n sub-arcos $C_1, C_2, ..., C_n$ de comprimentos $\Delta s_1, \Delta s_2, ..., \Delta s_n$; onde $\Delta s_j \simeq \|\alpha'(t_j^*)\|\Delta t$, para algum $t_j^* \in I_j = [t_{j-1}, t_j]$

Consideramos a soma

$$\sum_{j=1}^{n} f\left(\alpha(t_j^*)\right)\Delta s_j = \sum_{j=1}^{n} f\left(\alpha(t_j^*)\right)\|\alpha'(t_j^*)\|\Delta t$$

Se $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \left(\alpha(t_j^*)\right)\|\alpha'(t_j^*)\|\Delta t$ existe e não depende da escolha da partição do intervalo $[a,b]$ nem dos pontos $t_j^* \in I_j$ dizemos que esse número é a integral de linha do campo escalar f sobre a curva α, escrevemos:

$$\int_C f\,ds = \int_C f(x,y,z)ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \left(\alpha(t_j^*)\right)\|\alpha'(t_j^*)\|\Delta t$$

Observações:

(1) Se f é contínua, sabemos que o limite acima existe. Logo,

$$\begin{aligned}\int_C f\,ds &= \int_a^b f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt\\ &= \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.\end{aligned}$$

(2) Se $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é continua e C é uma curva em $A \subset \mathbb{R}^2$ parametrizada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I = [a,b]$ com α de classe C^1, então

$$\begin{aligned}\int_C f\,ds &= \int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt\\ &= \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.\end{aligned}$$

(3) Para $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua e C curva em $A \subset \mathbb{R}^n$ parametrizada por $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$, $t \in I = [a,b]$ de classe C^1, a situação é completamente análoga:

$$\begin{aligned}\int_C f\,ds &= \int_a^b f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt\\ &= \int_a^b f(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))\sqrt{\left(x_1'(t)\right)^2+\left(x_2'(t)\right)^2+...+(x_n'(t))^2}\,dt.\end{aligned}$$

(4) Se $f \equiv 1$, então

$$\int_C f\,ds = \int_c ds = \text{ comprimento de } C.$$

(5) Se a curva C é C^1 por partes, ou seja a parametrização $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ é contínua e existe uma partição do intervalo $[a,b]$, $a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$ de modo que $\alpha|_{(t_{j-1},t_j)} : (t_{j-1}, t_j) \to \mathbb{R}^3$ é de classe C^1, então

$$\int_C f\,ds = \sum_{j=1}^{k} \int_{C_j} f\,ds, \qquad \text{onde} \quad C_j = \alpha\left((t_{j-1}, t_j)\right)$$

(6) Se C^- representa a curva C percorrida no sentido contrário, então

$$\int_{C^-} f\,ds = \int_C f\,ds$$

Ou seja, a integral de linha não depende da orientação da curva C;

(7) A integral de linha não depende da parametrização da curva C.

Exemplo 3.1 Calcular $\int_C f\,ds$, onde C é parametrizada por $\alpha(t) = (t^2, t^3, 0)$ com $t \in [0,1]$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 1 + xyz$.
Solução:

$$\begin{aligned} \int_C f\,ds &= \int_0^1 f(\alpha(t)\|\alpha'(t)\|dt) \\ f(\alpha(t)) &= f(t^2,t^3,0) \;=\; 1 + t^2 \cdot t^3 \cdot 0 \;=\; 1 \\ \alpha'(t) &= (2t,\, 3t^2,\, 0), \qquad \|\alpha'(t)\| \;=\; \sqrt{4t^2 + 9t^4} \;=\; t\sqrt{4 + 9t^2} \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int_C f\,ds &= \int_0^1 t\sqrt{4+9t^2}dt \qquad \begin{cases} u & = \quad 4+9t^2 \\ du & = \quad 18tdt \\ t=0 & \Rightarrow \quad u=4 \\ t=1 & \Rightarrow \quad u=13 \end{cases} \\ &= \int_4^{13} \frac{1}{18}\sqrt{u}du \;=\; \frac{1}{18}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_4^{13} \\ &= \frac{1}{27}\left(13\sqrt{13} - 4\sqrt{4}\right) \;=\; \frac{1}{27}\left(13\sqrt{13} - 8\right). \end{aligned}$$

Exemplo 3.2 Calcular $\int_C f\,ds$, onde C é a hélice parametrizada por $\gamma : [0,4\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (a\cos(t), a\sin(t), at)$ com $a > 0$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, é dada por $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2-a^2}$
Solução:

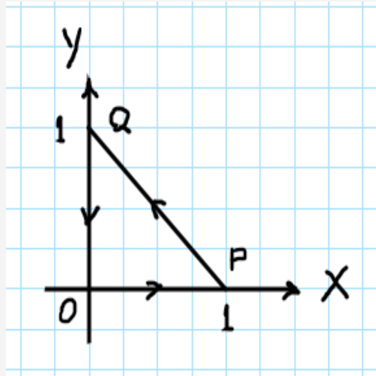
$$f(\gamma(t)) = e^{a^2\cos^2(t)+a^2\sin^2(t)+at-a^2} = e^{at}$$

$$\gamma'(t) = (a\sin(t),\, a\cos(t),\, a), \qquad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{a^2\sin^2(t) + a^2\cos^2(t) + a^2} = a\sqrt{2}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int_c f\,ds &= \int_0^{4\pi} e^{at}\cdot a\sqrt{2}dt \;=\; a\sqrt{2}\cdot\frac{1}{a}e^{at}|_0^{4\pi} \\ &= \sqrt{2}\left(e^{4\pi a} - 1\right). \end{aligned}$$

Exemplo 3.3 Calcular $\int_C (x-y)ds$, onde C é o triângulo de vértices $O = (0,0)$, $P = (1,0)$ e $Q = (0,1)$
Solução:



Vamos pensar $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, onde C_1, C_2 e C_3 são parametrizadas, respectivamente, por: $\alpha_1(t) = (t, 0)$, $\alpha_2(t) = (1-t, t)$ e $\alpha_3(t) = (0, 1-t)$, $t \in [0,1]$. Dessa forma, $\int_C f\,ds = \sum_{i=1}^{3} \int_{C_i} f\,ds$.

$$\alpha_1(t) = (t,0), \quad \alpha_1'(t) = (1,0), \quad \|\alpha'(t)\| = 1 \qquad \int_{C_1}(x-y)ds = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}.$$

$$\alpha_2(t) = (1-t,t), \quad \alpha 2'(t) = (-1,1), \quad \|\alpha_1'(t)\| = \sqrt{2} \qquad \int_{C_2}(x-y)ds = \sqrt{2}\int_0^1 (1-t-t)dt = 0.$$

$$\alpha_3(t) = (0,1-t), \quad \alpha_3'(t) = (0,-1), \quad \|\alpha_2'(t)\| = 1 \qquad \int_{C_3}(x-y)ds = \int_0^1 (-1+t)dt = -\frac{1}{2}.$$

Daí, $\int_C (x-y)ds = \frac{1}{2} + 0 + -\frac{1}{2} = 0$.
Note que a orientação escolhida para o triângulo não interfere no resultado final.

3.2 Aplicações da Integral de linha de Campos Escalares

Suponhamos que a curva $C \subset \mathbb{R}^3$ representa um arame “muito fino”de densidade $f = f(x,y,z)$ no ponto $(x,y,z) \in C$. Então valem as seguintes fórmulas:

(1) **Comprimento do arame** (comprimeno da curva C)

$$L(C) = \int_C ds$$

(2) **Massa do arame**

$$M = \int_C f\,ds$$

(3) **Centro de Massa,** $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, onde

$$\overline{x} = \frac{1}{M}\int_C xf(x,y,z)ds \qquad \overline{y} = \frac{1}{M}\int_C yf(x,y,z)ds \qquad \overline{z} = \frac{1}{M}\int_C zf(x,y,z)ds$$

(4) **Momento de Inércia com relação a uma reta** l

$$I_l = \int_C d^2(x,y,z)\cdot f(x,y,z)ds,$$ onde $d(x,y,z)$ é a distância do ponto $(x,y,z) \in C$ à reta l.

(5) **Valor Médio de f ao Longo de C**

$$\overline{M} = \frac{1}{L(C)} \int_C f\,ds$$

Por exemplo, se f representa a temperatura, a média de temperatura no arame é dada por $\overline{M}$.

Exemplo 3.4 Calcular a massa de um arame fino que tem o formato da hélice $\alpha(t) = (3\cos(t), 3\sin(t), 4t)$, com $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, se a densidade de massa é $f(x,y,z) = \frac{kx}{1+y^2}$, $k \in \mathbb{R}^+$.
Solução:

$$M = \int_C f\,ds = \int_C \frac{kx}{1+y^2} ds = k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\cos(t)}{1+9\sin^2(t)} \cdot 5dt = 5k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\cos(t)}{1+(3\sin(t))^2} dt$$

$$\left(\alpha'(t) = (-3\sin(t, 3\cos(t), 4), \quad \|\alpha'(t)\|^2 = 9\sin^2(t) + 9\cos^2(t) + 16 = 25 \quad \therefore \quad \|\alpha'(t)\| = 5\right)$$

Fazendo: $\begin{cases} u = 3\sin(t) & | \quad t = 0 \Rightarrow u = 0 \\ du = 3\cos(t) & | \quad t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 3 \end{cases}$ Obtemos:

$$M = 5k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\cos(t)}{1+(3\sin(t))^2} dt = 5k\int_0^3 \frac{du}{1+u^2} = 5k\arctan(u)|_0^3 = 5k\arctan(3).$$

3.3 Campos de Vetores

Definição 3.5 Um campo de vetores em $A \subset \mathbb{R}^n$ é uma função $\overrightarrow{F} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Em geral, $A \subset \mathbb{R}^n$ será um subconjunto aberto.

Definição 3.6 Dizemos que o campo de vetores $\overrightarrow{F} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é contínuo, diferenciável, ou de classe C^k no ponto $p \in A$, se todas as suas funções coordenadas $F_i : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são, respectivamente, continuas, diferenciáveis ou de classe C^k em $p \in A$.
$\overrightarrow{F}$ é contínuo, diferenciável, ou de classe C^k em A, se ele é contínuo, diferenciável, ou de classe C^k em todos os pontos de A.

Para o caso particular em que $n = 2$ ou $n = 3$, usaremos as seguintes notações:

n $= 2$

$$\overrightarrow{F} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \overrightarrow{F}(x,y) = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}$$

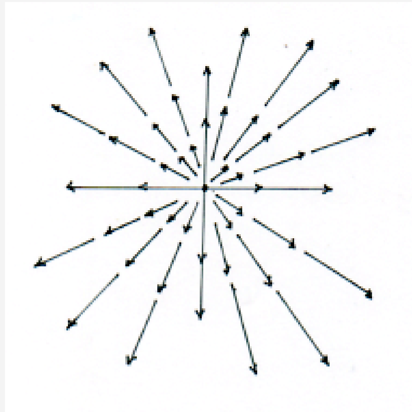
Aqui $\overrightarrow{i}$ e $\overrightarrow{j}$ denotam respectivamente, os vetores $(1,0)$ e $(0,1)$ em $\mathbb{R}^2$.

n $= 3$

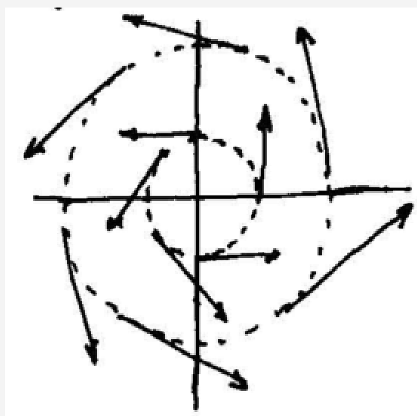
$$\overrightarrow{F} : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \overrightarrow{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\overrightarrow{k}$$

onde, neste caso, $\overrightarrow{i} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$ e $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$.

Exemplo 3.7 O campo $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{F}(x,y) = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$ é representado abaixo



Exemplo 3.8 $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{F}(x,y) = -y\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j}$ tem a seguinte representação geométrica



Exemplo 3.9 O campo $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \frac{k}{\|(x,y,z)\|^3}(x,y,z)$$

$$= \frac{kx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\overrightarrow{i} + \frac{ky}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\overrightarrow{j} + \frac{kz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\overrightarrow{k}$$

é dito *Campo Radial de Quadrado Inverso*, ele não está definido na origem e quanto mais afastado da origem menor é a norma de $\overrightarrow{F}$

$$\|\overrightarrow{F}(x,y,z)\| = \frac{|k|}{x^2+y^2+z^2} = \frac{|k|}{\|(x,y,z)\|^2}$$

A norma de $\overrightarrow{F}$ é inversamente proporcional ao quadrado da distância do ponto (x,y,z) à origem.
O campo elétrico gerado por uma partícula carregada é um campo radial de quadrado inverso. De fato,

Lei de Coulomb: A força entre duas partículas eletricamente carregadas é diretamente proporcional ao módulo de suas cargas e é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas.

A força que atua numa partícula de carga q na posição $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, devido a uma carga Q situada na origem é um campo radial de quadrado inverso, com $k = \epsilon Qq,\ \epsilon > 0$.

Outro campo radial de quadrado inverso aparece quando consideramos a lei de gravitação universal de Newton, esta afirma que se uma partícula fixa de massa m_0 está localizada na origem, então a força exercida sobre uma partícula de massa m localizada no ponto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ é um campo radial de quadrado inverso, com $k = -Gmm_0$, onde G é a constante gravitacional, $\quad G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$.

Exemplo 3.10 Dada uma função escalar diferenciável (Campo Escalar) $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o gradiente de f, ∇f é um campo vetorial chamado Campo Gradiente.
Se $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f = f(x,y,z)$, então $\quad \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$

3.4 Alguns Operadores Diferenciais

Definição 3.11 Seja $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ um campo vetorial definido num aberto $A \subset \mathbb{R}^3$. Definimos:

1. Divergente de $\vec{F}$: É o campo escalar dado por

$$div(\vec{F}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z};$$

2. Rotacional de $\vec{F}$ É o campo vetorial dado por

$$rot(\vec{F}) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Considere o operador diferencial vetorial dado por:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Por exemplo, se f é uma função escalar (ou campo escalar), então

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \qquad \text{é o gradiente de } f.$$

O “produto vetorial”de ∇ com o campo $\vec{F} = P\vec{i} + q\vec{j} + R\vec{k}$ é

$$\nabla \times \vec{F} = det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Ou seja, $\boxed{\nabla \times \overrightarrow{F} = rot(\overrightarrow{F}).}$

O “Produto interno” de ∇ com o campo $\overrightarrow{F}$ é

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla, \overrightarrow{F} \rangle &= \nabla \cdot \overrightarrow{F} = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), (P, q, r) \right\rangle \\
&= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = div(\overrightarrow{F}).
\end{aligned}
$$

Logo $\boxed{div(\overrightarrow{F}) = \left\langle \nabla, \overrightarrow{F} \right\rangle.}$

Exemplo 3.12 Calcular o divergente e o rotacional do campo

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = yz\,\overrightarrow{i} = xz\,\overrightarrow{j} + xy\,\overrightarrow{k}$$

Solução:

$$div(\overrightarrow{F}) = \left\langle \nabla, \overrightarrow{F} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x} yz + \frac{\partial}{\partial y} xz + \frac{\partial}{\partial z} xy = 0$$

$$rot(\overrightarrow{F}) = det \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{pmatrix} = (x - x)\,\overrightarrow{i} + (y - y)\,\overrightarrow{j} + (z - z)\,\overrightarrow{k} = \overrightarrow{O}$$

Se $\overrightarrow{F}(x,y) = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}$, *então* $rot(\overrightarrow{F}) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \overrightarrow{k}$

Exemplo 3.13 Para $\overrightarrow{F}(x,y) = (x\cos(y) + y\cos(x))\,\overrightarrow{i} + (y\sin(x) - x\sin(y))\,\overrightarrow{j}$ temos:

$$rot(\overrightarrow{F}) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \overrightarrow{k} = (y\cos(x) - \sin(y) + x\sin(y) - \cos(x))\,\overrightarrow{k}$$

Exercício 3.1 Sejam f e $\overrightarrow{F}$ de classe C^2. Verifique as seguintes propriedades:

(1) $rot(\nabla f) = \overrightarrow{0}$, ou $\nabla \times (\nabla f) = \overrightarrow{0}$;

(2) $div(rot\,\overrightarrow{F}) = 0$, ou $\langle \nabla, \nabla \times \overrightarrow{F} \rangle = 0$;

(3) $div(\nabla f) = \Delta f$, onde, $\Delta f = \nabla^2 f$ $\left(\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)$;

(4) $\nabla(f \cdot \overrightarrow{F}) = f\langle \nabla, \overrightarrow{F} \rangle + \langle \nabla f, \overrightarrow{F} \rangle$.

3.5 Campos Conservativos

Definição 3.14 Dizemos que o campo vetorial $\overrightarrow{F}: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e um campo conservativo (ou gradiente) se existe uma função escalar $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, de classe C^1, tal que $\nabla f = \overrightarrow{F}$.
A função f é chamada Potencial do Campo $\overrightarrow{F}$.

Exemplo 3.15 O campo $\overrightarrow{F}(x,y,z) = yze^{xyz}\overrightarrow{i} + xze^{xyz}\overrightarrow{j} + xye^{xyz}\overrightarrow{k}$ é conservativo já que para $f(x,y,z) = e^{xyz}$ temos $\nabla f = \overrightarrow{F}$.

Exemplo 3.16 $\overrightarrow{F}(x,y) = \left(2xy,\, x^2 + 3y^2\right)$ é conservativo. De fato, se $f(x,y) = x^2y+y^3+C$, com $C \in \mathbb{R}$ constante, então $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x\;2 + 3y^2$. Logo, $\nabla f = \overrightarrow{F}$.

Proposição 3.17
(1) Para $n = 3$, se $rot(\overrightarrow{F}) \neq \overrightarrow{0}$, então $\overrightarrow{F}$ não é conservativo;
(2) Para $n = 2$, se $\overrightarrow{F} = (P,Q)$ e $\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}$, então $\overrightarrow{F}$ não é conservativo.
Demosnstração:
(1) Se $\overrightarrow{F}$ é um campo conservativo, então $\overrightarrow{F} = \nabla f$ e do Exercício temos $rot(\overrightarrow{F}) = rot(\nabla f) = 0$.
(2) Se $\overrightarrow{F} = (P,Q)$ é conservativo, então $\overrightarrow{F} = \nabla f$ para alguma função C^2. Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q.$$

Daí, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, mas $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Logo, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Ou seja,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y} \implies \overrightarrow{F} \text{ não conservativo.}$$

□

Exemplo 3.18 $\overrightarrow{F}(x,y) = -2y\overrightarrow{i} + 2x\overrightarrow{j}$ não é conservativo. De fato,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2. \quad \text{Logo,} \quad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Note também que,

$$rot(\overrightarrow{F}) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k} = (2-(-2))\overrightarrow{k} = 4\overrightarrow{k} \neq \overrightarrow{0}$$

Exemplo 3.19 $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (2z-3y)\overrightarrow{i} + (3x-z)\overrightarrow{j} + (y-2x)\overrightarrow{k}$ não é conservativo. De fato,

$$rot(\overrightarrow{F}) = det\begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z-3y & 3x-z & y-2x \end{pmatrix} = \cdots = 2\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + 6\overrightarrow{k} \neq \overrightarrow{0}.$$

3.5.1 Determinação do Potencial de um Campo Conservativo

Caso $n = 2$:

Se $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é de classe C^2 e suas funções coordenadas P e Q satisfazem $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$, então $\overrightarrow{F}$ é conservativo. O potencial de F é dado por:

$$f(x,y) = \int P dx + \int \left(Q - \int \frac{\partial Q}{\partial y} dx \right) dy + C$$

Exemplo 3.20 $\overrightarrow{F}(x,y) = (2xy, x^2+3y^2)$.
$\overrightarrow{F}$ está definido em todo $\mathbb{R}^2$. Além disso, $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial P}{\partial y}$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int 2xy dx + \int \left(x^2 + 3y^2 - \int 2x dx \right) dy + C \\ &= x^2y + x^2y + y + 3 - x^2y + C \\ &= x^2y + y^3 + C. \end{aligned}$$

Também podemos proceder como segue-se, queremos encontrar $f(x,y)$ de modo que $\frac{\partial f}{\partial x} = P$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = P = 2xy$. *Integrando com relação a x obtemos $f(x,y) = x^2y + g(y)$, onde g é uma função que depende de y. Daí, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y)$, mas $\frac{\partial f}{\partial y} = Q = x^2 + 3y^2$, logo $x^2 + g'(y) = x^2 + 3y$, daí $g'(y) = 3y^2$, portanto $g(y) = y^3 + C$.*

Assim. $f(x,y) = x^2y + g(y) = x^2y + y^3 + c.$

Caso $n = 3$:

Se $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{F} = (P,Q,R)$, é um campo de classe C^2 e $rot(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{0}$, então $\overrightarrow{F}$ é conservativo. Um potencial para $\overrightarrow{F}$ é dado por

$$f(x,y,z) = M(x,y,z) + N(x,y,z) + L(x,y,z) + C$$

onde,

$$
\begin{aligned}
M(x,y,z) &= \int P dx; \\
N(x,y,z) &= \int \left(Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P dx\right) dy \;=\; \int \left(Q - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dy; \\
L(x,y,z) &= \int \left(R - \frac{\partial}{\partial z}(M+N)\right) dz
\end{aligned}
$$

Exemplo 3.21 $\overrightarrow{F}(x,y,z) = y^2\cos(x)\overrightarrow{i} + \left(2y\sin(x) + e^{2z}\right)\overrightarrow{j} + 2ye^{2z}\overrightarrow{k}$.
$\overrightarrow{F}$ está definido em todo $\mathbb{R}^3$ e

$$
\begin{aligned}
rot(\overrightarrow{F}) &= det\begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2\cos(x) & 2y\sin(x)+e^{2z} & 2ye^{2z} \end{pmatrix} \\
&= (2e^{2z} - 2e^{2z})\overrightarrow{i} + (0-0)\overrightarrow{j} + (2y\cos(x) - 2y\cos(x))\overrightarrow{k} \;=\; \overrightarrow{0}.
\end{aligned}
$$

Logo $\overrightarrow{F}$ é conservativo.

$$M = \int y^2\cos(x)dx = y^2\sin(x) \qquad \boxed{M = y^2\sin(x)}$$

$$N = \int \left(2y\sin(x) + e^{2z} - 2y\sin(x)\right)dy \;=\; \int e^{2z}dy \;=\; ye^{2z} \qquad \boxed{N = ye^{2z}}$$

$$L = \int \left(2ye^{2z} - (0 + 2ye^{2z})\right)dz \;=\; 0 \qquad \boxed{L = 0}$$

Assim, o potencial de $\overrightarrow{F}$ é $\quad f(x,y,z) = y^2\sin(x) + ye^{2z} + C$.

Também podemos fazer o seguinte:
Queremos $f(x,y,z)$ *tal que* $\nabla f = \overrightarrow{F} = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j} + R\overrightarrow{k}$, *então* $\frac{\partial f}{\partial x} = P$, $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ *e* $\frac{\partial f}{\partial z} = R$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} = P = y^2\cos(x) \quad &\Longrightarrow \quad f = y^2\sin(x) + g(y,z) \\
&\Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y\sin(x) + \frac{\partial g}{\partial y} = Q = 2y\sin(x) + e^{2z} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial y} = e^{2z} \\
&\Longrightarrow \quad g = ye^{2z} + h(z)
\end{aligned}
$$

Daí, $\quad f = y^2\sin(x) + ye^{2z} + h(z)$, *donde* $\frac{\partial f}{\partial z} = 2ye^{2z} + \frac{dh}{dz} = R = 2ye^{2z}$.
Portanto, $\frac{dh}{dz} = 0$ *e logo,* $h = C = cte$. *Assim,* $\quad f = y^2\sin(x) + ye^{2z} + C$.

3.6 Integral de Linha de um Campo Vetorial

Suponha que uma partícula se move ao longo de uma curva C, sob a ação de um campo de forças $\overrightarrow{F}$. Qual é o trabalho realizado pela força $\overrightarrow{F}$, quando a partícula se desloca de um ponto $A \in C$ até um ponto $B \in C$?

Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ uma parametrização de C e suponha que $\overrightarrow{F}(x,y) = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}$.

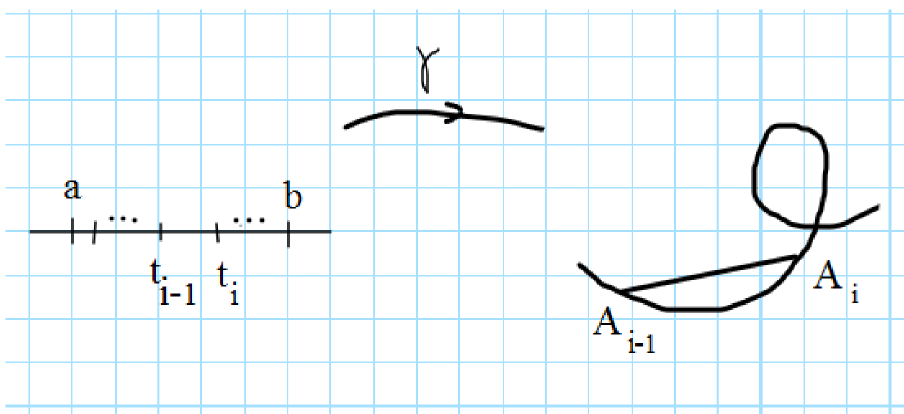
Se $\overrightarrow{F}$ é constante e C é um segmento de reta, então sabemos que o trabalho é dado por

$$W = \left\langle \overrightarrow{F}, \overrightarrow{AB} \right\rangle.$$

No caso geral fazemos o que segue-se: dividimos o intervalo $[a,b]$ em n-subintervalos, do mesmo comprimento,

$$[t_{i-1}, t_i],\ i = 1, 2, ..., n; \qquad \Delta t = t_i - t_{i-1} = \frac{b-a}{n}.$$

Isto nos dá n sub arcos $\gamma([t_{i-1}, t_i]) = C_i$ e n segmentos $[A_{i-1}, A_i]$, com $A_i = \gamma(t_i) = (x(t_i), y(t_i))$.



Supondo que $\overrightarrow{F}$ é constante ao longo do segmento $[A_{i-1}, A_i]$, o trabalho ao longo de C_i é aproximadamente

$$\begin{aligned} W_i &= \left\langle \overrightarrow{F}(\gamma(t_i)), \overrightarrow{A_{i-1}A_i} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{F}(\gamma(t_i)), (A_i - A_{i-1}) \right\rangle \\ &= P(x(t_i), y(t_i))\,\Delta x + Q(x(t_i), y(t_i))\,\Delta y \end{aligned}$$

onde,

$$\Delta x = x(t_i) - x(t_{i-1}) \qquad \Delta y = y(t_i) - y(t_{i-1})$$

Pelo teorema do valor médio temos

$$\Delta x = x'(t_i^*)\Delta t \quad \text{com} \quad t_i^* \in]t_{i-1}, t_i[\qquad \text{e} \qquad \Delta y = y'(t_i^{**})\Delta t \quad \text{com} \quad t_i^{**} \in]t_{i-1}, t_i[$$

Assim,

$$W_i \simeq \left\{ P(x(t_i), y(t_i))\, x'(t_i^*) + Q(x(t_i), y(t_i))\, y'(t_i^{**}) \right\} \Delta t$$

e logo,

$$W \simeq \sum_{i=1}^{n} (Px' + Qt')\Delta t := S_n$$

Definimos,

$$\boxed{W = \lim_{\Delta t \to 0} S_n}$$

Claro, quando o limite existe e não depende da partição do intervalo $[a,b]$ nem da escolha de t_i^* nem de t_i^{**} no intervalo $]t_{i-1}, t_i[$

Ou seja,

$$W = \int_a^b \{P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\}\, dt$$

Isto sugere a seguinte definição,

Definição 3.22 Seja $C \subset \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada por $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, de classe C^1 e tal que $\gamma'(t) \neq 0, \quad \forall t \in [a,b]$. Seja $\overrightarrow{F} = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j} + R\overrightarrow{k}$ um campo sobre C. Então a integral de linha do campo $\overrightarrow{F}$ ao longo de C é definida por:

$$\int_c \left\langle \overrightarrow{F}, d\overrightarrow{r} \right\rangle = \int_a^b \left\langle \overrightarrow{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \right\rangle dt$$

Também denotada como :

$$\int_c \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_a^b \overrightarrow{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

$$\int_a^b \overrightarrow{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b (Pdx + Qdy + Rdz)$$

onde $\quad dx = x'dt, \quad dy = y'dt \quad dz = z'dt \qquad \gamma(t) = (x(t)\, y(t), z(t))$

Observações:

(1) Se Cé regular por partes e $C = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k$, com C_j, $j = 1, 2, \ldots, k$ regular, então

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \cdots + \int_{C_k} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}.$$

(2) $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ não depende da parametrização da curva ,C desde que não se inverta sua orientação. Se denotamos por C^- a curva C percorrida no sentido contrário, então:

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = -\int_{C^-} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$$

Exemplo 3.23 Calcular $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, onde $\overrightarrow{F} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ e C é a hélice parametrizada por $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t), \quad t \in [0, 2\pi]$.

Solução:

$$\begin{aligned}
\int_c \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} &= \int_a^b \overrightarrow{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt\\
&= \int_0^{2\pi}(\cos(t),\sin(t),t)\cdot(-\sin(t),\cos(t),1)dt\\
&= \int_0^{2\pi}(-\sin(t)\cos(t)+\sin(t)\cos(t)+t)dt \;=\; \int_0^{2\pi} t\,dt\\
&= \frac{1}{2}t^2|_0^{2\pi} \;=\; \frac{1}{2}(2\pi)^2\\
&= 2\pi^2.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.24 Calcular $\int_C -2xydx+(x^2+y^2)dy$, onde C é a semi circunferência $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 & (a>0)\\ y\geq 0 \end{cases}$ de $(a,0)$ até $(-a,0)$.

Solução: Uma parametrização para C é $\gamma:[0,\pi]\to\mathbb{R}^2$, $\gamma(y)=(a\cos(t),a\sin(t))$.

$$\gamma(0)=(a,0),\quad \gamma(\pi)=(-a,0)\qquad \begin{cases} dx &= -a\sin(t)dt\\ dy &= a\cos(t)dt \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\int_C -2xydx+(x^2+y^2)dy &= \int_0^{\pi}\Big(-2a\cos(t)a\sin(t)(-a\sin(t))+a^2\cdot a\cos(t)\Big)dt\\
&= \int_0^{\pi}\Big(2a^3\sin^2(t)\cos(t)+a^3\cos(t)\Big)dt\\
&= \left(2a^3\cdot\frac{1}{3}\sin^3(t)+a^3\sin(t)\right)\Bigg|_0^{\pi}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Se C é uma curva fechada, é usual denotar a integral $\int_c \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$ *por* $\oint_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$.

Teorema 3.25 Sejam $\overrightarrow{F}: D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ um campo de classe C^2 e C uma curva regular por partes em D com ponto inicial A e ponto final B. Se $\overrightarrow{F}$ é conservativo, ou seja, existe uma função $\varphi: D\to\mathbb{R}$ tal que $\nabla\varphi=\overrightarrow{F}$, então

$$\int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \int_C \nabla\varphi\cdot d\overrightarrow{r} = \varphi(B)-\varphi(A).$$

Este teorema é conhecido como "Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha"

Ele afirma que a integral de linha de um campo conservativo só depende dos pontos A e B e não da curva que os liga.

Em particular, se C é uma curva fechada, então $\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0.$

Equivalentemente, se $\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} \neq 0$ para alguma curva fechada C, então $\overrightarrow{F}$ não é conservativo.

Exemplo 3.26 O campo $\overrightarrow{F}(x,y) = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$ é conservativo. Um potencial Um potencial para $\overrightarrow{F}$ é $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$. De fato,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = x, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = y \quad \text{logo,} \quad \nabla\varphi = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} = \overrightarrow{F}.$$

Assim, qualquer que seja a curva fechada C,

$$\oint_C \overrightarrow{F}\,d\overrightarrow{r} = 0, \quad \text{ou seja,} \quad \oint_C x\,dx + y\,dy = 0.$$

Exemplo 3.27 Seja $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{F}(x,y) = P(x,y)\,\overrightarrow{i} + Q(x,y)\,\overrightarrow{j}$, onde

$$P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad \text{e} \quad Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Temos $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ e $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$. Assim, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ e portanto, $rot(\overrightarrow{F}) = 0$.
Agora, se C é a circunferência parametrizada por $\gamma(t) = (a\cos(t), a\sin(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$, então

$$\begin{aligned}
\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-a\sin(t)}{a^2}(-a\sin(t)) + \frac{a\cos(t)}{a^2}a\cos(t) \right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sin^2(t) + \cos^2(t) \right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} dt \;=\; 2\pi.
\end{aligned}$$

Portanto, $\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} \neq 0$. Daí, $\overrightarrow{F}$ não é conservativo.

O campo $\overrightarrow{F}$ do exemplo anterior não é conservativo, mas $rot(\overrightarrow{F}) = 0$. Vimos que se $\overrightarrow{F}$ é um campo conservativo, então $rot(\overrightarrow{F}) = 0$. O exemplo anterior mostra que a recíproca não é verdadeira. Ou seja,

$$rot(\overrightarrow{F}) = 0 \quad \textit{não implica} \quad \overrightarrow{F} \textit{ conservativo}$$

Na verdade, isto é válido sob certas condições sobre o domínio do campo.

3.7 O teorema de Green

O teorema de Green estabelece uma relação entre integrais de linha e integrais duplas. Antes de enuncia-lo precisamos esclarecer a noção de orientação para um domínio limitado em $\mathbb{R}^2$

Definição 3.28 Seja $\mathcal{B} = \left\{\vec{v}_1 = (x_1, y_1), \vec{v}_2 = (x_2, y_2)\right\} \subset \mathbb{R}^2$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^2$. Dizemos que $\mathcal{B}$ é uma base positiva se, e somente se,

$$det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} > 0,$$

Caso contrário, dizemos que $\mathcal{B}$ é uma base negativa.

Por exemplo, a base canônica de $\mathbb{R}^2$, $\{(1,0),(0,1)\}$ é positiva e $\{(0,1),(1,0)\}$ é negativa.

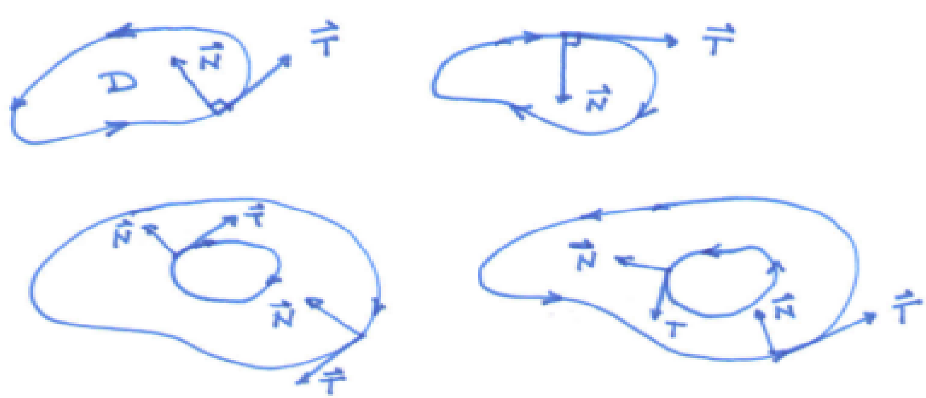
Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio fechado e limitado cujo bordo ∂D é formado por um número finito de curvas simples, fechadas e regulares por partes que não se intersetam

$\partial D = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k$

$C_i \cap C_j = \phi \quad \forall i \neq j$

C_i fechada, simples e regular p.p.

Em cada ponto regular de cada curva do bordo, escolha uma base de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \left\{\vec{T}, \vec{N}\right\}$, de modo que $\vec{T}$ é um vetor tangente à curva no ponto em questão e $\vec{N}$ é normal à curva nesse ponto e aponta para o interior do domínio D.



Definição 3.29 Dizemos que D está positivamente orientado se a base $\left\{\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}\right\}$ escolhida, como acima, é uma base positiva em cada ponto.

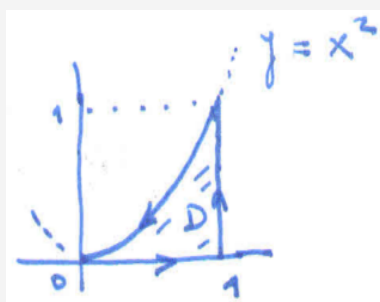
Agora podemos enunciar o Teorema de Green.

Teorema 3.30 (**Green** [a]) Seja D um domínio fechado e limitado do plano cujo bordo ∂D é formado por um número finito de curvas simples, fechadas, C^1 por partes que não se intersetam. Suponha que D está orientado positivamente e seja $\overrightarrow{F}: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{F}(x,y) = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}$ um campo de classe C^1 definido num aberto U que contém D. Então

$$\int_{\partial D} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{\partial D} P dx + Q dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

[a] Matemático e Físico inglês. Nottinghamshire 14 de julho de 1793 - Nottingham 31 de maio de 1841

Exemplo 3.31 Calcular $\int_C \sqrt{y}dx + \sqrt{x}dy$ onde C é a curva formada pelas retas $y = 0$, e $x = 1$ e pela parábola $y = x^2$ (orientada positivamente).
Solução:



Seja D a região limitada por C, $\partial D = C$.

$$\overrightarrow{F} = \sqrt{y}\,\overrightarrow{i} + \sqrt{x}\,\overrightarrow{j} \qquad \begin{cases} P = \sqrt{y} & \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \\ Q = \sqrt{x} & \Longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases} \qquad D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_C \sqrt{y}dx + \sqrt{x}dy &= \int_D \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right) dA = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right) dy dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}y - 2\sqrt{y} \right)\Bigg|_0^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}} - 2x \right) dx \\ &= \ldots = \frac{-3}{10} \end{aligned}$$

Exemplo 3.32 Consideremos o campo $\overrightarrow{F}(x,y) = -y\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j}$.
i.e. $P(x,y) = -y$, $Q(x,y) = x$. Então,

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_D (1-(-1))dA = 2\int_D dA = 2\,\text{área}(D).$$

Assim, pelo teorema de Green,

$$\boxed{\text{área(D)} = \tfrac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx}$$

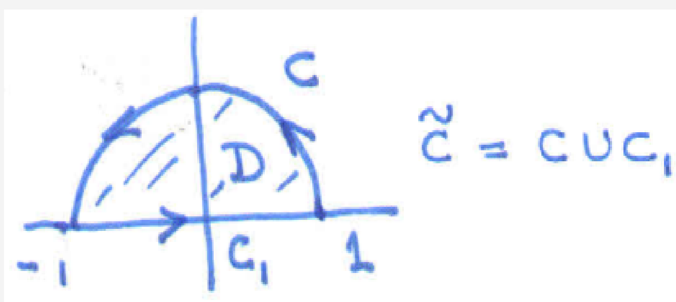
Além disso, integrando por partes, temos que

$$\int_{\partial D} xdy = \int_{\partial D} ydx.$$

Logo,

$$\text{área}(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx = \int_{\partial D} xdy = -\int_{\partial D} ydx$$

Exemplo 3.33 Calcular $\int_C e^x \sin(y)dx + (e^x\cos(y) + x)dy$. C é o semi círculo $\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$ orientado no sentido anti horário.
Solução:



C não é fronteira de região alguma, portanto o teorema de Green não se aplica.
Para aplicar o teorema consideramos a curva, diferenciável por partes, $\widetilde{C} = C \cup C_1$ onde C_1 é osegmento de reta do ponto $(-1,0)$ até o ponto $(1,0)$. Seja D a região limitada por $\widetilde{C}$ $(\partial D = \widetilde{C})$. Agora podemos aplicar o teorema de Green na região D.

$$\overrightarrow{F} = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j}, \quad \text{com} \quad P = e^x\sin(y) \text{ e } Q = e^x\cos(y) + x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x\cos(y), \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = e^x\cos(y) + 1$$