UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CCEN - Departamento de Matemática
http://www.mat.ufpb.br

Lista de Exercícios $N^o\,10$: Cálculo III

Professor: Pedro A. Hinojosa

---

1 *Em cada item abaixo, use o teorema de Stokes para transformar* $\int_S rot(\overrightarrow{F}) \cdot \overrightarrow{n} dS$ *em uma integral de linha e calcule essa integral.*

(a) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = x^2 y\overrightarrow{i} + 2y^3 z\overrightarrow{j} + 3z\overrightarrow{k}$, *S é a superfície parametrizada por* $\varphi(r,\theta) = (rcos(\theta), rsin(\theta), r)$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ *e normal* $\overrightarrow{n}$ *apontando para fora.* *Resp.* $\frac{\pi}{4}$

(b) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = y\overrightarrow{k}$, *S é a superfície parametrizada por* $\psi(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$, *com* $u^2 + v^2 \leq 1$ *e normal* $\overrightarrow{n}$ *apontando para cima.* *Resp.* 0.

2 *Sejam* $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (2x + e^z)\overrightarrow{i} + (3y - ze^x)\overrightarrow{j} + (z-2)\overrightarrow{k}$ *e S a parte da esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ *acima do plano XY. Se o fluxo de* $\overrightarrow{F}$ *através de S na direção da normal exterior* $\overrightarrow{n}$ *é igual a* $2\pi a^3$, *determine o valor de a (raio da esfera).* *Resp. 1.*

3 *Considere o campo vetorial* $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x + f(y,z))\overrightarrow{i} + (x - y + z)\overrightarrow{j} + (z^4 - 3a^2)\overrightarrow{k}$, *onde* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é uma função de classe* C^1. *Seja S uma lata cilíndrica dada por* $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq \sqrt{a}$, $a \geq 0$. *com fundo* $x^2 + y^2 \leq a^2$, $z = 0$, *e sem tampa. Se o fluxo de* $\overrightarrow{F}$ *através de S, de dentro para fora é igual a* πa^3, *calcule o valor de a.* *Resp.* $\frac{1}{3}$.

4 *Use o teorema de Gauss para determinar o fluxo do campo* $\overrightarrow{F}$ *através da superfície S orientada positivamente, onde:*

(a) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (z^2 + y^2)\overrightarrow{i} + (y2^- 2zy)\overrightarrow{j} + (4x - 2yx)\overrightarrow{k}$ *e S é a fronteira do sólido W dado por* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 3$;

(b) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x^3 + ysen(z))\overrightarrow{i} + (y^3 + zsen(x))\overrightarrow{j} + z^3\overrightarrow{k}$, *S é o bordo do sólido W limitado pelo plano* $z = 0$ *e os hemisférios* $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ *e* $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$;

(c) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (xy^2 + cos(z))\overrightarrow{i} + (x^2 y + sin(z))\overrightarrow{j} + e^y\overrightarrow{k}$, *S é a fronteira do sólido W limitado pelo paraboloide* $z = x^2 + y^2$ *e pelo plano* $z = 4$.

5 *Calcule*

$$I = \oint_C (e^{\frac{-x^3}{3}} - yz)dx + (e^{\frac{-y^3}{3}} + xz + 2x)dy + (e^{\frac{z^3}{3}} + 5)dz$$

onde C é a circunferência parametrizada por $\alpha : [0, 2?] \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (cos(t), sen(t), 2)$.

6 *Calcule:*

$$\int_C (y^2 cos(x) + z^3)dx - (4?2ysen(x))dy + (3xz^2 + 2)dz$$

onde C é a hélice parametrizada por $\gamma(t) = (sen(t), cos(t), t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.