Exercícios: Teor. de Gauss - Teor de Stokes

① Calcule $\oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$. C é a curva obtida como interseção do plano $x+y=2$ com a esfera $x^2+y^2+z^2=2(x+y)$

Solução

$x^2+y^2+z^2 = 2(x+y) \Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+z^2=2$

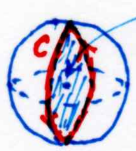
(Esfera de raio $\sqrt{2}$ com centro no pto $(1,1,0)$)

$x+y=2 \Rightarrow y = 2-x$

$x^2+(2-x)^2+z^2=4 \Rightarrow 2x^2-4x\cancel{+4}+z^2=\cancel{4}$

$\Rightarrow 2(x^2-2x)+z^2=0 \Rightarrow 2(x-1)^2+z^2=2$

$\Rightarrow \underbrace{\left\{(x-1)^2+\frac{z^2}{2}=1\right\}}$ Elipse no plano XZ ($y=0$)



S: círculo de raio $\sqrt{2}$ com centro no pto $(1,1,0)$ contido no plano $x+y=2$

$\partial S = C$

$\vec{F} = y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k} \Rightarrow rot(\vec{F}) = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & z & x \end{pmatrix}$

$= -\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$

orientando S por $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})$

obtemos

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_S rot(\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS = -\frac{2}{\sqrt{2}}\int_S dS = -\frac{2}{\sqrt{2}}\,\text{área}(S)$$

$$-\frac{2}{\sqrt{2}}\pi(\sqrt{2})^2 = -2\sqrt{2}\,\pi$$

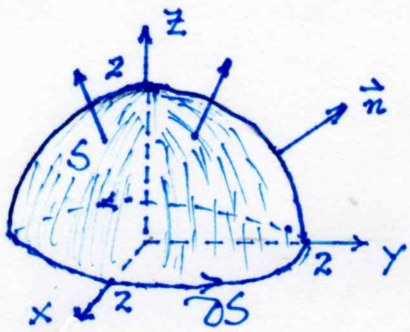
(2) Use o Teor. de Stokes para calcular

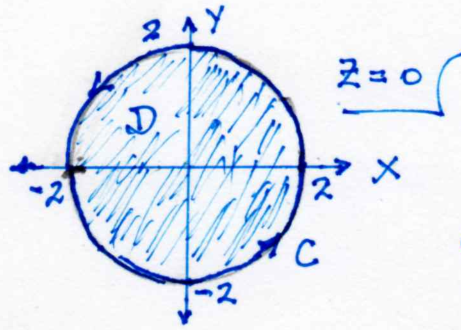
$$\int_S \text{rot}(\vec{F})\cdot\vec{n}\, dS$$

onde $\vec{F} = x^2 e^{yz}\vec{i} + y^2 e^{x^2}\vec{j} + z^2 e^{xy}\vec{k}$

e S é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ acima do plano XY, com normal $\vec{n}$ apontando para fora.

Solução:





$$C: \begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

Pelo Teor. de Stokes: $\displaystyle\int_S \text{rot}(\vec{F})\cdot\vec{n}\, dS = \int_{C=\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{r}$

Note que, neste caso, $\vec{F}$ é de classe C^1 e a orientação de ∂S é compatível com a orientação de S.

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C x^2 e^{yz}dx + y^2 e^{x^2}dy + z^2 e^{xy}dz$$

Em C, $z=0$ $\therefore dz=0$

$$= \int_C x^2 dx + y^2 e^{x^2} dy$$

$$= \iint_D 2xy^2 e^{x^2}\, dx\, dy$$

$P = x^2$, $Q = y^2 e^{x^2}$

Teor. de Green:

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$$

$f(x,y) = 2xy^2 e^{x^2}$ é impar na variavel x $\quad f(-x,y) = -f(x,y)$

D é simétrico c/r ao eixo Y. $\therefore \displaystyle\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = 0$

Daí $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$ e logo $\displaystyle\int_S \text{rot}(\vec{F})\cdot\vec{n}\, dS = 0$

(3) Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F} = (y^2 \cos x + z^3)\vec{i} + (2y \operatorname{sen} x - 4)\vec{j} + (3xz^2 + 2)\vec{k}$

e C é a hélice $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \\ z = t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$

Solução:

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y^2 \cos x + z^3 & 2y \operatorname{sen} x - 4 & 3xz^2 + 2 \end{pmatrix}$$

$$= 0\vec{i} - (3z^2 - 3z^2)\vec{j} + (2y \cos x - 2y \cos x)\vec{k}$$

$$= \vec{0}$$

$$\therefore \operatorname{rot}(\vec{F}) = 0$$

Observe que $\vec{F}$ está definido em todo $\mathbb{R}^3$ que é um conjunto simplesmente conexo. Logo $\vec{F}$ é conservativo.

Solução 1:

$\vec{F}$ conservativo $\Rightarrow \exists\, f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = \vec{F}$

(Potencial de $\vec{F}$)

$$\nabla f = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y^2 \cos x + z^3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y \operatorname{sen} x - 4 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 3xz^2 + 2 \end{cases} \qquad \therefore f = y^2 \operatorname{sen} x + xz^3 - 4y + 2z$$

Teor. Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0))$$

onde $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$ é uma param. da hélice.

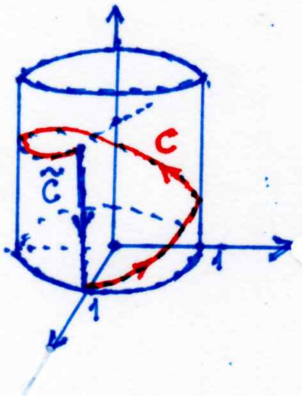
$$\gamma(2\pi) = (1, 0, 2\pi), \quad \gamma(0) = (1, 0, 0)$$

$$\therefore \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(1,0,2\pi) - f(1,0,0) = (2\pi)^3 - 4\pi - 0 = 8\pi^3 - 4\pi$$

Solução 2 (Usando o Teor. de Stokes)

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S rot(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS .$$

A hélice C não é fronteira de nenhuma superf. S, mas...



Podemos pensar S como a parte do cilindro $x^2+y^2=1$ limitada pelas curvas C e $\tilde{C}$, ou seja, $\partial S = C \cup \tilde{C}$

onde $\tilde{C}: \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t , \quad t \in [0, 2\pi] \end{cases}$

Daí

$$\int_{C \cup \tilde{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S \underbrace{\cancel{rot \, \vec{F}}}_{0} \cdot \vec{n} \, dS = 0$$

$$\therefore \quad \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{\tilde{C}} \vec{F} \cdot dr = \int_{\tilde{C}^-} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_0^{2\pi} t^3 \cdot 0 + (-4) \cdot 0 + (3t^2+2) \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (3t^2+2) \, dt = (t^3 + 2t) \Big|_0^{2\pi}$$

$$= (2\pi)^3 - 2 \cdot 2\pi = 8\pi^3 - 4\pi$$

(4) Use o Teor de Stokes para calcular $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F} = (2xyz - 2y)\vec{i} + (x^2+2x)\vec{j} + (x^2+2y)\vec{k}$, C é a circunf. $y^2+z^2=1$, $x=2$.

Solução

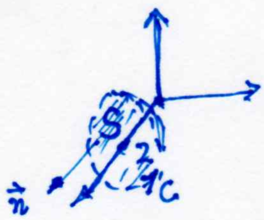
Stokes: $\int_{C=\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_S \operatorname{rot}(\vec{F})\cdot\vec{n}\, dS$

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2xyz-2y & x^2+2x & x^2+2y \end{pmatrix}$$

$$= (2-0)\vec{i} - (2x - 2xy)\vec{j} + (2x+2-2xz+2)\vec{k}$$

$$= 2\vec{i} - 2x(1-y)\vec{j} + (2x-2xz+4)\vec{k}$$

$S: \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ x = 2 \end{cases}$



$\vec{n} = (1,0,0)$

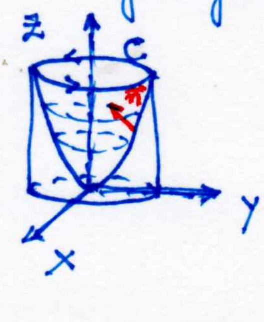
$\operatorname{rot}(\vec{F})\cdot\vec{n} = 2 \quad \therefore \quad \int_S \operatorname{rot}(\vec{F})\cdot\vec{n}\, ds = \int_S 2\, ds$

$= 2\, \text{área}(S) = 2\pi$

(5) Calcule $\int_S \operatorname{rot}(\vec{F})\cdot\vec{n}\, ds$, onde S é a parte do parabolóide $z = x^2+y^2$ que está dentro do cilindro $x^2+y^2=4$. orientada "para cima"

$\vec{F} = x^2z^2\vec{i} + y^2z^2\vec{j} + xyz\vec{k}$

Solução



$C: \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=4 \end{cases}$

$C = \partial S$

Stokes: $\displaystyle\int_S \text{rot}(F)\cdot\vec{n}\,dS = \int_{C=\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{r}$

uma parametrização de C (no sentido anti-horário quando vista de cima) $\gamma(t) = (2\cos t, 2\,\text{sen}\,t, 4) \quad t\in[0,2\pi]$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \cancel{\int_0^{2\pi}[4\cos^2 t\,(-2\,\text{sen}\,t)]\,dt}$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\left(4\cos^2 t\cdot 16\cdot(-2\,\text{sen}\,t)\right) + \left(4\,\text{sen}^2 t\cdot 16\cdot 2\cos t\right) + 0\right)dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(128\cos^2 t\,\text{sen}\,t + 128\,\text{sen}^2 t\cos t\right)dt$$

$$= 128\left(-\frac{1}{3}\cos^3 t\,\Big|_0^{2\pi}\right) + 128\left(\frac{1}{3}\,\text{sen}^3 t\,\Big|_0^{2\pi}\right)$$

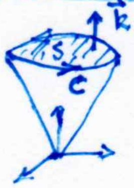
$$= 0$$

(6) Calcular $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde

$\vec{F} = (x^2-y)\vec{i} + 4z\vec{j} + x^2\vec{k}$

C é a curva interseção do plano $z=2$ com o cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ orientada no sentido anti-horário quando vista de cima

Solução:



$$\int_{C=\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_S \text{rot}(\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS$$

$$S:\begin{cases} z=2 \\ x^2+y^2\le 4\end{cases} \qquad \vec{n}=\vec{k}$$

$$\text{rot}(\vec{F}) = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^2-y & 4z & x^2\end{pmatrix} = 4\vec{i} - 2x\vec{j} + \vec{k}$$

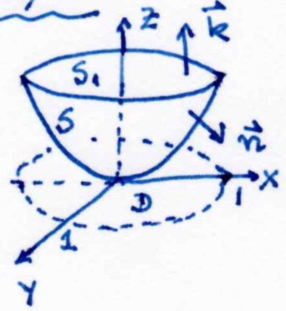
$\text{rot}(\vec{F})\cdot\vec{n} = 1 \qquad \displaystyle\int_S \text{rot}(\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS = \int_S dS = \text{área}(S) = 4\pi$

(7) Calcule $\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ onde

S é o gráfico de $f(x,y) = x^2+y^2$ com $x^2+y^2 \leq 1$ e $\vec{n}$ normal a S t.q. $\vec{n}\cdot\vec{k} \leq 0$.

$\vec{F} = x^2y\,\vec{i} - xy^2\,\vec{j} + \vec{k}$

Solução



$D: \begin{cases} z = 0 \\ x^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$

$S_1: \begin{cases} z = 1 \\ x^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$

Teor. da Divergência

$$\int_{S=\partial W} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \int_W div(\vec{F})\,dV$$

Seja W o sólido t.q. $\partial W = S \cup S_1$. Pelo Teor. da divergência

$$\int_{S\cup S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \int_W div(\vec{F})\,dV = \int_W (2xy - 2xy + 0)\,dV = 0$$

$$\therefore \int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = -\int_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{k}\,dS = -\int_{S_1} dS = -\text{área}(S_1) = -\pi$$

$$\therefore \int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = -\pi$$

(8) Calcular, usando o Teor da divergência,

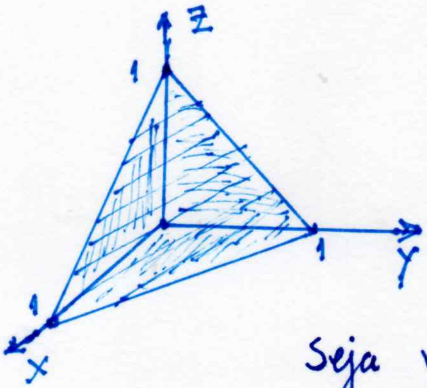
$$\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS$$

$$\vec{F} = y^3 e^z \vec{\imath} - xy\vec{\jmath} + x\,\text{arctg}(y)\,\vec{k}$$

S a superf. limitada pelos planos coord e pelo plano $x+y+z=1$

Solução:

Teor. da divergência (Gauss)
$$\int_{S=\partial W} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \int_W div(\vec{F})\, dV$$



$$div(\vec{F}) = 0 - x + 0$$
$$= -x$$

Seja W o sólido t.q. $\partial W = S$

$$W: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1-x \\ 0 \leq z \leq 1-x-y \end{cases}$$

$$\therefore \int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \int_W div(\vec{F})\, dV = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} -x\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1\int_0^{1-x} -x(1-x-y)\, dy\, dx = \int_0^1\int_0^{1-x} [-x(1-x) + xy]\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 [-x(1-x)^2 + \tfrac{1}{2}x(1-x)^2]\, dx$$

$$= \int_0^1 -\tfrac{1}{2}\, x(1-x)^2\, dx = -\tfrac{1}{2}\int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x)\, dx$$

$$= -\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{2}\right) = -1/24$$