Álgebra Linear

Sérgio L. Zani

Segundo Semestre de 2001

Sumário

Capítulo 1

Espaços Vetoriais

1.1 Introdução e Exemplos

Neste capítulo introduziremos o conceito de espaço vetorial que será usado em todo o decorrer do curso. Porém, antes de apresentarmos a sua definição, passemos a analisar em paralelo dois objetos: o conjunto formado pelas funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, denotado por $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ e o conjunto das matrizes quadradas de ordem m com coeficientes reais que denotaremos por $M_m(\mathbb{R})$, ou simplesmente, por M_m.

A soma de duas funções f e g de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ é definida como sendo a função $f+g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ dada por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

Note também que se $\lambda \in \mathbb{R}$ podemos multiplicar a função f pelo escalar λ, da seguinte forma $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$, resultando num elemento de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Com relação a M_n podemos somar duas matrizes quadradas de ordem n, $A = (a_{ij})_{n\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times n}$, colocando $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{n\times n}$, que é um elemento de M_n.

Com a relação à multiplicação de $A = (a_{ij})_{n\times n}$ por um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, é natural definirmos $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{n\times n}$, o qual também pertence a M_n.

O que estes dois conjuntos acima, com estas *estruturas* de adição de seus elementos e multiplicação de seus elementos por escalares, têm comum? Vejamos:

Verifica-se facilmente a partir das propriedades dos números reais que, com relação a quaisquer funções f, g e h em $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ e para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, são válidos os seguintes resultados:

1. $f + g = g + f$;
2. $f + (g + h) = (f + g) + h$;
3. se o representa o função nula, isto é, $o(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então $o + f = f$;
4. a função $-f$ definida por $(-f)(x) = -(f(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}$ é tal que $f + (-f) = o$;
5. $\lambda(\mu f) = (\lambda\mu)f$;
6. $(\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f$;
7. $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$;
8. $1f = f$.

Agora, com relação a quaisquer matrizes A, B e C em M_m e para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, também são válidos os seguintes resultados:

1. $A + B = B + A$;

2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. se O representa o função nula, isto é, $O = (0)_{n\times n}$ então $O + A = A$;
4. se $A = (a_{i,j})_{n\times n}$ então a matriz $-A$ definida por $-A = (-a_{i,j})_{n\times n}$ é tal que $A + (-A) = O$;
5. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$;
6. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
7. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
8. $1A = A$.

Podemos ver que tanto o conjuntos das funções definidas na reta a valores reais como o das matrizes quadradas quando munidos de somas e multiplicação por escalares adequadas apresentam *propriedades algébricas* comuns. Na verdade muitos outros conjuntos munidos de operações apropriadas apresentam propriedades semelhantes às acima. É por isso que ao invés de estudarmos cada um separadamente estudaremos um conjunto genérico e não vazio, V, sobre o qual supomos estar definidas uma operação de adição, isto é, para cada $u, v \in V$ existe um único elemento de V associado, chamado a soma entre u e v e denotado por $u + v$, e uma multiplicação por escalar, isto é, para cada $u \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ existe um único elemento de V associado, chamado de o produto de u pelo escalar λ e denotado por λu.

Definição 1 *Diremos que um conjunto V como acima munido de uma adição e de uma multiplicação por escalar é um* espaço vetorial *se para quaisquer u, v e w em V e para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ são válidas as seguintes propriedades:*

EV1 $u + v = v + u$ *para quaisquer* $u, v \in V$;

EV2 $u + (v + w) = (u + v) + w$ *para quaisquer* $u, v, w \in V$

EV3 *existe um elemento* $0 \in V$ *tal que* $0 + u = u$ *para todo* $u \in V$;

EV4 *para cada* $u \in V$ *existe* $v \in V$ *tal que* $u + v = 0$;

EV5 $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$ *para quaisquer* $u \in V$ *e* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

EV6 $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$ *para quaisquer* $u \in V$ *e* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

EV7 $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ *para quaisquer* $u, v \in V$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$;

EV8 $1u = u$ *para qualquer* $u \in V$.

Observação 1.0.1 *O elemento 0 na propriedade* EV3 *é único, pois qualquer outro $0' \in V$ satisfazendo a mesma propriedade* EV3 *então, pelas propriedades* EV3 *e* EV1 *teríamos $0' = 0 + 0' = 0' + 0 = 0$, isto é $0 = 0'$.*

Observação 1.0.2 *Em um espaço vetorial, pela propriedade* EV4*, para cada $u \in V$ existe $v \in V$ tal que $u + v = 0$. Na verdade, para cada $u \in V$ existe somente um elemento $v \in V$ com esta propriedade. De fato, dado $u \in V$ se v e v' em V são tais que $u + v = 0$ e $u + v' = 0$ então, combinando estas equações com as propriedades* EV1,EV2 *e* EV3*, obtemos $v = v + 0 = v + (u + v') = (v + u) + v' = (u + v) + v' = 0 + v' = v'$, isto é $v = v'$. Denotaremos v por $-u$. Escreveremos $u - v$ para denotar $u + (-v)$.*

Um outro exemplo de espaço vetorial, além dos dois apresentados no início do texto, é o conjunto dos vetores como apresentados em Geometria Analítica munido da adição e da multiplicação por escalar. Dessa forma, o adjetivo vetorial utilizado na definição acima deve ser entendido de uma forma mais ampla, sendo uma referência aos elementos de V independentemente de serem ou não vetores.

Talvez o exemplo mais simples de espaço vetorial seja o conjunto dos números reais com a adição e multiplicação usuais. Mais geralmente, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos transformar o conjunto das n-uplas ordenadas de números reais, $\mathbb{R}^n$, em um espaço vetorial definindo a adição de duas n-uplas ordenadas, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, adicionando-se coordenada a coordenada, isto é,

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

e o produto de uma n-upla $x = (x_1, \ldots, x_n)$ por um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ por

$$\lambda x = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n).$$

É uma rotina bem simples verificar que desse modo $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial. Deixamos como exercício esta tarefa. Verifique também que os seguintes exemplos são espaços vetoriais.

1. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $V = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ o conjunto formado pelo polinômio nulo e por todos os polinômios de grau menor ou igual a n com coeficientes reais. Definimos a adição e a multiplicação por escalar da seguinte maneira:

   - Se $p(x) = a_0 + a_1 x \cdots + a_n x^n$ e $q(x) = b_0 + b_1 x \cdots + b_n x^n$ são elementos de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ então
   $$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x \cdots + (a_n + b_n)x^n.$$
   - Se $p(x) = a_0 + a_1 x \cdots + a_n x^n$ é um elemento de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então
   $$\lambda p(x) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + \cdots + (\lambda a_n)x^n.$$

2. Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e $\mathcal{F}(A; \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções $f : A \to \mathbb{R}$. Se $f, g \in \mathcal{F}(A; \mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ defina $f + g : A \to \mathbb{R}$ por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, $x \in A$. Então, $\mathcal{F}(A; \mathbb{R})$ com esta adição e produto por escalar é um espaço vetorial.

3. O conjunto das funções contínuas definidas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ munido das operações de adição e multiplicação usuais (como aquelas definidas em $\mathcal{F}(I; \mathbb{R})$). Notação: $C(I; \mathbb{R})$.

4. O conjunto das funções com derivadas contínuas até ordem $k \in \mathbb{N}$, (k é fixo) definidas num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ munido das operações de adição e multiplicação usuais (como aquelas definidas em $\mathcal{F}(I; \mathbb{R})$).

5. O conjunto das matrizes m por n com coeficientes reais: $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ munido de operações análogas àquelas definidas em $M_n(\mathbb{R})$.

Os espaços vetoriais acima envolvem operações com as quais você já deve estar familiarizado. O próximo exemplo é um pouco mais sofisticado do que os anteriores e por isso mostraremos as oito propriedades. Como conjunto tomaremos $V = (0, \infty)$, o semi-eixo positivo da reta real. Este conjunto quando agregado às operações usuais de soma e multiplicação **não é** um espaço vetorial, visto que não possui *elemento neutro* para a adição. No entanto, se para $x, y \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, definirmos a soma entre x e y por $x \oplus y = xy$, (o produto usual entre x e y) e o produto de x pelo escalar λ como $\lambda \odot x = x^\lambda$, então V se torna um espaço vetorial. De fato, verifiquemos uma a uma as oito propriedades:

1. $x, y \in V$ temos $x \oplus y = xy = yx = y \oplus x$ para quaisquer $x, y \in V$;

2. $x \oplus (y \oplus z) = x \oplus (yz) = x(yz) = (xy)z = (x \oplus y)z = (x \oplus y) \oplus z$ para quaisquer $x, y, z \in V$

3. se $x \in V$ então, como $1 \in V$, temos $1 \oplus x = 1x = x$; observe que neste caso, 1 é o elemento neutro da *adição*, o qual denotaremos por $\mathfrak{o}$;

4. se $x \in V$, isto é, $x > 0$, então $x^{-1} \in V$ e $x \oplus x^{-1} = xx^{-1} = 1 = \mathfrak{o}$;

5. $\lambda \odot (\mu \odot x) = \lambda \odot x^\mu = (x^\mu)^\lambda = x^{\mu\lambda} = x^{\lambda\mu} = (\lambda\mu) \odot x$ para quaisquer $x \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
6. $(\lambda + \mu) \odot x = x^{\lambda+\mu} = x^\lambda x^\mu = x^\lambda \oplus x^\mu = (\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x)$ para quaisquer $x \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
7. $\lambda \odot (x \oplus y) = \lambda \odot (xy) = (xy)^\lambda = x^\lambda y^\lambda = (\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y)$ para quaisquer $x, y \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$;
8. $1 \odot x = x^1 = x$ para qualquer $x \in V$.

1.2 Propriedades

Das oito propriedades que definem um espaço vetorial podemos concluir várias outras. Listaremos estas propriedades na seguinte

Proposição 1 *Seja V um espaço vetorial. Temos*

1. *Para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda 0 = 0$.*
2. *Para qualquer $u \in V$, $0u = 0$.*
3. *Se $\lambda u = 0$ então $\lambda = 0$ ou $u = 0$.*
4. *Para quaisquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in V$, $(-\lambda)u = \lambda(-u) = -(\lambda u)$.*
5. *Para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $u \in V$, $(\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u$.*
6. *Para quaisquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u, v \in V$, $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$.*
7. *Para quaisquer $\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ e $u_1, \ldots, u_n \in V$,*
$$\lambda(\sum_{j=1}^n \mu_j u_j) = \sum_{j=1}^n (\lambda\mu_j) u_j.$$
8. *Para qualquer $u \in V$, $-(-u) = u$.*
9. *Se $u + w = v + w$ então $u = v$.*
10. *Se $u, v \in V$ então existe um único $w \in V$ tal que $u + w = v$.*

Prova:

1. Temos $\lambda 0 = \lambda(0+0) = \lambda 0 + \lambda 0$ pelas propriedades EV3 e EV7. Utilizando as propriedades EV1 a EV4 e a notação da observação 1.0.2, obtemos $0 = \lambda 0 + (-(\lambda 0)) = (\lambda 0 + \lambda 0) + (-(\lambda 0)) = \lambda 0 + (\lambda 0 + (-(\lambda 0))) = \lambda 0 + 0 = \lambda 0$, isto é $\lambda 0 = 0$.
2. Temos $0u = (0+0)u = 0u + 0u$, pela propriedade EV6. Utilizando as propriedades EV1 a EV4 e a notação da observação 1.0.2, obtemos $0 = 0u + (-(0u)) = (0u + 0u) + (-(0u)) = 0u + (0u + (-(0u)) = 0u + 0 = 0u$, isto é, $0u = 0$.
3. Se $\lambda \neq 0$ então pelas propriedades EV8 e EV5 e pelo item 1 desta proposição, $u = 1u = (\lambda^{-1}\lambda)u = \lambda^{-1}(\lambda u) = \lambda^{-1} 0 = 0$.
4. Utilizando a propriedade EV6 e o item 2 desta proposição, obtemos $\lambda u + (-\lambda)u = (\lambda + (-\lambda))u = 0u = 0$. Pela observação 1.0.2, $-(\lambda u) = (-\lambda)u$. Analogamente, utilizando-se a propriedade EV7, mostra-se que $-(\lambda u) = \lambda(-u)$.

   A prova dos outros resultados é deixada como exercício.

∎

Capítulo 2

Subespaços Vetoriais

2.1 Introdução e Exemplos

Definição 2 *Seja V um espaço vetorial. Dizemos que $W \subset V$ é um subespaço vetorial de V se forem satisfeitas as seguintes condições:*

SE1 $0 \in W$;

SE2 *Se $u, v \in W$ então $u + v \in W$;*

SE3 *Se $u \in W$ então $\lambda u \in W$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Observação 2.0.3 *Note que todo subespaço vetorial W de um espaço vetorial V é ele próprio um espaço vetorial. As propriedades comutativa, associativa, distributivas e* EV8 *são herdadas do próprio espaço vetorial V. O elemento neutro da adição é um elemento de W por* SE1*. Finalmente, se $u \in W$ então $-u = (-1)u \in W$ pelo item 4 da proposição 1 e por* SE3.

Observação 2.0.4 *Obviamente $\{0\}$ e V são subespaços vetoriais do espaço vetorial V. São chamados de subespaços vetoriais triviais.*

Observação 2.0.5 *Note que W é subespaço vetorial de V se e somente se são válidas as seguintes condições:*

SE1' $0 \in W$;

SE2' *Se $u, v \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então $u + \lambda v \in W$.*

Vejamos alguns outros exemplos:

Exemplo 1 *Seja $\mathcal{P}_n^* \subset \mathcal{P}_n$, dado por $\mathcal{P}_n^* = \{p(x) \in \mathcal{P}_n; p(0) = 0\}$.*

Verifiquemos que $\mathcal{P}_n^*$ é, de fato, um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_n$.

1. O polinômio nulo se anula em $x = 0$, logo, pertence a $\mathcal{P}_n^*$.
2. Se $p(x), q(x) \in \mathcal{P}_n^*$ então $p(0) + q(0) = 0$ e, portanto, $p(x) + q(x) \in \mathcal{P}_n^*$.
3. se $p(x) \in \mathcal{P}_n^*$ então $\lambda p(0) = 0$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim, $\lambda p(x) \in \mathcal{P}_n^*$.

Exemplo 2 *Verifiquemos que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.*

1. É claro que $(0, 0, 0)$ satisfaz $0 + 0 + 0 = 0$.

2. Se $(x, y, z), (u, v, w) \in S$ então $(x + u) + (y + v) + (z + w) = (x + y + z) + (u + v + w) = 0$ e, portanto, $(x, y, z) + (u, v, w) \in S$.

3. se $(x, y, z) \in \mathbb{S}$ então $\lambda x + \lambda y + \lambda z = \lambda(x + y + z) = 0$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim, $\lambda(x, y, z) \in S$.

Exemplo 3 *Considere o seguinte conjunto $S = \{y \in C^2(\mathbb{R}); y'' - y = 0\}$ onde y'' representa a derivada de segunda ordem de y. Verifiquemos que S é um subespaço vetorial de $C^2(\mathbb{R})$.*

1. Claramente a função nula satisfaz $0'' - 0 = 0$;

2. Se $y_1, y_2 \in S$ então $(y_1 + y_2)'' - (y_1 + y_2) = (y_1'' - y_1) - (y_2'' - y_2) = 0$. Logo, $y_1 + y_2 \in S$.

3. Se $y \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então $(\lambda y)'' - \lambda y = \lambda(y'' - y) = 0$. Portanto, $\lambda y \in S$.

Deixamos como exercício a verificação de que os seguintes exemplos são subespaços vetoriais dos respectivos espaços vetoriais.

Exemplo 4 *Sejam $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$. Mostre que S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.*

Exemplo 5 *O conjunto das funções contínuas da reta na reta, $C(\mathbb{R})$, é um subespaço vetorial de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.*

Exemplo 6 *O conjunto das* matrizes simétricas *quadradas de ordem m com coeficientes reais é um subespaço vetorial de $M_m(\mathbb{R})$.*

Exemplo 7 *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ com $m \leq n$. Então $\mathcal{P}_m$ é um subespaço de $\mathcal{P}_n$.*

2.2 Propriedades

Proposição 2 *Sejam U e W subespaços vetoriais de V. então $U \cap W$ é subespaço vetorial de V.*

Prova:

1. Como $0 \in U$ e $0 \in W$ então $0 \in U \cap W$;

2. Se $x, y \in U \cap W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então $x + \lambda y \in U$ e $x + \lambda y \in W$. Portanto, $x + \lambda y \in U \cap W$.

$\blacksquare$

Questão: Com as condições acima, podemos afirmar que $U \cup W$ é subespaço vetorial de V?
Resposta : Não. Basta considerar $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0\}$ e $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y = 0\}$. Note que $(1, -1) \in U \subset U \cup W$ e $(1, 1) \in W \subset U \cup W$ mas $(1, -1) + (1, 1) = (2, 0) \notin U \cup W$.

Definição 3 *Sejam U e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Definimos a soma de U e W como $U + W = \{u + w; u \in U, w \in W\}$.*

Proposição 3 *Sejam U, W e V como na definição acima. Então $U + W$ é um subespaço vetorial de V.*

Prova:

1. Como $0 \in U$ e $0 \in W$ então $0 = 0 + 0 \in U + W$;

2. Sejam $x_1, x_2 \in U + W$ então $x_j = u_j + w_j$, $u_j \in U$, $w_j \in W$, $j = 1, 2$. Agora, se $\lambda \in \mathbb{R}$ então $x_1 + \lambda x_2 = u_1 + w_1 + \lambda(u_2 + w_2) = (u_1 + \lambda u_2) + (w_1 + \lambda w_2) \in U + W$, pois U e W são subespaços vetoriais.

$\blacksquare$

Proposição 4 *Sejam U e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Então $U \cup W \subset U + W$.*

Prova: Seja $v \in U \cup W$. Se $v \in U$ então $v = v + 0 \in U + W$. Se $v \in W$ então $v = 0 + v \in U + W$. Ou seja, $U \cup W \subset U + W$. ∎

Definição 4 *Sejam U e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Dizemos que $U + W$ é a soma direta de U e W se $U \cap W = \{0\}$. Neste caso usaremos a notação $U \oplus W$ para representar $U + W$.*

Observação 2.0.6 *Note que trivialmente $0 \in U \cap W$ se U e W são subespaços vetoriais.*

Proposição 5 *Sejam U, W subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Temos $V = U \oplus W$ se e somente se para cada $v \in V$ existirem um único $u \in U$ e um único $w \in W$ satisfazendo $v = u + w$.*

Prova: Suponha que $V = U \oplus W$, isto é, $V = U + W$ e $U \cap W = \{0\}$. Então, dado $v \in V$ existem $u \in U$ e $w \in W$ satisfazendo $v = u + w$. Queremos mostrar que tal *decomposição* é única. Suponha que existam $u' \in U$ e $w' \in W$ tais que $v = u' + w'$. Então, $u + w = u' + w'$, o que implica em $u - u' = w' - w$. Mas $u - u' \in U$ e $w' - w \in W$ e, portanto, $u - u' = w' - w \in U \cap W = \{0\}$, ou seja $u = u'$ e $w = w'$.

Suponha agora que para cada $v \in V$ existam um único $u \in U$ e um único $w \in W$ satisfazendo $v = u + w$. É claro que $V = U + W$. Resta mostrar que $U \cap W = \{0\}$. Obviamente, $0 \in U \cap W$. Seja $v \in U \cap W$, isto é, $v \in U$ e $v \in W$. Então, existem um único $u \in U$ e um único $w \in W$ satisfazendo $v = u + w$. Observe que $v = u + w = (u + v) + (w - v)$ com $u + v \in U$ e $w - v \in W$ e, pela unicidade da decomposição, devemos ter $u = u + v$ e $w = w - v$, isto é, $v = 0$. Logo, $U \cap W = \{0\}$.

Alternativamente, poderíamos supor a existência de $v \neq 0$ em $U \cap W$ e daí obteríamos $v = 2v - v = 4v - 3v$, duas decomposições distintas para v já que $2v, 4v \in U$, $2v \neq 4v$ e $-v, -3v \in W$. ∎

Exemplo 8 *Verifique que $\mathbb{R}^3$ é a soma direta de $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y = 0\}$.*

Note que W é de fato um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ pois $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = 0\}$.

Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ podemos escrever

$$(x, y, z) = (x, y, -x - y) + (0, 0, z + x + y)$$

e como $(x, y, -x - y) \in U$ e $(0, 0, z + x + y) \in W$ obtemos $\mathbb{R}^3 = U + W$.

Resta agora mostrar que $U \cap W = \{0\}$. Seja $(x, y, z) \in U \cap W$. Temos

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = (0, 0, 0).$$

Definição 5 *Sejam $U_1, \ldots, U_n$ subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. A soma de U_1 a U_n é definida por*

$$U_1 + \cdots + U_n = \{u_1 + \cdots + u_n; u_j \in U_j, j = 1, \ldots, n\}.$$

Definição 6 *Sejam $U_1, \ldots, U_n$ subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Dizemos que a soma de U_1 a U_n é uma soma direta se*

$$U_j \cap (U_1 + \cdots + U_{j-1} + U_{j+1} + \cdots + U_n) = \{0\}, \quad j = 1, \ldots n.$$

Neste caso usaremos a notação $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ para denotar a soma de U_1 a U_n.

Observação 2.0.7 *É óbvio que $0 \in U_j \cap (U_1 + \cdots + U_{j-1} + U_{j+1} + \cdots + U_n)$ se $U_1, \ldots, U_n$ são subespaços vetoriais.*

Proposição 6 *Sejam $U_1, \dots, U_n$ subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Então $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ se e somente se para cada $v \in V$ existe, para cada $j = 1, \dots, n$, um único $u_j \in U_j$ tal que $v = u_1 + \cdots + u_n$.*

Prova: A prova é análoga à da proposição 5. ∎

Exemplo 9 *Mostre que $\mathcal{P}_2$ é soma direta dos seguintes subespaços vetoriais $U_1 = \{a_0; a_0 \in \mathbb{R}\}$, $U_2 = \{a_1x; a_1 \in \mathbb{R}\}$ e $U_3 = \{a_2x^2; a_2 \in \mathbb{R}\}$.*

Dado $p(x) \in \mathcal{P}_2$, temos $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, para certos coeficientes $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Assim, $\mathcal{P}_2 = U_1 + U_2 + U_3$.

Verifiquemos que a soma é direta.

1. Mostremos que $U_1 \cap (U_2 + U_3) = \{0\}$. Seja $p(x) \in U_1 \cap (U_2 + U_3)$. Então existem $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tais que $p(x) = a_0 = a_1x + a_2x^2$. Se $p(x)$ não fosse o polinômio nulo teríamos um polinômio de grau 0, a_0, coincidindo com um de grau no mínimo 1, $a_1x + a_2x^2$, o que é um absurdo. Logo, $p(x) = 0$.

2. Mostremos que $U_2 \cap (U_1 + U_3) = \{0\}$. Seja $p(x) \in U_2 \cap (U_1 + U_3)$. Então existem $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tais que $p(x) = a_1x = a_0 + a_2x^2$. Se $p(x)$ não fosse o polinômio nulo teríamos um polinômio de grau 1, a_1x, coincidindo com um de grau 0 (caso $a_2 = 0$) ou 2, $a_0 + a_2x^2$, (caso $a_2 \neq 0$), o que é um absurdo. Logo, $p(x) = 0$.

3. Mostremos que $U_3 \cap (U_1 + U_2) = \{0\}$. Seja $p(x) \in U_3 \cap (U_1 + U_2)$. Então existem $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tais que $p(x) = a_2x^2 = a_0 + a_1x$. Se $p(x)$ não fosse o polinômio nulo teríamos um polinômio de grau 2, a_2x^2, coincidindo com um de grau 0 (caso $a_1 = 0$) ou 1, $a_0 + a_1x$, (caso $a_1 \neq 0$), o que é um absurdo. Logo, $p(x) = 0$.

Capítulo 3

Combinações Lineares

3.1 Definição e Exemplos

Definição 7 *Sejam* $u_1, \ldots, u_n$ *elementos de um espaço vetorial* V*. Dizemos que* u *é* combinação linear *de* $u_1, \ldots, u_n$ *se existirem números reais* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *tais que* $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$

Exemplo 10 *Em* $\mathcal{P}_2$*, o polinômio* $p(x) = 2 + x^2$ *é uma combinação dos polinômios* $p_1(x) = 1$*,* $p_2(x) = x$ *e* $p_3(x) = x^2$*.*

Basta ver que $p(x) = 2p_1(x) + 0p_2(x) + p_3(x)$.

Exemplo 11 *Verifique que em* $\mathcal{P}_2$*, o polinômio* $p(x) = 1 + x^2$ *é uma combinação dos polinômios* $q_1(x) = 1$*,* $q_2(x) = 1 + x$ *e* $q_3(x) = 1 + x + x^2$*.*

Precisamos encontrar números reais α, β e γ tais que $p(x) = \alpha q_1(x) + \beta q_2(x) + \gamma q_3(x)$. Ou seja, precisamos encontrar α, β e γ satisfazendo

$$1 + x^2 = \alpha + \beta(1 + x) + \gamma(1 + x + x^2) = \alpha + \beta + \gamma + (\beta + \gamma)x + \gamma x^2,$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 1 \end{cases} \iff \alpha = 1, \beta = -1 \text{ e } \gamma = 1.$$

3.2 Geradores

Definição 8 *Sejam* V *um espaço vetorial e* S *um subconjunto não vazio de* V*. Usaremos o símbolo* $[S]$ *para denotar o conjunto de todas as combinações lineares dos elementos de* S*. Em outras palavras,* $u \in [S]$ *se existirem* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ *e* $u_1, \ldots, u_n \in S$ *tais que* $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$*.*

Proposição 7 *Sejam* V *um espaço vetorial e* S *um subconjunto não vazio de* V*. Então* $[S]$ *é um subespaço vetorial de* V*.*

Prova:

1. Como $S \neq \emptyset$ existe $u \in S$. Logo, $0 = 0u \in [S]$.

2. Se $u, v \in [S]$ então existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$ e $u_1, \ldots, u_n$, $v_1, \ldots, v_m \in S$ tais que $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ e $v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m$. Assim, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$u + \lambda v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n + \lambda(\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m)$$
$$= \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n + \lambda\beta_1 v_1 + \cdots + \lambda\beta_m v_m \in [S].$$

∎

Definição 9 *Sejam S e V como acima. Diremos que $[S]$ é o subespaço vetorial gerado por S. Os elementos de S são chamados de* geradores *de $[S]$. Se $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ também usaremos a notação $[S] = [u_1, \ldots, u_n]$.*

Proposição 8 *Sejam S e T subconjuntos não-vazios de um espaço vetorial V. Temos*

1. $S \subset [S]$;
2. *Se $S \subset T$ então $[S] \subset [T]$;*
3. $[[S]] = [S]$;
4. *Se S é um subespaço vetorial então $S = [S]$;*
5. $[S \cup T] = [S] + [T]$.

Prova:

1. Se $u \in S$ então $u = 1u \in [S]$;
2. Se $u \in [S]$ então existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ e $u_1, \ldots, u_n \in S$ tais que $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$. Como $S \subset T$ temos $u_1, \ldots, u_n \in T$ e, portanto, $u \in [T]$;
3. Pelo item 1 desta proposição, $[S] \subset [[S]]$. Seja $u \in [[S]]$. Segue da definição que u é uma combinação linear de elementos de $[S]$, mas como cada elemento de $[S]$ é uma combinação linear de elementos de S resulta que u é uma combinação linear de elementos de S, ou seja, $u \in [S]$;
4. Pelo item 1, $S \subset [S]$. Seja $u \in [S]$. Então u é uma combinação linear de elementos de S. Como S é um subespaço vetorial, esta combinação linear é um elemento de S;
5. Seja $u \in [S \cup T]$. Por definição, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$ e $u_1, \ldots, u_n \in S$ e $v_1, \ldots, v_m \in T$ tais que
$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m$$
$$= (\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) + (\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m) \in [S] + [T].$$
Reciprocamente, se $u \in [S] + [T]$ então $u = v + w$ com $v \in [S]$ e $w \in [T]$. Dessa forma, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q \in \mathbb{R}$ e $v_1, \ldots, v_p \in S$ e $w_1, \ldots, w_q \in T$ tais que
$$u = v + w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_q w_q \in [S \cup T].$$

∎

Definição 10 *Dizemos que um espaço vetorial V é* finitamente gerado *se existir um subconjunto finito $S \subset V$ tal que $V = [S]$.*

São exemplos de espaços vetoriais finitamente gerados:

1. $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = [1, x, \ldots, x^n]$;
2. $\mathbb{R}^n$ é gerado por $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots$, $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$.

3. $M_{m\times n}(\mathcal{R})$ é gerado pelas matrizes $E_{kl} = (\delta_{i,j}^{(k,l)})$, $k = 1, \ldots, m$, $l = 1, \ldots n$, onde

$$\delta_{i,j}^{(k,l)} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) = (k,l) \\ 0 & \text{caso contrário .} \end{cases}$$

Exemplo 12 *Seja $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial formado por todos os polinômios. Afirmamos que $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado.*

Note que $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ fosse finitamente gerado existiriam polinômios $p_1(x), \ldots,$ $p_n(x)$ tais que $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = [p_1(x), \ldots, p_n(x)]$. Seja N o grau mais alto dentre os polinômios $p_1(x), \ldots, p_n(x)$. É evidente que x^{N+1} não pode ser escrito como combinação linear de $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ e, assim, $x^{N+1} \notin [p_1(x), \ldots, p_n(x)] = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Uma contradição.

Exemplo 13 *Seja V um espaço vetorial gerado por $u_1, \ldots, u_n$. Mostre que se, por exemplo, u_1 é uma combinação linear de $u_2, \ldots, u_n$ então V é gerado por $u_2, \ldots, u_n$.*

Devemos mostrar que todo $u \in V$ se escreve como uma combinação linear de $u_2, \ldots, u_n$. Sabemos que existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ e existem também $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ satisfazendo $u_1 = \beta_1 u_2 + \cdots + \beta_{n-1} u_n$. Combinando estas informações, obtemos

$$u = \alpha_1(\beta_1 u_2 + \cdots + \beta_{n-1} u_n) + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$$

$$= (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2)u_2 + \cdots + (\alpha_1\beta_{n-1} + \alpha_n)u_n \in [u_2, \ldots, u_n].$$

Exemplo 14 *Sejam $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; x - y + t + z = 0\}$ e $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; x + y - t + z = 0\}$. Encontre um conjunto de geradores para os seguintes subespaços vetoriais: U, V, $U \cap V$ e $U + V$.*

1. Se $(x,y,z,t) \in U$ então $y = x + z + t$ e, portanto,

   $$(x,y,z,t) = (x, x+z+t, z, t) = x(1,1,0,0) + z(0,1,1,0) + t(0,1,0,1),$$

   isto é,
   $$U = [(1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,1,0,1)].$$

2. Se $(x,y,z,t) \in V$ então $t = x + y + z$ e, portanto,

   $$(x,y,z,t) = (x, y, z, x+y+z) = x(1,0,0,1) + y(0,1,0,1) + z(0,0,1,1),$$

   isto é,
   $$V = [(1,0,0,1), (0,1,0,1), (0,0,1,1)].$$

3. Se $(x,y,z,t) \in U \cap V$ então
   $$\begin{cases} x - y + t + z = 0 \\ x + y - t + z = 0, \end{cases}$$
   que implica em $x = -z$ e $y = t$. Desse modo, $(x,y,z,t) = (x, y, -x, y) = x(1,0,-1,0) + y(0,1,0,1)$ e, portanto,
   $$U \cap V = [(1,0,-1,0), (0,1,0,1)].$$

4. Como $U + V = [U] + [V] = [U \cup V]$, temos que

   $$U + V = [(1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,1,0,1),$$

   $$(1,0,0,1), (0,1,0,1), (0,0,1,1)]$$

$$= [(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(1,0,0,1),(0,0,1,1)].$$

Observe que

$$(1,1,0,0) = (1,0,0,1) + (0,1,1,0) - (0,0,1,1)$$

e, portanto,

$$U + V = [(0,1,1,0),(0,1,0,1),(1,0,0,1),(0,0,1,1)].$$

Veremos mais adiante que este é o número mínimo de geradores para o subespaço $U + V$.

Capítulo 4

Dependência Linear

4.1 Definição e Exemplos

Definição 11 *Dizemos que uma seqüência de vetores* $u_1, \dots, u_n$ *de um espaço vetorial* V *é linearmente independente (l.i., abreviadamente) se a combinação linear* $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$ *só for satisfeita quando* $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Observação 4.0.8 *Note que se* $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ *então* $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$, *porém, a recíproca nem sempre é válida. Basta ver que, por exemplo, em* $\mathbb{R}^2$ *temos* $(0,0) = (1,1) + (-1,-1)$.

Observação 4.0.9 *A definição de independência linear para a seqüência* $u_1, \dots, u_n$ *é equivalente a dizer que se* $\beta_i \neq 0$ *para algum* $i \in \{1, \dots, n\}$ *então* $\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n \neq 0$.

Definição 12 *Dizemos que uma seqüência* $u_1, \dots, u_n$ *de um espaço vetorial* V *é linearmente dependente (l.d., abreviadamente) se não for linearmente independente.*

Observação 4.0.10 *A definição de dependência linear para a seqüência* $u_1, \dots, u_n$ *é equivalente a dizer que é possível encontrar números reais* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *não todos nulos tais que* $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$.

Exemplo 15 $O, u_1, \dots, u_n \subset V$ *é uma seqüência l.d., onde* O *é o elemento neutro do espaço vetorial* V.

Basta verificar que $1O + 0u_1 + \cdots + 0u_n = O$.

Exemplo 16 *Verifique se a seqüência* $(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)$ *é linearmente independente em* $\mathbb{R}^3$.

É preciso verificar quais são as possíveis soluções de

$$\alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0) = (0,0,0).$$

Isto equivale a resolver o sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \gamma = 0, \end{cases}$$

que possui como única solução, $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Logo, a seqüência acima é l.i..

Exemplo 17 *Considere os vetores em* $\mathbb{R}^3$ *dados por* $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ *e* $u_3 = (x_3, y_3, z_3)$. *Encontre uma condição necessária e suficiente para que os vetores* u_1, u_2, u_3 *sejam linearmente independentes.*

Vejamos, os vetores acima serão l.i. se e somente se $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$ apresentar como única solução $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Isto é equivalente a que o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0 \\ \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 = 0 \end{cases}$$

possua solução única e, como se sabe, isto é equivalente que a matriz

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

possua determinante diferente de zero. Note que as colunas desta matriz são formadas pelos coeficientes de u_1, u_2 e u_3. O mesmo resultado vale se colocarmos os coeficientes dos vetores u_1, u_2 e u_3 como linhas. Por quê?

Exercício 1 *Enuncie e demonstre um resultado análogo ao exemplo anterior para uma seqüência com n vetores do $\mathbb{R}^n$.*

Exemplo 18 *Verifique se as matrizes*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

são linearmente independentes em $M_2(\mathbb{R})$.

Procuremos as soluções de

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que equivale a

$$\begin{pmatrix} \alpha + \beta & \beta + \gamma \\ 0 & \alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que possui como solução $(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, -\alpha, \alpha)$ para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$. Dessa forma, a seqüência de matrizes dada é linearmente dependente, bastando tomar, por exemplo, $\alpha = 1$, $\beta = -1$ e $\gamma = 1$.

Exemplo 19 *Verifique se as funções* $\cos$ *e* sen *são l.d. em $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.*

Como $\cos$ e sen são funções definidas em $\mathbb{R}$, a combinação nula

$$\alpha \cos + \beta \operatorname{sen} = 0$$

significa que $\alpha \cos x + \beta \operatorname{sen} x = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, para $x = 0$ vemos que $\alpha = 0$ e para $x = \pi/2$, vem $\beta = 0$. Portanto, $\cos$ e sen são l.i..

Exemplo 20 *Verifique se as funções* $\cos^2, \operatorname{sen}^2, 1$ *são l.d. em $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.*

Como

$$1 - \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

resulta que as funções acima são l.d..

Exercício 2 *Sejam $f(x) = \cos 2x$, $g(x) = \cos^2 x$ e $h(x) = \operatorname{sen}^2 x$, $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f, g, h são linearmente dependentes em $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.*

4.2 Propriedades

Proposição 9 *Se $u_1, \ldots, u_n$ são l.d. em um espaço vetorial V então existem $j \in \{1, \ldots, n\}$ e números reais $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ tais que*
$$u_j = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{j-1} u_{j-1} + \alpha_j u_{j+1} + \cdots + \alpha_{n-1} u_n.$$

Prova: Como $u_1, \ldots, u_n$ são l.d. existem números reais $\beta_1, \ldots, \beta_n$ não todos nulos tais que $\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n = 0$. Desse modo, existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\beta_j \neq 0$ e, assim,

$$u_j = -\frac{\beta_1}{\beta_j} u_1 - \cdots - \frac{\beta_{j-1}}{\beta_j} u_{j-1} - \frac{\beta_{j+1}}{\beta_j} u_{j+1} - \cdots - \frac{\beta_n}{\beta_j} u_n.$$

∎

Proposição 10 *Se $u_1, \ldots, u_n$ são linearmente dependentes em um espaço vetorial V então $u_1, \ldots, u_n$, $u_{n+1}, \ldots, u_m$ também são linearmente dependentes.*

Prova: Como existem números reais $\beta_1, \ldots, \beta_n$ não todos nulos tais que $\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n = 0$, podemos escrever
$$\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n + 0 u_{n+1} + \cdots + 0 u_m = 0$$
sendo que nesta última expressão nem todos os coeficientes são nulos. ∎

Proposição 11 *Se $u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_m$ são l.i. em um espaço vetorial V então $u_1, \ldots, u_n$ também são.*

Prova: Suponha que $\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n = 0$. Mas como

$$\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n + 0 u_{n+1} + \cdots + 0 u_m = 0$$

e estes vetores são l.i., segue que $\beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$. ∎

Proposição 12 *Se $u_1, \ldots, u_n$ são l.i. em um espaço vetorial V e $u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}$ são l.d. então u_{n+1} é combinação linear de $u_1, \ldots, u_n$.*

Prova: Existem $\beta_1, \ldots, \beta_{n+1}$ não todos nulos tais que

$$\beta_1 u_1 \cdots + \beta_n u_n + \beta_{n+1} u_{n+1} = 0.$$

Agora, se $\beta_{n+1} = 0$ então a expressão acima ficaria

$$\beta_1 u_1 \cdots + \beta_n u_n = 0.$$

Ora, os vetores $u_1, \ldots, u_n$ são l.i. e, assim, deveríamos ter também $\beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$. Uma contradição. ∎

Proposição 13 *Sejam $u_1, \ldots, u_n$ vetores l.i. em um espaço vetorial V. Se $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n$ então $\alpha_j = \beta_j$, $j = 1, \ldots, n$.*

Prova: Temos
$$(\alpha_1 - \beta_1) u_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) u_n = 0$$
e como $u_1, \ldots, u_n$ são l.i. então $\alpha_j - \beta_j = 0$, isto é $\alpha_j = \beta_j$, para todo $j = 1, \ldots, n$. ∎

Capítulo 5

Base e Dimensão

5.1 Base

Definição 13 *Seja $V \neq \{0\}$ um espaço vetorial finitamente gerado. Uma base de V é uma seqüência de vetores linearmente independentes B de V que também gera V.*

Exemplo 21 *Os vetores de $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$.*

Vê-se facilmente que os vetores de B são l.i. e que todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ se escreve como $(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$.

Exemplo 22 *Os vetores $e_1, \cdots, e_n \in \mathbb{R}^n$ onde $e_1 = (1,0,\ldots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\ldots,0)$, $\ldots$, $e_n = (0,\ldots,0,1)$ formam uma base de $\mathbb{R}^n$.*

Exemplo 23 $(1,1)$ *e* $(1,-1)$ *formam uma base de $\mathbb{R}^2$.*

É preciso mostrar que estes vetores são l.i. e que todo ponto de $\mathbb{R}^2$ se escreve como combinação linear de $(1,1)$ e $(1,-1)$. No entanto, se mostrarmos que todo ponto de $\mathbb{R}^2$ se escreve *de maneira única* como combinação linear de $(1,1)$ e $(1,-1)$ já estaremos mostrando as duas propriedades ao mesmo tempo. (Por quê?)

Seja $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. O nosso problema se resume em mostrar que existe um único $\alpha \in \mathbb{R}$ e um único $\beta \in \mathbb{R}$ satisfazendo $(x,y) = \alpha(1,1) + \beta(1,-1) = (\alpha+\beta, \alpha-\beta)$. Esta última expressão é equivalente ao seguinte sistema linear

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \alpha - \beta = y. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos uma única solução dada por $\alpha = (x+y)/2$ e $\beta = (x-y)/2$.

Exemplo 24 *As matrizes em* $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ *formam uma base para $M_2(\mathbb{R})$.*

Exercício 3 *Verifique se os elementos de $B = \{1+x, 1-x, 1-x^2\}$ formam uma base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.*

Teorema 1 *Todo espaço vetorial $V \neq \{0\}$ finitamente gerado admite uma base. Em outras palavras, há uma seqüência de vetores l.i. de V formada por geradores.*

Prova: Como $V \neq \{0\}$ é finitamente gerado existem $u_1, \ldots, u_n \in V$ tais que $V = [u_1, \ldots, u_n]$. Se $u_1, \ldots, u_n$ forem l.i., então esta seqüência é uma base de V e não há nada mais a ser provado.

Suponhamos que $u_1, \ldots, u_n$ sejam l.d.. Podemos supor que $u_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, m$. Como $u_1 \neq 0$, u_1 é l.i. Agora, se todo u_j, $j = 2, \ldots, n$ puder se escrever como combinação linear de u_1 então $V = [u_1]$ e u_1 é uma base de V. Caso isto não ocorra, é porque existe algum u_j, com $2 \leq j \leq n$ tal que u_1, u_j são l.i.. Por simplicidade, suponhamos que seja o u_2, isto é, u_1, u_2 são l.i.. Bem, se todos os vetores $u_3, \ldots, u_n$ forem combinações lineares de u_1 e u_2 então $V = [u_1, u_2]$ e u_1, u_2 formam uma base de V. Podemos repetir este processo e como o número de elementos de $L = \{u_1, \ldots, u_n\}$ é finito, ele finda. Desse modo, existe uma seqüência de vetores l.i. dentre os vetores L que gera V. Esta seqüência forma uma base de V. ∎

5.2 Dimensão

Teorema 2 *Em um espaço vetorial $V \neq \{0\}$ finitamente gerado toda base possui o mesmo número de elementos.*

Prova: Sejam $u_1, \ldots, u_n$ e $v_1, \ldots, v_m$ bases de um espaço vetorial finitamente gerado V. Suponhamos que $n > m$ e mostremos que isto implicará que $u_1, \ldots, u_n$ são l.d., o que contraria o fato de formarem uma base.

Como os vetores $v_1, \ldots, v_m$ geram V podemos escrever para cada $1 \leq j \leq n$,

$$u_j = \alpha_{1j} v_1 + \cdots + \alpha_{mj} v_m.$$

Assim, a combinação linear nula $x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n = 0$ é equivalente a

$$x_1 \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{i1} v_i \right) + \cdots + x_n \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{in} v_i \right) = 0,$$

ou ainda,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_{1j} \right) v_1 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_{mj} \right) v_m = 0.$$

Como $v_1, \ldots, v_m$ são l.i. então $\sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_{ij} = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Estas m equações representam um sistema linear homogêneo com n incógnitas. Como $n > m$, existe uma solução não trivial, isto é, uma solução $x_1, \ldots, x_n$ onde pelo menos um x_j é diferente de zero. Assim, $u_1, \ldots, u_n$ são l.d., uma contradição. ∎

Definição 14 *Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Se $V = \{0\}$ definimos a dimensão de V como sendo 0. Se $V \neq \{0\}$ definimos a dimensão de V como sendo o número de elementos de uma base qualquer de V. Usaremos o símbolo $\dim V$ para designar a dimensão de V.*

Definição 15 *Se um espaço vetorial não é finitamente gerado dizemos que V possui dimensão infinita.*

A seguinte proposição é um resultado da prova do teorema 2.

Proposição 14 *Em um espaço vetorial de dimensão m qualquer seqüência de vetores com mais de m elementos é linearmente dependente.*

Exemplo 25 $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Exemplo 26 *A dimensão de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ é infinita. Veja o exemplo 12.*

Exemplo 27 $\dim \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = n + 1$.

Basta notar que os polinômios $1, x, \ldots, x^n$ formam uma base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

Exemplo 28 $\dim M_{m \times n}(\mathbb{R}) = mn$.

Note que o as matrizes

$$A_{k,l} = (\delta^{k,l}_{i,j})_{\substack{1\le i\le m,\\ 1\le j\le n}}$$

$k = 1, \dots, m$, $l = 1, \dots, n$ onde

$$\delta^{k,l}_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) = (k,l) \\ 0 & \text{se } (i,j) \neq (k,l) \end{cases}$$

formam uma base de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Exercício 4 *A dimensão do espaço das matrizes quadradas e simétricas de ordem n é $n(n+1)/2$.*

Teorema 3 (Completamento) *Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Se $u_1, \dots, u_r$ são l.i. em V com $r < n$ então existem $u_{r+1}, \dots, u_n$ tais que $u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n$ formam uma base de V.*

Prova: Como $r < n$ existe $u_{r+1} \in V$ tal que $u_1, \dots, u_r, u_{r+1}$ são l.i., pois caso contrário os vetores $u_1, \dots, u_r$ formariam uma base de V, o que é impossível pois $\dim V = n > r$.

Se $r + 1 = n$ então $u_1, \dots, u_r, u_{r+1}$ formam uma base de V que contém L.

Se $r+1 < n$ então é possível encontrar $u_{r+2} \in V$ tal que $u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, u_{r+2}$ são l.i., pois caso contrário a seqüência $u_1, \dots, u_r, u_{r+1}$ seria uma base de V, o que é impossível pois $\dim V = n > r + 1$.

Repetindo os argumentos acima, encontramos vetores $u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_{r+k}$, onde $r + k = n$, de forma que

$$u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_{r+k}$$

são l.i. e, como $\dim V = n = r + k$, segue que esta seqüência de vetores é uma base de V que contém os vetores $u_1, \dots, u_r$. ∎

Exemplo 29 *Encontre uma base do $\mathbb{R}^3$ que contenha o vetor $(1, 1, -1)$.*

Como a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é três, precisamos encontrar dois vetores, (a, b, c), (x, y, z), que juntamente com $(1, 1, -1)$ sejam l.i.. Porém, pelo exemplo 17, sabemos que isto é equivalente ao determinante de

$$\begin{pmatrix} 1 & a & x \\ 1 & b & y \\ -1 & c & z \end{pmatrix}$$

que é seja diferente de zero. Há uma infinidade de possibilidades para que isto aconteça. Por exemplo, tomando $(a, b, c) = (0, 1, 1)$ e $(x, y, z) = (0, 0, 1)$.

Proposição 15 *Seja U um subespaço vetorial de um espaço vetorial de dimensão finita V. Se $\dim U = \dim V$ então $U = V$.*

Prova: Sejam $u_1, \dots, u_n$ vetores que formam uma base de U. Temos $U = [u_1, \dots, u_n]$. Como $n = \dim U = \dim V$, vemos que para qualquer $v \in V$, a seqüência $u_1, \dots, u_n, v$ é l.d. pela proposição 14, porém, como $u_1, \dots, u_n$ são l.i., segue-se que v é uma combinação linear destes vetores. Desse modo, todo elemento de V se escreve como combinação linear de $u_1, \dots, u_n$. Ou seja, $V = [u_1, \dots, u_n] = U$. ∎

5.3 Dimensão de Soma de Subespaços Vetoriais

Proposição 16 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Se U e W são subespaços vetoriais de V então*

$$\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W \tag{5.1}$$

Prova: Note primeiramente que todo subespaço de um espaço vetorial de dimensão finita tem também dimensão finita.

Sejam $v_1, \dots, v_m$ elementos de uma base de $U \cap W$. Como estes vetores são l.i. e pertencem a U, pelo teorema 3, existem $u_1, \dots, u_p \in U$ tais que $u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_m$ formam uma base de U. Por outro lado, $v_1, \dots, v_m$ também pertencem a W e pelo mesmo teorema é possível encontrar $w_1, \dots, w_q \in W$ de modo que $w_1, \dots, w_q, v_1, \dots, v_m$ formem uma base de W.

Com a notação usada, temos $\dim(U \cap W) = m$, $\dim U = m + p$ e $\dim W = m + q$. Sendo assim, a fim de mostrarmos que 5.1 é válida, é necessário e, na verdade, suficiente mostrar que $\dim(U + W) = m + p + q$. Para tanto, basta mostrarmos que os vetores

$$u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_q, v_1, \dots, v_m \tag{5.2}$$

formam uma base de $U + W$.

Mostremos primeiramente que eles geram $U + W$: dado $v \in U + W$ existem $u \in U$ e $w \in W$ tais que $v = u + w$. Usando as bases tomadas acima de U e W podemos escrever

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p + \alpha_{p+1} v_1 + \cdots + \alpha_{p+m} v_m$$

e

$$w = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_q w_q + \beta_{q+1} v_1 + \cdots + \beta_{q+m} v_m,$$

onde $\alpha_1, \dots, \alpha_{p+m}, \beta_1, \dots, \beta_{q+m} \in \mathbb{R}$. Somando as duas últimas equações obtemos

$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_q w_q + (\alpha_{p+1} + \beta_{q+1}) v_1 + \cdots + (\alpha_{p+m} + \beta_{q+m}) v_m$$

mostrando que os vetores de 5.2 geram $U + W$.

Verifiquemos que os vetores em 5.2 são l.i.. Suponha que

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_q w_q + \delta_1 v_1 + \cdots + \delta_m v_m = 0, \tag{5.3}$$

ou seja

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p + \delta_1 v_1 + \cdots + \delta_m v_m = -\beta_1 w_1 + \cdots - \beta_q w_q.$$

Como $u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_m$ são vetores de U e $w_1, \dots, w_q$ são vetores de W segue-se que

$$-\beta_1 w_1 - \cdots - \beta_q w_q \in U \cap W = [v_1, \dots, v_m].$$

Conseqüentemente, existem $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ tais que

$$-\beta_1 w_1 - \cdots - \beta_q w_q = \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_m v_m,$$

ou seja,

$$\beta_1 w_1 + \cdots + \beta_q w_q + \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_m v_m = 0.$$

Como $w_1, \dots, w_q, v_1, \dots, v_m$ são l.i., pois formam uma base de W, segue-se que $\gamma_1 = \cdots = \gamma_m = \beta_1 = \cdots = \beta_q = 0$. Assim, a equação 5.3 se reduz a

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p + \delta_1 v_1 + \cdots + \delta_m v_m = 0$$

e como $u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_m$ são l.i., pois formam uma base de U, segue-se que

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = \delta_1 = \cdots = \delta_m = 0,$$

donde se conclui que os vetores de 5.2 são l.i.. ∎

Observação 5.3.1 *Note que se V, U e W são como na proposição 16 e se além do mais tivermos $V = U + W$ e $\dim U + \dim W > \dim V$ então $U \cap W \neq \{0\}$, isto é, a soma $U + W$ não é direta.*

Bem, se fosse $U \cap W = \{0\}$ então pela proposição 16 teríamos

$$0 = \dim (U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim (U + W)$$

$$= \dim U + \dim W - \dim V > 0,$$

um absurdo.

Exemplo 30 *Sejam $U = \{p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}); p(0) = p(1) = 0\}$ e $V = \{p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}); p(-1) = 0\}$. Encontre uma base para U, V, $U \cap V$ e $U + V$.*

U : Temos

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in U \iff p(0) = p(1) = 0$$

$$\iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff p(x) = -(a_2 + a_3)x + a_2x^2 + a_3x^3 = a_2(x^2 - x) + a_3(x^3 - x).$$

Desse modo, $U = [x^2 - x, x^3 - x]$ e estes polinômios são l.i. pois como cada um tem um grau distinto do outro, nenhum pode ser múltiplo do outro. Assim, $x^2 - x$ e $x^3 - x$ formam uma base de U.

V :

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in V$$

$$\iff p(-1) = 0 \iff a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0$$

$$\iff p(x) = a_0 + (a_0 + a_2 - a_3)x + a_2x^2 + a_3x^3$$

$$= a_0(1 + x) + a_2(x^2 + x) + a_3(x^3 - x).$$

Desse modo, $V = [1 + x, x^2 + x, x^3 - x]$ e estes polinômios são l.i. pois como cada um tem um grau distinto do outro, nenhum pode ser uma combinação linear dos outros dois. Portanto, $1 + x, x^2 + x$ e $x^3 - x$ formam uma base de V.

$U \cap V$:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in U \cap V \iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_0 = a_2 = 0 \\ a_1 = -a_3 \end{cases} \quad \iff p(x) = -a_1(x^3 - x).$$

Logo, $x^3 - x$ é uma base de $U \cap V$.

$U + V$: Temos $\dim (U + V) = 2 + 3 - 1 = 4 = \dim \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Pela proposição 15 temos que $U + V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e podemos tomar como base os polinômios $1, x, x^2$ e x^3.

Exemplo 31 *Voltemos ao exemplo 14. Sabemos que*

$$\begin{aligned} U &= [(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1)] \\ V &= [(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)] \\ U \cap V &= [(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 1)] \\ U + V &= [(0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1)] \end{aligned}$$

Verifiquemos que os geradores acima são na verdade bases para os respectivos subespaços vetoriais. Para tanto basta verificar que cada seqüência de vetores acima é l.i..

Analisemos primeiramente para U: se

$$\alpha(1,1,0,0)+\beta(0,1,1,0)+\gamma(0,1,0,1)=(0,0,0,0)$$

então

$$(\alpha,\alpha+\beta+\gamma,\beta,\gamma)=(0,0,0,0)$$

que implica em $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Vejamos agora o caso do subespaço V: se

$$\alpha(1,0,0,1)+\beta(0,1,0,1)+\gamma(0,0,1,1)=(0,0,0,0)$$

então

$$(\alpha,\beta,\gamma,\alpha+\beta+\gamma)=(0,0,0,0)$$

que implica em $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Passemos agora a $U\cap V$: se

$$\alpha(1,0,-1,0)+\beta(0,1,0,1)=(\alpha,\beta,-\alpha,\beta)=(0,0,0,0)$$

que implica em $\alpha=\beta=0$.

Pela proposição 16 temos $\dim(U+V)=3+3-2=4$. Como $(0,1,1,0)$, $(0,1,0,1)$, $(1,0,0,1)$, $(0,0,1,1)$ geram $U+V$ segue-se do fato da dimensão deste subespaço ser quatro que formam uma base para $U+V$. Como a dimensão de $\mathbb{R}^4$ também e $U+V\subset\mathbb{R}^4$, temos pela proposição 15 que $U+V=\mathbb{R}^4$. Note que esta soma não é direta.

5.4 Coordenadas

Sejam V um espaço vetorial finitamente gerado e B uma base de V formada pelos vetores $u_1,\dots,u_n$. Como B é uma base de V, todo elemento de $u\in V$ se escreve como $\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_nu_n$, com os coeficientes $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$. Pela proposição 13, os coeficientes $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ são unicamente determinados pelo vetor u. Estes coeficientes são denominados coordenas de u com relação à base B. Representaremos as coordenadas de u com relação à base como

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}_B \quad \text{ou simplesmente por} \quad \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} \quad \text{quando } B \text{ estiver subentendida.}$$

Exemplo 32 *Mostre que os vetores* $(1,1,1)$, $(0,1,1)$ *e* $(0,0,1)$ *formam uma base de* $\mathbb{R}^3$. *Encontre as coordenadas de* $(1,2,0)\in\mathbb{R}^3$ *com relação à base* B *formada pelos vetores acima.*

Já sabemos que $\dim\mathbb{R}^3=3$. Para verificar se os vetores acima formam uma base de V, basta verificar se eles são l.i.. Utilizando o exemplo 17 vemos que estes vetores são de fato l.i. pois a matriz

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

possui determinante igual a $1\neq0$.

$$(1,2,0)=\alpha(1,1,1)+\beta(0,1,1)+\gamma(0,0,1)=(\alpha,\alpha+\beta,\alpha+\beta+\gamma)$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha + \beta = 2 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

cuja (única) solução é $\alpha = 1$, $\beta = 1$ e $\gamma = -2$. Desse modo, as coordenadas de $(1, 2, 0)$ com relação à base B são dadas por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}_B .$$

Exemplo 33 *Mostre que os polinômios $1, x, x^2 - x$ formam uma base, B, de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Encontre as coordenadas de $1 + x + x^2$ com relação à base B. Encontre também as coordenadas deste mesmo polinômio com relação à base C formada pelos polinômios 1, x e x^2.*

Pa verificar que $1, x, x^2 - x$ formam uma base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ basta mostrar cada $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ se escreve de maneira única como combinação linear de $1, x$ e $x^2 - x$. Isto é equivalente a mostrar que a equação $p(x) = \alpha 1 + \beta x + \gamma(x^2 - x)$ possui uma única solução $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. A equação acima se escreve como

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = \alpha + (\beta - \gamma)x + \gamma x^2,$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \alpha = a_0 \\ \beta - \gamma = a_1 \\ \gamma = a_2, \end{cases}$$

que possui uma única solução dada por $\alpha = a_0$, $\beta = a_1 + a_2$, e $\gamma = a_2$.

Com isso em mãos, vemos que as coordenadas de $1 + x + x^2$ com relação à base B são dadas por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B .$$

Note que com relação à base C formada por 1, x e x^2 as coordenadas de $1 + x + x^2$ são dadas por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_C .$$

Capítulo 6

Mudança de Base

Como vimos no exemplo 33 as coordenadas de um elemento de um espaço vetorial podem variar quando se consideram bases distintas. O que passaremos a estudar agora é como esta mudança ocorre, ou seja, como é possível encontrar as coordenadas de um vetor com relação a uma base sabendo-se suas coordenadas com relação a uma outra.

Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Sejam B e C bases de V formadas pelos vetores $u_1, \ldots, u_n$ e $v_1, \ldots, v_n$, respectivamente. Como B é uma base, existem $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq n$ tais que

$$\begin{array}{rcl} v_1 & = & \alpha_{11}u_1 + \cdots + \alpha_{n1}u_n \\ & \vdots & \\ v_n & = & \alpha_{1n}u_1 + \cdots + \alpha_{nn}u_n. \end{array}$$

Desta forma, as coordenadas de $v_1, \ldots, v_n$, com relação à base B são, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}_B, \qquad \cdots, \qquad \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix}_B.$$

Reunimos estas informações sobre as coordenadas dos vetores da base C com relação à base B na seguinte matriz

$$M_B^C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

cujas colunas são formadas pelas coordenas de $v_1, \ldots, v_n$ com relação à base B. A matriz M_B^C é chamada de matriz mudança de base da base B para a base C.

Antes de mostrarmos a relação que existe entre M_B^C e as coordenadas de um dado vetor com relação às bases B e C, vejamos como podemos encontrar a matriz de mudança de base em um exemplo no $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 34 *Considere a base B em $\mathbb{R}^3$ formada pelos vetores $(1,0,1)$, $(1,1,1)$ e $(1,1,2)$. Considere também a base C formada pelos vetores $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$. Encontre M_B^C.*

Precisamos resolver

$$\begin{array}{rcl} (1,0,0) & = & \alpha_{11}(1,0,1) + \alpha_{21}(1,1,1) + \alpha_{31}(1,1,2) \\ (0,1,0) & = & \alpha_{12}(1,0,1) + \alpha_{22}(1,1,1) + \alpha_{32}(1,1,2) \\ (0,0,1) & = & \alpha_{13}(1,0,1) + \alpha_{23}(1,1,1) + \alpha_{33}(1,1,2) \end{array} \iff$$

$$\begin{array}{rcl} (\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31}, \alpha_{21} + \alpha_{31}, \alpha_{11} + \alpha_{21} + 2\alpha_{31}) & = & (1,0,0) \\ (\alpha_{12} + \alpha_{22} + \alpha_{32}, \alpha_{22} + \alpha_{32}, \alpha_{12} + \alpha_{22} + 2\alpha_{32}) & = & (0,1,0) \\ (\alpha_{13} + \alpha_{23} + \alpha_{33}, \alpha_{23} + \alpha_{33}, \alpha_{13} + \alpha_{23} + 2\alpha_{33}) & = & (0,0,1). \end{array}$$

Um momento de reflexão nos poupará um pouco de trabalho neste ponto. Note que cada linha acima representa um sistema de três equações com três incógnitas e que a matriz associada a cada um destes sistemas é a mesma. O que muda são os nomes das variáveis e o segundo membro. Utilizando como variáveis x, y e z, basta resolvermos o seguinte sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$. O sistema acima é equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c-a \end{pmatrix}$$

cuja única solução é dada por $x = a - b$, $y = a + b - c$ e $z = c - a$.

Tomando $(a, b, c) = (1, 0, 0)$ obtemos $(\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}) = (1, 1, -1)$.

Tomando $(a, b, c) = (0, 1, 0)$ obtemos $(\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}) = (-1, 1, 0)$.

Tomando $(a, b, c) = (0, 0, 1)$ obtemos $(\alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33}) = (0, -1, 1)$. Desta forma, obtemos

$$M_B^C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercício 5 *Com as notações do exemplo acima, encontre* M_C^B.

Vejamos agora como as coordenadas de um vetor se relacionam com respeito a duas bases de um espaço vetorial de dimensão finita.

Sejam B e C bases de um espaço vetorial de dimensão finita formadas, respectivamente, pelos vetores $u_1, \ldots, u_n$ e $v_1, \ldots, v_n$. Dado um vetor u em V sejam

$$u_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_B \quad \text{e} \quad u_C = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_C$$

as suas coordenadas com relação às bases B e C, respectivamente. Se $M_B^C = (\alpha_{ij})$ representa a matriz de mudança da base B para base C, então como $v_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} u_i$, $j = 1, \ldots, n$, obtemos

$$u = \sum_{i=1}^n x_i u_i = \sum_{j=1}^n y_j v_j = \sum_{j=1}^n y_j \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} u_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j \right) u_i$$

onde na última igualdade invertemos a ordem da soma. Como os vetores $u_1, \ldots, u_n$ são l.i., segue-se que $x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j$, $i = 1, \ldots, n$. Porém, estas últimas n equações podem ser escritas na seguinte fórmula matricial

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

ou mais simplesmente,

$$u_B = M_B^C u_C.$$

Resumiremos este resultado na seguinte

Proposição 17 *Sejam B e C bases de um espaço vetorial de dimensão finita V. Se u_B e u_C representam as coordenadas de um dado vetor $u \in V$ com relação às bases B e C, respectivamente e se M_B^C é a matriz de mudança de base da base B para a base C então*

$$u_B = M_B^C u_C.$$

Exemplo 35 *Fixado $\theta \in \mathbb{R}$, considere os vetores $u_1 = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ e $u_2 = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$ em $\mathbb{R}^2$. Mostre que estes vetores formam uma base, B, de $\mathbb{R}^2$ e encontre a matriz de mudança desta base para a base C formada pelos vetores $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,0)$. Encontre as coordenadas do vetor $u = ae_1 + be_2$ com relação à base B.*

Como a dimensão de $\mathbb{R}^2$ é dois basta mostrar que u_1 e u_2 são l.i.. Se $\alpha(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) + \beta(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) = (0,0)$ então

$$\begin{cases} \alpha\cos\theta - \beta\operatorname{sen}\theta = 0 \\ \alpha\operatorname{sen}\theta + \beta\cos\theta = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = 0,$$

pois

$$\det\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

A matriz M_B^C será dada por (α_{ij}), onde

$$\begin{aligned} (1,0) = &\quad \alpha_{11}(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) + \alpha_{21}(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \\ (0,1) = &\quad \alpha_{12}(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) + \alpha_{22}(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta), \end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} (1,0) = &\quad (\alpha_{11}\cos\theta - \alpha_{21}\operatorname{sen}\theta, \alpha_{11}\operatorname{sen}\theta + \alpha_{21}\cos\theta) \\ (0,1) = &\quad (\alpha_{12}\cos\theta - \alpha_{22}\operatorname{sen}\theta, \alpha_{12}\operatorname{sen}\theta + \alpha_{22}\cos\theta), \end{aligned}$$

e como já visto antes, basta resolver o sistema

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

cuja solução é dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\cos\theta + \beta\operatorname{sen}\theta \\ \beta\cos\theta - \alpha\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}.$$

Fazendo $(\alpha, \beta) = (1,0)$ obtemos $(\alpha_{11}, \alpha_{21}) = (\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta)$. Colocando $(\alpha, \beta) = (0,1)$, temos $(\alpha_{12}, \alpha_{22}) = (\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$. Assim,

$$M_B^C = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Agora, se u_B representa as coordenadas de $u = ae_1 + be_2$ com relação à base B e u_C as coordenadas do mesmo vetor com relação à base C, pela proposição 17 temos

$$u_B = M_B^C u_C = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\theta + b\operatorname{sen}\theta \\ b\cos\theta - a\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}.$$

Proposição 18 *Sejam B, C e D bases de um espaço vetorial n dimensional. Temos*

$$M_B^D = M_B^C M_C^D.$$

Prova: Sejam $u_1, \ldots, u_n$ os vetores de B, $v_1, \ldots, v_n$ os vetores de C e $w_1, \ldots,\, w_n$ os vetores de D. Usando a notação $M_B^C = (\alpha_{ij})$, $M_C^D = (\beta_{ij})$ e $M_B^D = (\gamma_{ij})$ vemos que

$$v_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} u_i, \qquad w_k = \sum_{j=1}^n \beta_{jk} v_j, \qquad w_k = \sum_{i=1}^n \gamma_{ik} u_i. \tag{6.1}$$

Assim

$$w_k = \sum_{j=1}^n \beta_{jk} v_j = \sum_{j=1}^n \beta_{jk} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} u_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \beta_{jk} \right) u_i,$$

como $u_1, \ldots, u_n$ são l.i., comparando com a última expressão de 6.1, obtemos

$$\gamma_{ik} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \beta_{jk}, \qquad 1 \le i, k \le n.$$

Resta apenas lembrar que o lado direito da expressão acima representa o elemento da i-ésima linha e da k-ésima coluna da matriz $M_B^C M_C^D$. Portanto, $M_B^D = M_B^C M_C^D$. ∎

Proposição 19 *Sejam B e C bases em um espaço vetorial de n dimensional V. Então a matriz M_B^C possui inversa e esta inversa é dada por M_C^B, a matriz de mudança da base C para a base B.*

Prova: Pela proposição anterior temos $M_B^C M_C^B = M_B^B$ e $M_C^B M_B^C = M_C^C$. resta mostrar que $M_B^B = M_C^C = I = (\delta_{ij})$, onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

é a matriz identidade de ordem n. É claro que basta mostrar que $M_B^B = I$ e isto é bem simples, pois se $u_1, \ldots, u_n$ são os vetores da base B então $M_B^B = (\alpha_{ij})$ satisfaz $u_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} u_i$, $j = 1, \ldots, n$. Ora, como $u_1, \ldots, u_n$ são l.i., para cada $j = 1, \ldots, n$, a única solução de cada uma destas equações é dada por

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

ou seja, $\alpha_{ij} = \delta_{ij}$. ∎

Exercício 6 *Utilize a proposição acima para refazer o exercício 5.*

Capítulo 7

Transformações Lineares

7.1 Definição e Exemplos

Definição 16 *Sejam U e V espaços vetoriais. Dizemos que uma função $T : U \to V$ é uma* transformação linear *se forem verificadas as seguintes condições:*

1. $T(u + v) = T(u) + T(v), \qquad \forall u, v \in U;$
2. $T(\lambda u) = \lambda T(u), \qquad \forall u \in U, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

Observação 7.0.1 *Note que $T : U \to V$ é uma transformação linear se e somente se $T(\lambda u + \mu v) = \lambda T(u) + \mu T(v)$, para todo $u, v \in U$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

Observação 7.0.2 *Note que pela propriedade 2 temos $T(0) = T(00) = 0T(0) = 0$. Ou seja, toda transformação linear de U em V leva o elemento neutro de U no elemento neutro de V.*

A seguir listamos alguns exemplos de transformações lineares definidas em vários espaços vetoriais que já tratamos no decorrer do curso.

1. $T : U \to V$ dada por $T(u) = 0$, para todo $u \in U$. T é chamada de transformação nula.
2. $T : U \to U$ dada por $T(u) = u$, para todo $u \in U$. T é chamada de transformação identidade.
3. $T : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n+1}$ dada por
$$T(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = (a_0, \ldots, a_{n+1}).$$
4. Se $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz dada, definimos
$$T : M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \to M_{m\times 1}(\mathbb{R})$$
por $T(X) = AX$, o produto de A com X, para todo $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.
5. $T : C([0, 1]; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por
$$T(f) = \int_0^1 f(x)\,dx,$$
para toda função $f \in C([0, 1]; \mathbb{R})$.
6. $T : C^1([0, 1]; \mathbb{R}) \to C([0, 1]; \mathbb{R})$ dada por $T(f) = f'$, a derivada de f, para toda $f \in C^1([0, 1]; \mathbb{R})$.

Os exemplos abaixo são de funções entre espaços vetoriais que *não* são transformações lineares.

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $T(x, y, z) = x + y + z + 1$. Note que $T(0, 0, 0) = 1 \neq 0$.
2. $T : C([0, 1]; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por
$$T(f) = \int_0^1 |f(x)|\, dx,$$
para toda função $f \in C([0, 1]; \mathbb{R})$. Se T fosse linear deveríamos ter por 2, $T(-f) = -T(f)$ para toda função $f \in C([0, 1]; \mathbb{R})$. Para ver que isto não ocorre, basta tomar f como sendo a função constante igual a 1. Temos neste caso que $T(-1) = 1 = T(1)$.
3. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T(x) = x^2$. Observe que $T(-1) = 1 = T(1)$. Logo, não temos $T(-1) = -T(1)$.

Proposição 20 *Seja U um espaço vetorial com base formada pelos vetores $u_1, \dots, u_n$. Toda transformação linear $T : U \to V$ fica determinada por $T(u_1), \dots, T(u_n)$.*

Prova: Já que $u_1, \dots, u_n$ formam uma base de U, dado $u \in U$ existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$. Deste modo,
$$T(u) = T(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_n T(u_n).$$
∎

Ex. Resolvido 1 *Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 2) = (3, -1)$ e $T(0, 1) = (1, 2)$.*

Resolução: Note que $(1, 2)$ e $(0, 1)$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$. Se $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ então, como é fácil verificar, temos $(x, y) = x(1, 2) + (y - 2x)(0, 1)$. Deste modo, a transformação T deve satisfazer
$$T(x, y) = T(x(1, 2) + (y - 2x)(0, 1)) = xT(1, 2) + (y - 2x)T(0, 1)$$
$$= x(3, -1) + (y - 2x)(1, 2) = (x + y, 2y - 5x).$$
Verifica-se facilmente que a transformação T definida como acima, isto é, $T(x, y) = (x + y, 2y - 5x)$, é linear e satisfaz as condições pedidas.

□

7.2 O Espaço Vetorial $\mathcal{L}(U, V)$

Definição 17 *Sejam U e V espaços vetoriais. Denotaremos por $\mathcal{L}(U, V)$ o conjunto das transformações lineares $T : U \to V$. Quando $U = V$ denotaremos $\mathcal{L}(U, U) = \mathcal{L}(U)$.*

Dadas $T, S \in \mathcal{L}(U, V)$ podemos definir $T + S : U \to V$ por $(T + S)(u) = T(u) + S(u)$, $u \in U$. Vê-se claramente que $T + S \in \mathcal{L}(U, V)$.

Se $T \in \mathcal{L}(U, V)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos $\lambda T : U \to V$ como $(\lambda T)(u) = \lambda(T(u))$. Também, $\lambda T \in \mathcal{L}(U, V)$.

É um simples exercício de verificação o fato de $\mathcal{L}(U, V)$ com as operações definidas acima ser um espaço vetorial. Note que o elemento neutro da adição é a transformação nula, isto é, $T \in \mathcal{L}(U, V)$ definida por $T(u) = 0$, $u \in U$.

Registraremos isto na seguinte

Proposição 21 *$\mathcal{L}(U, V)$ com as operações acima é um espaço vetorial.*

Definição 18 *Se U é um espaço vetorial, definimos o espaço dual de U como sendo $U' \doteq \mathcal{L}(U, \mathbb{R})$, isto é, U' é formado pelas transformações lineares $T : U \to \mathbb{R}$. Estas transformações lineares também são chamadas de funcionais lineares definidos em U.*

Teorema 4 *Se U é um espaço vetorial de dimensão n e V é um espaço vetorial de dimensão m então $\mathcal{L}(U, V)$ tem dimensão mn.*

Prova: Fixemos duas bases, uma formada por vetores $u_1, \ldots, u_n$ de U e outra formada por $v_1, \ldots, v_m$, vetores de V.

Para cada $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$ defina

$$T_{ij}(x_1u_1 + \cdots + x_nu_n) = x_iv_j, \qquad x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Note que

$$T_{ij}(u_k) = \begin{cases} v_j \text{ se } i = k \\ 0 \text{ se } i \neq k \end{cases} .$$

Verifiquemos que $T_{ij} \in \mathcal{L}(U, V)$:

$$T_{ij}((x_1u_1 + \cdots + x_nu_n) + (y_1u_1 + \cdots + y_nu_n))$$

$$= T_{ij}((x_1 + y_1)u_1 + \cdots + (x_n + y_n)u_n) = (x_i + y_i)v_j = x_iv_j + y_iv_j$$

$$= T_{ij}(x_1u_1 + \cdots + x_nu_n) + T_{ij}(y_1u_1 + \cdots + y_nu_n).$$

Também, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$T_{ij}(\lambda(x_1u_1 + \cdots + x_nu_n)) = T_{ij}(\lambda x_1u_1 + \cdots + \lambda x_nu_n)$$

$$= \lambda x_iv_j = \lambda T_{ij}(x_1u_1 + \cdots + x_nu_n).$$

Mostremos que T_{ij}, $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$, formam uma base de $\mathcal{L}(U, V)$.

Se $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}T_{ij} = 0$ então, para cada $1 \leq k \leq n$,

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}T_{ij}(u_k) = \sum_{j=1}^{m} a_{kj}T_{kj}(u_k) = \sum_{j=1}^{m} a_{kj}v_j$$

e como $v_1, \ldots, v_m$ são linearmente independentes, segue-se que $a_{k1} = \cdots = a_{km} = 0$. Portanto $T_{11}, \ldots, T_{nm}$ são linearmente independentes.

Seja $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Se $u \in U$ então $u = x_1u_1 + \cdots + x_nu_n$, para certos números reais $x_1, \ldots, x_n$. Como T é linear

$$T(u) = x_1T(u_1) + \cdots + x_nT(u_n).$$

Como $T(u_i) \in V$, podemos escrever, para cada $1 \leq i \leq n$,

$$T(u_i) = \alpha_{1i}v_1 + \cdots + \alpha_{mi}v_m.$$

Porém, como para cada $1 \leq j \leq m$, $1 \leq i \leq n$, $T_{ij}(u) = x_iv_j$, obtemos

$$T(u) = x_1T(u_1) + \cdots + x_nT(u_n)$$

$$= x_1(\alpha_{11}v_1 + \cdots + \alpha_{m1}v_m) + \cdots + x_n(\alpha_{1n}v_1 + \cdots + \alpha_{mn}v_m)$$

$$= \alpha_{11}x_1v_1 + \cdots + \alpha_{m1}x_1v_m + \cdots + \alpha_{1n}x_nv_1 + \cdots + \alpha_{mn}x_nv_m$$

$$= \alpha_{11}T_{11}(u) + \cdots + \alpha_{m1}T_{1m}(u) + \cdots + \alpha_{1n}T_{1n}(u) + \cdots + \alpha_{mn}T_{nm}(u),$$

ou seja

$$T = \alpha_{11}T_{11} + \cdots + \alpha_{m1}T_{1m} + \cdots + \alpha_{1n}T_{1n} + \cdots + \alpha_{mn}T_{nm}.$$

Corolário 1 *Se V é um espaço de dimensão n então o seu dual também tem dimensão n.*

Pelo corolário 1, se U tem dimensão n então o seu dual, U', tem a mesma dimensão. Seguindo os passos da demonstração do teorema 4, se $u_1, \ldots, u_n$ formam uma base B de U então os funcionais lineares $f_1, \ldots, f_n : U \to U$ dados por $f_j(u) = f_j(x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n) = x_j,\ j = 1, \ldots, n$, formam uma base de U'. Esta base é chamada de *base dual* da base B.

Ex. Resolvido 2 *Considere a base B de $\mathbb{R}^3$ formada por $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,1,0)$ e $u_3 = (1,0,0)$. Encontre a base dual de B.*

Resolução: Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos

$$(x, y, z) = z(1,1,1) + (y - z)(1,1,0) + (x - y)(1,0,0).$$

Deste modo, a base dual de B, é dada pelos funcionais lineares f_1, f_2 e f_3 onde $f_1(x, y, z) = z$, $f_2(x, y, z) = y - z$ e $f_3(x, y, z) = x - y$.

□

Definição 19 *Sejam U, V e W espaços vetoriais. Se $T \in \mathcal{L}(U, V)$ e $S \in \mathcal{L}(V, W)$ definimos a composta $S \circ T : U \to W$ por $S \circ T(u) = S(T(u))$, $u \in U$.*

Exemplo 36 *Considere as transformações lineares $T, S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dadas por $T(x, y) = (x+y, 0)$ e $S(x, y) = (x, 2y)$. Encontre $T \circ S$ e $S \circ T$.*

$$T \circ S(x, y) = T(S(x, y)) = T(x, 2y) = (x + 2y, 0).$$

$$S \circ T(x, y) = S(T(x, y)) = S(x + y, 0) = (x + y, 0).$$

Note que $T \circ S \neq S \circ T$.

Observação 7.0.3 *Se $T \in \mathcal{L}(U)$, podemos definir $T^1 = T$ para $n \geq 2$, $T^n = T \circ T^{n-1}$.*

Definição 20 *$T \in \mathcal{L}(U)$ é chamada de nilpotente se existir algum inteiro positivo n tal que $T^n = 0$, a transformação nula.*

Obviamente a transformação nula é um exemplo de operador nilpotente.

Exemplo 37 *Mostre que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (0, x)$ é um operador nilpotente.*

Vejamos: $T^2(x, y) = T(T(x, y)) = T(0, x) = (0, 0)$. Assim, $T^2 = 0$.

Proposição 22 *Se $T \in \mathcal{L}(U, V)$ e $S \in \mathcal{L}(V, W)$ então $S \circ T \in \mathcal{L}(U, W)$.*

Prova: Dados $u, v \in U$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ temos

$$S \circ T(\lambda u + \mu v) = S(T(\lambda u + \mu v)) = S(\lambda T(u) + \mu T(v))$$

$$= S(\lambda T(u)) + S(\mu T(v)) = \lambda S(T(u)) + \mu S(T(v)) = \lambda S \circ T(u) + \mu S \circ T(v).$$

■

Proposição 23 *Sejam $T \in \mathcal{L}(U, V)$, $S \in \mathcal{L}(V, W)$ e $R \in \mathcal{L}(W, X)$, onde U, V, W e X são espaços vetoriais. Então $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.*

Prova: Para todo $u \in U$, temos

$$(R \circ S) \circ T(u) = (R \circ S)(T(u)) = R(S(T(u)))$$

e por outro lado

$$R \circ (S \circ T)(u) = R((S \circ T)(u)) = R(S(T(u))).$$

Comparando as expressões chegamos ao resultado desejado.

∎

Proposição 24 *Se $S, T \in \mathcal{L}(U,V)$, $R \in \mathcal{L}(V,W)$ então $R \circ (S+T) = R \circ S + R \circ T$.*

Prova: Dado $u \in U$, temos

$$R \circ (S+T)(u) = R((S+T)(u)) = R(S(u)+T(u)) = R(S(u)) + R(T(u))$$
$$= R \circ S(u) + R \circ T(u) = (R \circ S + R \circ T)(u).$$

∎

Proposição 25 *Se $T \in \mathcal{L}(U,V)$ e $I_V \in \mathcal{L}(V)$ é a identidade em V, isto é, $I(v) = v$, $v \in V$, e $I_U \in \mathcal{L}(U)$ é a identidade em U, então $I_V \circ T = T$ e $T \circ I_U = T$.*

Prova: Dado $u \in U$, temos

$$I_V \circ T(u) = I(T(u)) = T(u)$$

e

$$T \circ I_U(u) = T(I_U(u)) = T(u).$$

∎

Definição 21 *Diremos que $T \in \mathcal{L}(U,V)$ possui inversa se existir $S : V \to U$ tal que $S \circ T(v) = u$ para todo $u \in U$ e $T \circ S(v) = v$ para todo $v \in V$. Em outras palavras, $T \circ S = I_V$ e $S \circ T = I_U$, onde $I_U : U \to U$ é a identidade em U e $I_V : V \to V$ é a identidade em V.*

Proposição 26 *Se $T \in \mathcal{L}(U,V)$ possui uma inversa então esta inversa é única.*

Suponha que T possua inversas $R, S \in \mathcal{L}(V,U)$. Como $I_V = T \circ R$ e $I_U = S \circ T$, temos

$$S = S \circ I_V = S \circ (T \circ R) = (S \circ T) \circ R = I_U \circ R = R.$$

∎

Denotaremos a inversa de T por T^{-1}.

Definição 22 *Uma transformação linear $T : U \to V$ é*

1. *injetora se $T(u) = T(v)$ implicar em $u = v$;*
2. *sobrejetora se para todo $v \in V$ existir $u \in U$ tal que $T(u) = v$;*
3. *bijetora se for injetora e sobrejetora.*

Proposição 27 *Uma transformação linear $T : U \to V$ é injetora se e somente se $T(u) = 0$ implicar em $u = 0$.*

Prova: Suponha que T seja injetora. Se $T(u) = 0$ então $T(u) = T(0)$ e como T é injetora, segue-se que $u = 0$.

Reciprocamente suponha que a única solução de $T(u) = 0$ seja $u = 0$. Se $T(u) = T(v)$ então $T(u-v) = 0$ e, por hipótese, $u - v = 0$, isto é, $u = v$.

∎

Proposição 28 *A fim de que $T \in \mathcal{L}(U,V)$ possua inversa é necessário e suficiente que T seja bijetora.*

Prova: Suponha que T possua inversa.

Se $T(u) = T(v)$ então $u = T^{-1}(T(u)) = T^{-1}(T(v)) = v$ e, portanto, T é injetora.

Dado $v \in V$ vemos que $T(T^{-1}(v)) = v$ e, portanto, T também é sobrejetora. Assim, T é bijetora.

Suponha agora que T seja bijetora. Dado $v \in V$ existe um único $u_v \in U$ tal que $v = T(u_v)$. Defina $S : V \to U$ por $S(v) = u_v$. Mostremos que S é a inversa de T.

Se $v \in V$ então $T(S(v)) = T(u_v) = v$.

Se $u \in U$ então $S(T(u))$, pela definição de S, é o único elemento u' em U tal que $T(u') = T(u)$. Como T é injetora, temos $u' = u$ e, assim, $S(T(u)) = u$.

∎

Proposição 29 *Se $T \in \mathcal{L}(U,V)$ possui inversa $T^{-1} : V \to U$ então $T^{-1} \in \mathcal{L}(V,U)$.*

Prova: Devemos mostrar que $T^{-1} : V \to U$ é linear.

Sejam $v_1, v_2 \in V$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Como T é sobrejetora existem $u_1, u_2 \in U$ tais que $T(u_1) = v_1$ e $T(u_2) = v_2$. Assim,

$$\begin{aligned} T^{-1}(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= T^{-1}(\lambda_1 T(u_1) + \lambda_2 T(u_2)) = T^{-1}(T(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)) \\ &= \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \lambda_1 T^{-1}(v_1) + \lambda_2 T^{-1}(v_2). \end{aligned}$$

∎

7.3 Imagem e Núcleo

Definição 23 *Seja $T : U \to V$ uma transformação linear.*

1. *Se $X \subset U$, definimos a imagem de X por T como sendo o conjunto $T(X) = \{T(x); x \in X\}$.*
2. *Se $Y \subset V$, definimos a imagem inversa de Y por T como sendo o conjunto $T^{-1}(Y) = \{u \in U; T(u) \in Y\}$.*

Ex. Resolvido 3 *Seja V um espaço de dimensão 1. Mostre que qualquer transformação linear não nula $T : U \to V$ é sobrejetora.*

Resolução: Como T é não nula existe $u_o \in U$ tal que $T(u_o) \neq 0$. Já que V tem dimensão 1 então qualquer base de V é constituída por um elemento e como $T(u_o) \in V$ é não nulo (portanto, l.i.), ele próprio forma uma base de V. Assim, dado $v \in V$ existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $v = \alpha T(u_o) = T(\alpha u_o)$, ou seja, T é sobrejetora.

□

Proposição 30 *Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Temos*

1. *Se W é um subespaço vetorial de U então $T(W)$ é um subespaço vetorial de V.*
2. *Se W é um subespaço vetorial de V então $T^{-1}(W)$ é um subespaço vetorial de U.*

Prova: *1.* Seja W um subespaço vetorial de U.

Como $0 \in W$ vemos que $0 = T(0) \in T(W)$.

Se $x, y \in T(W)$ então existem $u, w \in W$ tais que $x = T(u)$ e $y = T(w)$. Como W é um subespaço vetorial, temos que, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, $u + \lambda w \in W$. Desse modo

$$x + \lambda y = T(u) + \lambda T(w) = T(u) + T(\lambda w) = T(u + \lambda w) \in T(W).$$

2. Seja W um subespaço vetorial de V.

Como $T(0) = 0 \in W$, segue-se que $0 \in T^{-1}(W)$.

Se $x, y \in T^{-1}(W)$ então $T(x), T(y) \in W$. Como W é um subespaço vetorial temos que, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, $T(x) + \lambda T(y) \in W$. Mas $T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y) \in W$ e, portanto, $x + \lambda y \in T^{-1}(W)$.

∎

Definição 24 *O núcleo de uma transformação linear $T : U \to V$ é o subespaço vetorial de U dado por $T^{-1}(\{0\})$, ou seja, é o conjunto $\{u \in U; T(u) = 0\}$. Denotaremos o núcleo de T por $\mathcal{N}(T)$.*

Proposição 31 *Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. T é injetora se e somente se $\mathcal{N}(T) = \{0\}$.*

Prova: Pela proposição 27 T é injetora se e somente se a equação $T(u) = 0$ possui como única solução $u = 0$. Isto é o mesmo que dizer que o conjunto $\mathcal{N}(T)$ é formado somente pelo elemento 0.

∎

Ex. Resolvido 4 *Seja $T \in \mathcal{L}(U)$. Mostre que $T^2 = 0$ se e somente se $T(U) \subset \mathcal{N}(T)$.*

Resolução: Suponha que $T^2 = 0$. Se $v \in T(U)$ então existe $u \in U$ tal que $v = T(u)$ e, portanto, $T(v) = T^2(u) = 0$. Logo, $v \in \mathcal{N}(T)$.

Suponha agora que $T(U) \subset \mathcal{N}(T)$. Dado $u \in U$, como $T(u) \in T(U) \subset \mathcal{N}(T)$, temos $T^2(u) = T(T(u)) = 0$.

□

Ex. Resolvido 5 *Seja $\theta \in \mathbb{R}$. Encontre o núcleo da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por*

$$T(x, y) = (x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta, x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta).$$

Resolução: Por definição, $(x, y) \in \mathcal{N}(T)$ se e somente se $T(x, y) = (0, 0)$, isto é, se e somente se

$$(x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta, x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta) = (0, 0)$$

$$\iff \begin{cases} x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta = 0 \\ x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0).$$

Portanto, $\mathcal{N}(T) = \{(0, 0)\}$.

Teorema 5 (Teorema do Núcleo e da Imagem) *Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita e $T : U \to V$ uma transformação linear. Temos*

$$\dim U = \dim \mathcal{N}(T) + \dim T(U).$$

Prova: Seja B_1 uma base de $\mathcal{N}(T)$ formada pelos vetores $u_1, \dots, u_p$. Pelo teorema do completamento, existem vetores $v_1, \dots, v_q \in U$ tais que $u_1, \dots, u_p$, $v_1, \dots, v_q$ formam uma base de U. Note que com esta notação temos $\dim U = p + q$ e $\dim \mathcal{N}(T) = p$. Resta mostrar que $\dim T(U) = q$ e, para isto, mostraremos que $T(v_1), \dots, T(v_q)$ formam uma base de $T(U)$.

Se $\alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_q T(v_q) = 0$ então $T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_q v_q) = 0$, isto é, $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_q v_q \in \mathcal{N}(T)$. Desta forma, existem $\beta_1, \dots, \beta_p \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_q v_q = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_p u_p$, isto é,

$$\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_p u_p - \alpha_1 v_1 - \cdots - \alpha_q v_q = 0.$$

Como $u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q$ formam uma base de U, segue-se que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_q = \beta_1 = \cdots = \beta_p = 0$ e, portanto, $T(v_1), \dots, T(v_q)$ são linearmente independentes.

Mostremos que $T(v_1), \dots, T(v_q)$ geram $T(U)$. Seja $v \in T(U)$. Logo, existe $u \in U$ tal que $T(u) = v$. Como $u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q$ formam uma base de U, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_p \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_q u_p + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_p v_p$$

e daí,

$$\begin{aligned} v &= T(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_q u_p + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_p v_p) \\ &= \alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_q T(u_p) + \beta_1 T(v_1) + \cdots + \beta_p T(v_p) = \beta_1 T(v_1) + \cdots + \beta_p T(v_p), \end{aligned}$$

já que $u_1, \dots, u_p \in \mathcal{N}(T)$.

∎

Corolário 2 *Se U e V são espaços vetoriais de dimensão finita tais que* $\dim U = \dim V$ *e se* $T : U \to V$ *é uma transformação linear então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *T é sobrejetora;*
2. *T é injetora;*
3. *T é bijetora;*
4. *T leva bases de U em bases de V.*

Prova: *(1) $\Longrightarrow$ (2):* Se T é sobrejetora, temos $T(U) = V$ e pelo teorema anterior, $\dim U = \dim \mathcal{N}(T) + \dim V$. Mas como $\dim U = \dim V$ segue-se que $\dim \mathcal{N}(T) = 0$, isto é, $\mathcal{N}(T) = \{0\}$. Pela proposição 31, T é injetora.

(2) $\Longrightarrow$ (3): Se T é injetora então $\dim \mathcal{N}(T) = 0$. Pelo teorema anterior segue-se que $\dim U = \dim T(U)$. Como $\dim U = \dim V$ segue-se que $T(U)$ é um subespaço de V com a mesma dimensão de V. Logo, $T(U) = V$, isto é, T é sobrejetora. Dessa forma, T é bijetora.

(3) $\Longrightarrow$ (4): Suponha que T seja bijetora. Considere uma base de U formada por vetores $u_1, \dots, u_n$. Precisamos mostrar que $T(u_1), \dots, T(u_n)$ formam uma base de V.

Se $\alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_n T(u_n) = 0$ então $T(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = 0$, isto é, $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n \in \mathcal{N}(T)$. Como T é injetora temos $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ e, conseqüentemente, $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$. Como $u_1, \dots, u_n$ formam uma base de U temos $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ e, portanto, $T(u_1), \dots, T(u_n)$ são linearmente independentes.

Seja $v \in V$. Como T é sobrejetora, existe $u \in U$ tal que $v = T(u)$. Escrevendo u como $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ vemos que

$$v = T(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_n T(u_n),$$

isto é, $T(u_1), \dots, T(u_n)$ geram V. Observe que já havíamos provado isto na proposição 20

(4) $\Longrightarrow$ (1): Seja $u_1, \dots, u_n$ uma base de U. Por hipótese, $T(u_1), \dots, T(u_n)$ formam uma base de V. Assim, dado $v \in V$ existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $v = \alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_n T(u_n)$. Deste modo, $v = T(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n)$, isto é, T é sobrejetora.

∎

Ex. Resolvido 6 *Mostre que toda transformação linear bijetora $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leva retas em retas, isto é, a imagem de uma reta por T é uma reta.*

Resolução: Dada uma reta r no plano usaremos a equação vetorial para representar seus pontos, isto é, um ponto $P \in r$ é da forma $P_o + \lambda \vec{v}$, onde P_o é um ponto sobre a reta, $\vec{v}$ é um vetor direção da reta e $\lambda \in \mathbb{R}$. A imagem de r por T é $T(r) = \{T(P); P \in r\}$. Assim, todo ponto em $T(r)$ é da forma $T(P) = T(P_o) + \lambda T(\vec{v})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Como T é injetora e $\vec{v} \neq \vec{0}$ temos que $T(\vec{v}) \neq \vec{0}$, ou seja, $T(r)$ é uma reta que passa por $T(P_o)$ e tem direção $T(\vec{v})$.

□

Ex. Resolvido 7 *Sejam $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ não todos nulos. Mostre que o subespaço $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0\}$ tem dimensão $n - 1$.*

Resolução: Note que H é o núcleo da transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $T(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$. Como nem todos os a_j são nulos, segue-se que T é não nula e pelo exercício 3, T é sobrejetora. Deste modo, pelo teorema 5, temos

$$n = \dim \mathbb{R}^n = \dim H + \dim T(\mathbb{R}^n) = \dim H + 1,$$

ou seja, $\dim H = n - 1$.

□

Ex. Resolvido 8 *Sejam*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ *dada por* $T(X) = AX - XA$. *Encontre o núcleo e a imagem de* T.

Resolução: *Núcleo:* $X \in \mathcal{N}(T)$ se e somente se $AX = XA$. Se denotarmos

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

vemos que $X \in \mathcal{N}(T)$ se e somente se

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix}$$

que equivale a

$$\begin{cases} a+2c = a \\ b+2d = 2a+b \\ c = c \\ d = 2c+d \end{cases} \iff c = 0 \text{ e } a = d.$$

Portanto,

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, o núcleo de T é o subespaço vetorial gerado pela base (note que as matrizes são l.i.) formada pelas matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Imagem de T: Temos que

$$Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in T(M_2(\mathbb{R}))$$

se e somente se existir

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tal que $Y = AX - XA$, isto é,

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c & 2d-2a \\ 0 & -2c \end{pmatrix}$$

$$= 2c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 2(d-a)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, a imagem de T é gerada pela base (note que as matrizes são l.i.) formada pelas matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uma outra maneira para encontrar uma base para a imagem de T é fazer uso da **prova** do teorema 5. Isto é, sabemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

formam uma base do núcleo de T e, como no referido teorema, a completamos até uma base de $M_2(\mathbb{R})$ como, por exemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e, pelo mesmo teorema,

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ e } T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

formam uma base para a imagem de T.

$\square$

Definição 25 *Dizemos que $T \in \mathcal{L}(U)$ é idempotente se $T^2 = T$.*

Exemplo 38 *$I : U \to U$, a identidade de U é idempotente.*

Exemplo 39 *$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x, 0)$ é idempotente.*

Note que

$$T^2(x, y) = T(x, 0) = (x, 0) = T(x, y).$$

Proposição 32 *Mostre que se $T \in \mathcal{L}(U)$ é idempotente então*

$$U = T(U) \oplus \mathcal{N}(T).$$

Prova: Dado $u \in U$ podemos escrever

$$u = T(u) + (u - T(u)).$$

Claramente, $T(u) \in T(U)$ e $T(u - T(u)) = T(u) - T^2(u) = T(u) - T(u) = 0$. Logo, $U = T(U) + \mathcal{N}(T)$ e resta mostrarmos que a soma é direta.

Se $u \in T(U) \cap \mathcal{N}(T)$ então existe $v \in U$ tal que $u = T(v)$ e $T(u) = 0$. Porém, como $T = T^2$, temos

$$u = T(v) = T^2(v) = T(T(v)) = T(u) = 0,$$

ou seja, $T(U) \cap \mathcal{N}(T) = \{0\}$.

∎

7.4 Isomorfismo e Automorfismo

Definição 26 *Dizemos que uma transformação linear $T : U \to V$ é isomorfismo quando ela for bijetora. No caso em que $U = V$ diremos que T é um automorfismo.*

Definição 27 *Dizemos que os espaços vetoriais U e V são isomorfos se existir um isomorfismo $T : U \to V$.*

As seguintes transformações são exemplos de isomorfismos e, portanto, os respectivos espaços vetoriais são isomorfos.

1. $T : U \to U$ dada por $T(u) = u$.

2. $T : \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ dada por $T(x_1, \dots, x_n) = x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1}$.
3. $T : M_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{mn}$ que associa a cada matriz $A = (a_{ij})$ de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ o seguinte elemento de $\mathbb{R}^n$

$$(a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn}).$$

Ex. Resolvido 9 *Verifique se $T(x, y, z) = (x - y, x - z, z - y)$ é um automorfismo de $\mathbb{R}^3$.*

Resolução: Se $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$ então

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \\ z - y = 0 \end{cases} \iff x = y = z = 0.$$

Logo, T é não é injetora, pois $T(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$. Assim, T não é um isomorfismo.

□

Proposição 33 *Se $T : U \to V$ é um isomorfismo e U tem dimensão n então $\dim V = n$.*

Prova: Considere uma base de U formada por $u_1, \dots, u_n$. Mostraremos que $T(u_1), \dots, T(u_n)$ formam uma base de V.

Se $\alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_n T(u_n) = 0$ então $T(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = 0$, isto é, $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n \in \mathcal{N}(T)$. Como T é injetora temos $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ e, conseqüentemente, $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$. Como $u_1, \dots, u_n$ formam uma base de U temos $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ e, portanto, $T(u_1), \dots, T(u_n)$ são linearmente independentes.

Seja $v \in V$. Como T é sobrejetora, existe $u \in U$ tal que $v = T(u)$. Escrevendo u como $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ vemos que

$$v = T(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_n T(u_n),$$

isto é, $T(u_1), \dots, T(u_n)$ geram V.

■

Proposição 34 *Sejam U e V espaços de dimensão n. Se $u_1, \dots, u_n$ e $v_1, \dots, v_n$ formam bases de U e V, respectivamente, então*

$$T(x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n) = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n, \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R},$$

define um isomorfismo entre U e V. Note que $T(u_j) = v_j$, $j = q, \dots, n$.

Prova: Primeiramente, note que T, de fato, define uma função pois as coordenadas de um vetor com relação a uma base são unicamente determinadas por ele e pela base.

Verifiquemos que T é linear. Se $w_1, w_2 \in U$ então podemos escrever $w_1 = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ e $w_2 = \sum_{i=1}^n y_i u_i$, onde $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, temos

$$T(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = T(\sum_{i=1}^n (\lambda_1 x_i + \lambda_2 y_i) u_i) = \sum_{i=1}^n (\lambda_1 x_i + \lambda_2 y_i) v_i$$

$$= \lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i v_i + \lambda_2 \sum_{i=1}^n y_i v_i = \lambda_1 T(w_1) + \lambda_2 T(w_2).$$

Seja $w = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ tal que $T(w) = 0$. Mas $T(w) = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = 0$ e, portanto, $x_1 = \cdots = x_n = 0$, ou seja, $w = 0$. Portanto, T é injetora e pelo corolário 2, segue-se que T é um isomorfismo.

■

Corolário 3 *Se dois espaços têm a mesma dimensão finita então eles são isomorfos.*

Prova: Basta tomar o isomorfismo do teorema anterior.

∎

Combinando o corolário acima com a proposição 33 vemos que dois espaços de dimensão finita são isomorfos se e somente se eles possuem a mesma dimensão.

Corolário 4 *Se U é um espaço vetorial de dimensão n e V é um espaço vetorial de dimensão m então $\mathcal{L}(U, V)$ é isomorfo a $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.*

Prova: Note que tanto $\mathcal{L}(U, V)$ como $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ têm a mesma dimensão: mn.

∎

7.5 Matriz de uma Transformação Linear

7.5.1 Definição e Exemplos

Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita. Fixemos uma base B de U formada por vetores $u_1, \dots, u_n$ e uma base V formada por vetores $v_1, \dots, v_m$. Se $T \in \mathcal{L}(U, V)$ podemos escrever

$$T(u_j) = a_{1j}v_1 + \cdots + a_{mj}v_m, \qquad = 1, \dots, n.$$

A matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

é chamada de matriz da transformação T com relação às bases B e C e é denotada por $[T]_{B,C}$. No caso em que $U = V$ e $B = C$ usaremos a notação $[T]_B$.

Ex. Resolvido 10 *Encontre a matriz de $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x + y, x - z)$ com relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^3$ ($B : (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$) e $\mathbb{R}^2$ ($C : (1, 0), (0, 1)$).*

Resolução: Temos

$$T(1, 0, 0) = (1, 1) = 1(1, 0) + 1(0, 1),$$
$$T(0, 1, 0) = (1, 0) = 1(1, 0) + 0(0, 1) \quad \text{e}$$
$$T(0, 0, 1) = (0, -1) = 0(1, 0) - 1(0, 1).$$

Assim,

$$[T]_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

Ex. Resolvido 11 *Encontre a matriz de $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x + y, x - z)$ com relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^3$ ($B : (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$) e $\mathbb{R}^2$ ($C' : (1, 1), (0, 1)$).*

Resolução: Temos

$$T(1, 0, 0) = (1, 1) = 1(1, 1) + 0(0, 1),$$
$$T(0, 1, 0) = (1, 0) = 1(1, 1) - 1(0, 1) \quad \text{e}$$
$$T(0, 0, 1) = (0, -1) = 0(1, 1) - 1(0, 1).$$

Assim,

$$[T]_{B,C'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

7.5.2 Propriedades

Proposição 35 *Sejam U e V espaços vetorial de dimensão finita com bases B e C, respectivamente. Se $T, S \in \mathcal{L}(U, V)$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ então*

$$[\lambda T + \mu S]_{B,C} = \lambda[T]_{B,C} + \mu[S]_{B,C}.$$

Prova: Colocando $B : u_1, \ldots, u_n$, $C : v_1, \ldots, v_m$, $[T]_{B,C} = (\alpha_{ij})$ e $[S]_{B,C} = (\beta_{ij})$ temos

$$(\lambda T + \mu S)(u_j) = \lambda T(u_j) + \mu S(u_j)$$

$$= \lambda(\alpha_{1j}v_1 + \cdots + \alpha_{mj}v_m) + \mu(\beta_{1j}v_1 + \cdots + \beta_{mj}v_m)$$

$$= (\lambda\alpha_{1j} + \mu\beta_{1j})v_1 + \cdots + (\lambda\alpha_{mj} + \mu\beta_{mj})v_m$$

e, desse modo,

$$[\lambda T + \mu S]_{B,C} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_{11} + \mu\beta_{11} & \cdots & \lambda\alpha_{1n} + \mu\beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda\alpha_{m1} + \mu\beta_{m1} & \cdots & \lambda\alpha_{mn} + \mu\beta_{mn} \end{pmatrix} = \lambda[T]_{B,C} + \mu[S]_{B,C}.$$

∎

Corolário 5 *Sejam U e V espaços vetorial de dimensão finita com bases B e C, respectivamente. Se $T \in \mathcal{L}(U, V)$ é a transformação nula então $[T]_{B,C} = 0$.*

Proposição 36 *Se B e C são bases de um espaço vetorial V de dimensão finita e $I \in \mathcal{L}(V, V)$ é a identidade de V então $[I]_{B,C} = M_C^B$.*

Prova: Sejam $B : u_1, \ldots, u_n$, $C : v_1, \ldots, v_n$ e $[I]_{B,C} = (\alpha_{ij})$. Como

$$u_j = I(u_j) = \alpha_{1j}v_1 + \cdots + \alpha_{nj}v_n$$

vê-se que $[I]_{B,C} = M_C^B$.

∎

Proposição 37 *Sejam U, V e W espaços vetoriais de dimensão finita. Sejam $T \in \mathcal{L}(U, V)$ e $S \in \mathcal{L}(V, W)$. Se B, C e D são bases de U, V e W, respectivamente, então*

$$[S \circ T]_{B,D} = [S]_{C,D}[T]_{B,C}.$$

Prova: Coloquemos $B : u_1, \ldots, u_n$, $C : v_1, \ldots, v_m$ e $D : w_1, \ldots, w_p$. Se $[T]_{B,C} = (\alpha_{ij})$ e $[S]_{C,D} = (\beta_{kl})$ então

$$S \circ T(u_j) = S(T(u_j)) = S\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} v_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} S(v_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^{p} \beta_{ki} w_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{m} \beta_{ki}\alpha_{ij}\right) w_k.$$

Portanto,

$$[S \circ T]_{B,D} = \left(\sum_{i=1}^{m} \beta_{ki}\alpha_{ij}\right) = [S]_{C,D}[T]_{B,C}.$$

∎

Proposição 38 *Sejam U e V espaços vetorial de dimensão finita com bases B e C, respectivamente. Se $T \in \mathcal{L}(U,V)$ possui inversa T^{-1} então $[T^{-1}]_{C,B} = [T]_{B,C}^{-1}$.*

Prova: Seja $n = \dim U = \dim V$. Temos

$$[T]_{B,C}[T^{-1}]_{C,B} = [T \circ T^{-1}]_{C,C} = [I]_{C,C} = I_n$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Analogamente,

$$[T^{-1}]_{C,B}[T]_{B,C} = [T^{-1} \circ T]_{B,B} = [I]_{B,B} = I_n.$$

Portanto, $[T^{-1}]_{C,B} = [T]_{B,C}^{-1}$.

∎

Proposição 39 *Sejam U e V espaços vetorial de dimensão finita com bases B e C, respectivamente. Se $T \in \mathcal{L}(U,V)$ e $u \in U$ então, representando por $T(u)_C$ e u_B as coordenadas dos vetores $T(u)$ e u, respectivamente, temos*

$$T(u)_C = [T]_{B,C} u_B.$$

Prova: Coloque $B : u_1, \ldots, u_n$, $C : v_1, \ldots, v_m$, $[T]_{B,C} = (\alpha_{ij})$ e

$$u_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Temos

$$T(u) = T(a_1u_1 + \cdots + a_nu_n) = a_1T(u_1) + \cdots + a_nT(u_n)$$

$$= a_1(\alpha_{11}v_1 + \cdots + \alpha_{m1}v_m) + \cdots + a_n(\alpha_{1n}v_1 + \cdots + \alpha_{mn}v_m)$$

$$= (a_1\alpha_{11} + \cdots + a_n\alpha_{1n})v_1 + \cdots + (a_1\alpha_{m1} + \cdots + a_n\alpha_{mn})v_m,$$

ou seja,

$$T(u)_C = \begin{pmatrix} a_1\alpha_{11} + \cdots + a_n\alpha_{1n} \\ \vdots \\ a_1\alpha_{m1} + \cdots + a_n\alpha_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

isto é, $T(u)_C = [T]_{B,C} u_B$.

∎

Proposição 40 *Sejam U e V espaços vetorial de dimensão finita com bases B e C, respectivamente. Então $T \in \mathcal{L}(U,V)$ é um isomorfismo se e somente se $[T]_{B,C}$ possui inversa.*

Prova: Se T é um isomorfismo então pela proposição 38 $[T]_{B,C}$ possui inversa dada por $[T^{-1}]_{C,B}$.

Reciprocamente, suponha que $[T]_{B,C}$ possua inversa. Pelo corolário 2, basta mostrar que T é injetora. Se $T(u) = 0$ então

$$u_B = [T]_{B,C}^{-1} T(u)_C = [T]_{B,C}^{-1} 0 = 0.$$

Como todas as coordenadas de u são iguais a zero, obtemos $u = 0$ e, portanto, T é injetora.

∎

Ex. Resolvido 12 *Verifique se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ dada por $T(a,b) = a + (a+b)x$ é um isomorfismo.*

Resolução: Consideremos as bases canônicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$. Como $T(1,0) = 1 + x$ e $T(0,1) = x$, a matriz de T com relação a estas bases é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como a matriz acima possui inversa, segue-se que T é um isomorfismo.

□

Proposição 41 *Seja V um espaço de dimensão finita. Se $T \in \mathcal{L}(V,V)$ e B e C são bases de V então*

$$[T]_{C,C} = M_C^B [T]_{B,B} M_B^C.$$

Prova: Como $[I]_{B,C} = M_C^B$ e $[I]_{C,B} = M_B^C$, temos

$$M_C^B [T]_{B,B} M_B^C = [I]_{B,C}[T]_{B,B}[I]_{C,B} = [I]_{B,C}[T]_{C,B} = [T]_{C,C}.$$

∎

Ex. Resolvido 13 *Considere, B, a base de $\mathbb{R}^2$ formada pelos vetores $(1,1)$ e $(1,-1)$. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tal que*

$$T_{B,B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Encontre $[T]_{C,C}$, onde C é a base canônica de $\mathbb{R}^2$.

Resolução: Como

$$(1,0) = \frac{1}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(1,-1) \text{ e } (0,1) = \frac{1}{2}(1,1) - \frac{1}{2}(1,-1),$$

obtemos

$$M_B^C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ e } M_C^B = \left(M_B^C\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$[T]_{C,C} = M_C^B [T]_{B,B} M_B^C =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Note que

$$T(x,y) = T(x(1,0) + y(0,1)) = xT((1,0)) + yT((0,1))$$

$$= x(3(1,0) - 2(0,1)) + y(-2(1,0) + 3(0,1)) =$$

$$= x(3,-2) + y(-2,3) = (3x - 2y, 3y - 2x).$$

□

Capítulo 8

Autovalores e Autovetores

8.1 Definição, Exemplos e Generalidades

Definição 28 *Sejam U um espaço vetorial e $T \in \mathcal{L}(U)$. Dizemos que um vetor não nulo $u \in U$ é um autovetor de T se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(u) = \lambda u$.*

Observação 8.0.4 *Se $u \neq 0$ é tal que $T(u) = \lambda u = \mu u$ então $\lambda = \mu$. De fato, esta igualdade implica que $(\lambda - \mu)u = 0$, ou seja, $\lambda - \mu = 0$.*

Definição 29 *Sejam U um espaço vetorial, $T \in \mathcal{L}(U)$ e u um autovetor de T. O número λ tal que $T(u) = \lambda u$ é chamado de autovalor de T associado ao autovetor u.*

Definição 30 *Sejam U um espaço vetorial, $T \in \mathcal{L}(U)$ e λ um autovalor de T. O subespaço vetorial*

$$V(\lambda) = \{u \in U; T(u) = \lambda u\} = \mathcal{N}(T - \lambda I)$$

é chamado de subespaço próprio do autovalor λ. Se U tem dimensão finita, diremos que a dimensão de $V(\lambda)$ é a multiplicidade geométrica de λ.

Observação 8.0.5 *Note que todo $u \in V(\lambda)$, $u \neq 0$, é um autovetor de T associado ao autovalor λ.*

Observação 8.0.6 *$V(\lambda)$ é um subespaço invariante por T, isto é,*

$$T(V(\lambda)) \subset V(\lambda).$$

Basta notar que se $u \in V(\lambda)$ então $T(u) = \lambda u \in V(\lambda)$.

Ex. Resolvido 14 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (y, x)$. Encontre os autovalores de T, os respectivos subespaços próprios e a multiplicidade geométrica de cada autovalor.*

Resolução: $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T se e somente se existir $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que $T(x, y) = \lambda(x, y)$, ou seja, se e somente se existir $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que $(y, x) = (\lambda x, \lambda y)$. Isto equivale a que o sistema

$$\begin{cases} y - \lambda x = 0 \\ x - \lambda y = 0 \end{cases}$$

possua uma solução não trivial. Isto acontece se e somente se o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

for igual a zero. Como este determinante é $\lambda^2 - 1$, vemos que os únicos autovalores de T são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$. Temos

$$V(-1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (y,x) = -(x,y)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x = -y\} = [(1,-1)].$$

Assim, a multiplicidade geométrica de -1 é 1.

$$V(1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (y,x) = (x,y)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x = y\} = [(1,1)].$$

Assim, a multiplicidade geométrica de 1 é 1.

Note que $(1,-1)$ é um autovetor associado ao autovalor -1 e e $(1,1)$ é um autovetor associado ao autovalor 1.

□

Ex. Resolvido 15 *Ainda com relação ao exercício anterior, encontre a matriz de T com relação à base $(1,-1)$ e $(1,1)$ formada pelos autovetores de T.*

Resolução: Temos

$$\begin{array}{rcccrcl} T(1,-1) & = & (-1,1) & = & -1(1,-1) & + & 0(1,1) \\ T(1,1) & = & (1,1) & = & 0(1,-1) & + & 1(1,1) \end{array}.$$

Logo, a matriz de T com relação a esta base é a matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Ex. Resolvido 16 *Faça o mesmo o que se pede no exercício 14 para a transformação $T(x,y) = (-y,x)$.*

Resolução: $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T se e somente se existir $(x,y) \neq (0,0)$ tal que $T(x,y) = \lambda(x,y)$, ou seja, se e somente se existir $(x,y) \neq (0,0)$ tal que $(-y,x) = (\lambda x, \lambda y)$. Isto equivale a que o sistema

$$\begin{cases} \lambda x + y = 0 \\ x - \lambda y = 0 \end{cases}$$

possua uma solução não trivial. Isto acontece se e somente se o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

for igual a zero. Como este determinante é $-\lambda^2 - 1 < 0$, vemos que não existem autovalores associados à transformação T.

□

Ex. Resolvido 17 *Seja $T : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ dada por $T(p(x)) = p'(x)$. Verifique que 0 é o único autovalor desta transformação. Encontre $V(0)$.*

Resolução: Note que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T se e somente se existir $p(x) \neq 0$ tal que $p'(x) = \lambda p(x)$. Se $\lambda \neq 0$ esta equação só é verdadeira para o polinômio nulo, posto que para qualquer outro polinômio os graus de $p'(x)$ e $\lambda p(x)$ são distintos. Desta forma, $\lambda \neq 0$ não é autovalor de T.

Agora, se $\lambda = 0$, então $p'(x) = 0$ apresenta como solução todos os polinômios constantes. Logo, $\lambda = 0$ é um autovalor associado, por exemplo, ao autovetor $p(x) = 1$.

Quanto a $V(0)$, basta ver que $V(0) = \mathcal{N}(T) = [1]$, isto é, o subespaço gerado pelo polinômio 1.

□

Ex. Resolvido 18 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x, y, 0)$. Encontre os autovalores de T e os respectivos subespaços próprios e a multiplicidade geométrica de cada autovalor.*

Resolução: $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T se e somente se existir $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ tal que $T(x, y, z) = \lambda(x, y, z)$, isto é, se e somente se existir $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ tal que $(x, y, 0) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$. Isto equivale a que o sistema

$$\begin{cases} (1-\lambda)x = 0 \\ (1-\lambda)y = 0 \\ \lambda z = 0 \end{cases}$$

possua uma solução não trivial. Isto acontece se e somente se o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

for igual a zero. Como este determinante é $\lambda(1-\lambda)^2$, vemos que os únicos autovalores de T são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$.

Quanto aos subespaços próprios, temos

$$V(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y, 0) = (0, 0, 0)\} = [(0, 0, 1)].$$

Assim, a multiplicidade geométrica de 0 é 1.

$$\begin{aligned} V(1) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y, 0) = (x, y, z)\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\} \\ &= [(1, 0, 0), (0, 1, 0)]. \end{aligned}$$

Assim, a multiplicidade geométrica de 1 é 2.

Proposição 42 *Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(U)$. Suponha que T possua autovetores $u_1, \ldots, u_n$ associados a autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, respectivamente. Se $\lambda_i \neq \lambda_j$, quando $i \neq j$ então $u_1, \ldots, u_n$ são linearmente independentes.*

Prova: A prova será por indução sobre so número de autovalores. Se $\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 = 0$ então

$$T(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2) = \beta_1 T(u_1) + \beta_2 T(u_2) = \beta_1 \lambda_1 u_1 + \beta_2 \lambda_2 u_2 = 0.$$

Portanto, $\beta_2(\lambda_2 - \lambda_1)u_2 = 0$ e, como $u_2 \neq 0$ e $\lambda_1 \neq \lambda_1$, resulta que $\beta_2 = 0$. Daí, $\beta_1 u_1 = 0$ e, como $u_1 \neq 0$, temos $\beta_1 = 0$. Portanto, u_1 e u_2 são linearmente independentes.

Suponhamos, como hipótese de indução, que $n-1$ autovetores de uma transformação linear associados a $n-1$ autovalores dois a dois distintos sejam linearmente independentes. Devemos mostrar que o mesmo resultado vale para n autovetores associados a n autovalores dois a dois distintos.

Sejam então $u_1, \ldots, u_n$ autovetores associados aos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, dois a dois distintos. Se $u_1, \ldots, u_n$ não fossem linearmente independentes, pelo menos um deles se escreveria como combinação linear dos outros. Para simplificar a notação, suponhamos que

$$u_1 = \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n \tag{8.1}$$

então

$$T(u_1) = T(\alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n) = \alpha_2 T(u_2) + \cdots + \alpha_n T(u_n)$$

$$\lambda_1 u_1 = \alpha_2 \lambda_2 u_2 \cdots + \alpha_n \lambda_n u_n, \tag{8.2}$$

De 8.1 e 8.2 resulta que

$$0 = \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)u_2 + \cdots + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_1)u_n$$

e pela hipótese de indução,

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1) = \cdots = \alpha_n(\lambda_n - \lambda_1) = 0,$$

mas como $\lambda_1 \neq \lambda_j$ para $j = 2, \ldots, n$, temos

$$\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Assim, pela equação 8.1, $u_1 = 0$, o que é impossível pois u_1 é um autovetor.

∎

Proposição 43 *Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(U)$. Suponha que T possua autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, distintos. Então a soma dos subespaços próprios de T é direta, isto é, para cada $j = 1, \ldots, n$, temos*

$$V(\lambda_j) \cap (V(\lambda_1) + \cdots + V(\lambda_{j-1}) + V(\lambda_{j+1}) + \cdots + V(\lambda_n)) = \{0\}.$$

Prova: A prova será por indução sobre so número de autovalores. Primeiramente, mostremos que $V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2) = \{0\}$. Fixe $v_1^{(1)}, \ldots, v_{m_1}^{(1)}$ uma base de $V(\lambda_1)$ e $v_1^{(2)}, \ldots, v_{m_2}^{(2)}$ uma base de $V(\lambda_2)$. Se $u \in V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2)$ então

$$u = \alpha_1^{(1)} v_1^{(1)} + \cdots + \alpha_{m_1}^{(1)} v_{m_1}^{(1)} = \alpha_1^{(2)} v_1^{(2)} + \cdots + \alpha_{m_2}^{(2)} v_{m_2}^{(2)}. \tag{8.3}$$

Logo, $T(u)$ é dado por

$$\alpha_1^{(1)} T(v_1^{(1)}) + \cdots + \alpha_{m_1}^{(1)} T(v_{m_1}^{(1)}) = \alpha_1^{(2)} T(v_1^{(2)}) + \cdots + \alpha_{m_2}^{(2)} T(v_{m_2}^{(2)}),$$

ou seja,

$$\alpha_1^{(1)} \lambda_1 v_1^{(1)} + \cdots + \alpha_{m_1}^{(1)} \lambda_1 v_{m_1}^{(1)} = \alpha_1^{(2)} \lambda_2 v_1^{(2)} + \cdots + \alpha_{m_2}^{(2)} \lambda_2 v_{m_2}^{(2)}. \tag{8.4}$$

Multiplicando a equação 8.3 por λ_1 e subtraindo-a de 8.4, obtemos

$$\alpha_1^{(2)}(\lambda_2 - \lambda_1) v_1^{(2)} + \cdots + \alpha_{m_2}^{(2)}(\lambda_2 - \lambda_1) v_{m_2}^{(2)} = 0.$$

Como $v_1^{(2)}, \ldots, v_{m_2}^{(2)}$ é uma base de $V(\lambda_2)$, temos

$$\alpha_1^{(2)}(\lambda_2 - \lambda_1) = \cdots = \alpha_{m_2}^{(2)}(\lambda_2 - \lambda_1) = 0$$

e, como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, resulta que $\alpha_1^{(2)} = \cdots = \alpha_{m_2}^{(2)} = 0$. Segue-se de 8.3 que $u = 0$.

Suponhamos agora, por indução, que a soma de $n-1$ espaços próprios de T referentes a $n-1$ autovalores distintos seja direta. Precisamos mostrar que este resultado é válido quando T apresenta n autovalores distintos.

Para cada $j = 1, \ldots, n$ selecione uma base B_j de $V(\lambda_j)$ constituída por vetores que denotaremos por $v_1^{(j)}, \ldots, v_{m_j}^{(j)}$. Note que cada $v_i^{(j)}$ é um autovetor associado ao autovalor λ_j e que m_j é a multiplicidade geométrica deste autovalor.

Se

$$u \in V(\lambda_j) \cap (V(\lambda_1) + \cdots + V(\lambda_{j-1}) + V(\lambda_{j+1}) + \cdots + V(\lambda_n)),$$

então

$$u = \alpha_1^{(j)} v_1^{(j)} + \cdots + \alpha_{m_j}^{(j)} v_{m_j}^{(j)} = \alpha_1^{(1)} v_1^{(1)} + \cdots + \alpha_{m_{j-1}}^{(j-1)} v_{m_{j-1}}^{(j-1)} + \alpha_1^{(j+1)} v_1^{(j+1)} + \cdots + \alpha_{m_n}^{(n)} v_{m_n}^{(n)}. \tag{8.5}$$

Assim, $T(u)$ é dado por

$$\alpha_1^{(j)}T(v_1^{(j)}) + \cdots + \alpha_{m_j}^{(j)}T(v_{m_j}^{(j)}) = \alpha_1^{(1)}T(v_1^{(1)}) + \cdots + \alpha_{m_{j-1}}^{(j-1)}T(v_{m_{j-1}}^{(j-1)}) + \alpha_1^{(j+1)}T(v_1^{(j+1)}) + \cdots + \alpha_{m_n}^{(n)}T(v_{m_n}^{(n)})$$

isto é,

$$\alpha_1^{(j)}\lambda_j v_1^{(j)} + \cdots + \alpha_{m_j}^{(j)}\lambda_j v_{m_j}^{(j)} = \alpha_1^{(1)}\lambda_1 v_1^{(1)} + \cdots + \alpha_{m_{j-1}}^{(j-1)}\lambda_{j-1} v_{m_{j-1}}^{(j-1)} + \alpha_1^{(j+1)}\lambda_{j+1} v_1^{(j+1)} + \cdots + \alpha_{m_n}^{(n)}\lambda_n v_{m_n}^{(n)}. \quad (8.6)$$

Multiplicando a equação 8.5 por λ_j e subtraindo-a de 8.6, obtemos

$$\alpha_1^{(1)}(\lambda_1 - \lambda_j)v_1^{(1)} + \cdots + \alpha_{m_{j-1}}^{(j-1)}(\lambda_{j-1} - \lambda_j)v_{m_{j-1}}^{(j-1)} + \alpha_1^{(j+1)}(\lambda_{j+1} - \lambda_j)v_1^{(j+1)} + \cdots + \alpha_{m_n}^{(n)}(\lambda_n - \lambda_j)v_{m_n}^{(n)} = 0$$

Usando a nossa hipótese de indução e o fato que $\lambda_j \neq \lambda_i$, quando $i \neq j$, obtemos $\alpha_1^i = \cdots = \alpha_{m_i}^i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$. Disto e da equação 8.5 resulta que $u = 0$. Como queríamos. ∎

8.2 Polinômio Característico

Definição 31 *Dada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ definimos o polinômio característico de A como sendo o determinante*

$$p_A(x) = \det(A - xI),$$

onde I é a matriz identidade de ordem n.

Definição 32 *Sejam $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Dizemos que A e B são semelhantes se existir $M \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertível tal que $A = M^{-1}BM$.*

Proposição 44 *Se $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ são matrizes semelhantes então seus polinômios característicos são iguais.*

Prova: Temos

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det(A - xI) = \det(M^{-1}BM - xM^{-1}IM) \\ &= \det(M^{-1}(BM - xIM)) = \det(M^{-1}(B - xI)M) \\ &= \det M^{-1}\det(B - xI)\det M = \frac{1}{\det M}\det(B - xI)\det M = p_B(x). \end{aligned}$$

∎

Lembre que se $T \in \mathcal{L}(U)$, onde U é um espaço vetorial de dimensão finita, e se B e C são bases de U então

$$[T]_C = M_C^B[T]_B M_B^C = \left[M_B^C\right]^{-1}[T]_B M_B^C.$$

Desta forma, $p_{[T]_B}(x) = p_{[T]_C}(x)$, ou seja, o polinômio característico da matriz de uma transformação linear independe da escolha da base. Podemos assim, sem causar ambigüidades, definir o polinômio característico de T como sendo

$$p_T(x) = p_{[T]_B}(x),$$

onde B é uma base qualquer de U.

Ex. Resolvido 19 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy).$$

Encontre $p_T(x)$.

Resolução: Usaremos a base canônica, C, de $\mathbb{R}^2$. Como $T(1,0) = (a,c)$ e $T(0,1) = (b,d)$, vemos que

$$[T]_C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} p_T(x) &= \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} a - x & b \\ c & d - x \end{pmatrix} = x^2 - (a+d)x + ad - bc. \end{aligned}$$

□

Proposição 45 *Sejam* U *um espaço vetorial de dimensão finita e* $T \in \mathcal{L}(U)$. *Então,* λ *é um autovalor de* T *se e somente se* $p_T(\lambda) = 0$.

Prova: Fixe B uma base de U.

Suponha que λ seja um autovalor de T. Então existe $u \neq 0$ tal que $T(u) = \lambda u$, ou seja, $(T - \lambda I)(u) = 0$. Desta forma, vemos que a transformação linear $T - \lambda I : U \to U$ não é injetora e, conseqüentemente, não é um isomorfismo. Disto resulta que $[T - \lambda I]_B$ não é invertível, ou equivalentemente, $p_T(\lambda) = \det\,[T - \lambda I]_B = 0$.

Reciprocamente, se $p_T(\lambda) = 0$ então a matriz $[T - \lambda I]_B$ tem determinante nulo. Isto implica que a transformação $T - \lambda I : U \to U$ não é um isomorfismo e, portanto, não é injetora. Logo, existe $u \neq 0$ tal que $(T - \lambda I)(u) = 0$. Portanto, $T(u) = \lambda u$, $u \neq 0$, isto é, λ é um autovalor de T.

∎

Exercício 7 *Refaça os exercícios resolvidos 14, 16, 17 e 18 tendo como base a proposição anterior.*

Definição 33 *Sejam* U *um espaço vetorial de dimensão finita e* $T \in \mathcal{L}(U)$. *Se* λ *é um autovalor de* T, *definimos a multiplicidade algébrica de* λ *como sendo a multiplicidade de* λ *como raiz de* $p_T(x)$.

Proposição 46 *Sejam* U *um espaço vetorial de dimensão finita e* $T \in \mathcal{L}(U)$. *Se* λ *é um autovalor de* T *então a sua multiplicidade geométrica não excede a sua multiplicidade algébrica.*

Prova: Seja n a dimensão de U. Denotemos por m e r as multiplicidades algébrica e geométrica de λ, respectivamente.

Como $\dim V(\lambda) = r$, existem $u_1, \dots, u_r \in V(\lambda)$ linearmente independentes. Completando estes vetores a uma base de U, vemos que com relação a esta base é da forma

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}_{r\times r} & A_{r\times(n-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & B_{(n-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

vemos que o fator $(x - \lambda)^r$ aparece na fatoração do polinômio $p_T(x)$. Por outro lado, como a multiplicidade algébrica de λ é m, obtemos $r \leq m$.

∎

Ex. Resolvido 20 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por*

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy).$$

Analise quando esta transformação possui autovalores e o número deles.

Resolução: Sabemos do exercício resolvido 19 que

$$p_T(x) = x^2 - (a + d)x + ad - bc.$$

Pela proposição 45 que λ é um autovalor de T se e somente se $p_T(\lambda) = 0$, isto é, se e somente se

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

e esta equação possui solução (real) se e somente se $(a + d)^2 - 4(ad - bc) \geq 0$. Quando $(a + d)^2 = 4(ad - bc)$ vemos que T apresenta somente um autovalor, dado por $(a + d)/2$; quando $(a + d)^2 - 4(ad - bc) > 0$, T apresenta dois autovalores distintos dados por

$$\frac{a + d + \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{a + d - \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}.$$

Capítulo 9

Diagonalização

Definição 34 *Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(U)$. Dizemos que T é diagonalizável se existir uma base de U formada por autovetores de T.*

Note que se $T \in \mathcal{L}(U)$ é diagonalizável e se $u_1, \ldots, u_n$ formam uma base B de U formada autovetores de T associados, respectivamente, aos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, então a matriz de T com relação a esta base é

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

ou seja, $[T]_B$ é uma matriz diagonal, isto é, uma matriz quadrada (a_{ij}) tal que $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Reciprocamente, se existir uma base $C : v_1, \ldots, v_n$ de U com relação a qual a matriz de $T \in \mathcal{L}(U)$ é diagonal, então T é diagonalizável. De fato, se

$$[T]_C = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix}$$

então, pela própria definição de matriz de uma transformação linear, vemos que $T(v_1) = \mu_1 v_1, \ldots, T(v_n) = \mu_n v_n$, ou seja, a base C é formada por autovetores de T. Resumiremos este fato no seguinte

Teorema 6 *Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(U)$. Então, T é diagonalizável se e somente se existir uma base de U com relação a qual a matriz de T é diagonal.*

Note que se $T \in \mathcal{L}(U)$ é diagonalizável então pelo teorema 6 existe uma base B formada por autovetores de T com relação a qual a matriz de T é diagonal. Se C é uma outra base de U sabemos que $[T]_B = (M_C^B)^{-1}[T]_C M_C^B$. Esta última igualdade nos sugere a seguinte

Definição 35 *Dizemos que uma matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é diagonalizável se existir $M \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertível tal que $M^{-1}AM$ seja uma matriz diagonal.*

Proposição 47 *Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita, $T \in \mathcal{L}(U)$ e C uma base qualquer de U. Então T é diagonalizável se e somente se a matriz $[T]_C$ for diagonalizável.*

Prova: Já vimos que se T for diagonalizável então $[T]_C$ é uma matriz diagonalizável.

Reciprocamente, suponha que $[T]_C$ seja diagonalizável. Assim, existe $M = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertível tal que $M^{-1}[T]_C M$ é uma matriz diagonal. Se $u_1, \dots, u_n$ são os vetores da base C então, colocando $v_j = a_{1j}u_1 + \cdots + a_{nj}u_n$, vemos que $v_1, \dots, v_n$ formam uma base de U pois M é invertível. Além do mais, $M = M_C^B$. Deste modo,

$$[T]_B = (M_C^B)^{-1}[T]_C M_C^B = M^{-1}[T]_C M$$

é diagonal, isto é, T é diagonalizável.

∎

Note que pelo teorema acima, para verificar se um operador é diagonalizável, basta verificar se a matriz de T com relação a uma base *qualquer* de U é diagonalizável.

Observação 9.0.1 *Note que se T for diagonalizável, o seu polinômio característico é da forma*

$$p_T(x) = (\lambda_1 - x)\cdots(\lambda_n - x),$$

onde os números reais $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *são todos os autovalores de T.*

Teorema 7 *Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(U)$. Então, T é diagonalizável se e somente se os autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de T forem tais que*

$$U = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_n).$$

Prova: Se

$$U = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_n)$$

então podemos formar uma base B de U formada por bases B_j de $V(\lambda_j)$, $j = 1, \dots, n$. Como cada elemento de B_j é um autovetor de T, segue-se, pelo teorema 6 que T é diagonalizável.

Reciprocamente, se T for diagonalizável, pelo teorema 6, existe uma base B de U formada por autovetores de T. Como cada autovetor está associado a algum autovalor de T, vemos que cada elemento de B está contido em algum $V(\lambda_j)$. Desta forma, a soma de todos os subespaços próprios de T contém B e, portanto, é o próprio U. Pelo teorema 43 esta soma é direta, ou seja,

$$U = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_n).$$

∎

Exemplo 40 *As transformações dos exercícios resolvidos 14 e 18 são diagonalizáveis. Já a transformação do 16 não o é pois não possui autovetores. Quanto a transformação do 17 vemos que também não é diagonalizável se $n \geq 1$, pois todo autovetor de T pertence a $V(0)$, que é unidimensional, e* $\dim \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = n+1 \geq 2$.

Vejamos como é possível decidir sobre a diagonalização de um operador linear a partir das multiplicidades algébrica e geométrica de seus autovalores.

Sejam U um espaço vetorial de dimensão m e $T \in \mathcal{L}(U)$. Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são autovalores de T dois a dois distintos então o polinômio característico de T é dado por

$$p_T(x) = (\lambda_1 - x)^{m_1}\cdots(\lambda_n - x)^{m_n}, \tag{9.1}$$

onde m_j é a multiplicidade algébrica de λ_j. Note que $m = m_1 + \cdots + m_n$.

Se denotarmos por r_j a multiplicidade geométrica de λ_j, isto é, $r_j = \dim V(\lambda_j)$ então, pelo teorema 7, T é diagonalizável se e somente se $m = r_1 + \cdots + r_n$. Por este mesmo teorema, T é diagonalizável se e somente se U possuir uma base formada pela reunião das bases dos espaços próprios de T, visto que isto é equivalente a dizer que a soma destes subespaços é direta. Como com relação a uma tal base a matriz de T é da forma

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_1 \end{bmatrix}_{r_1 \times r_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{bmatrix} \lambda_n & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}_{r_n \times r_n} \end{pmatrix}_{m \times m}$$

vemos que T é diagonalizável se e somente se o seu polinômio característico é dado por

$$p_T(x) = (\lambda_1 - x)^{r_1} \cdots (\lambda_n - x)^{r_n}. \tag{9.2}$$

Comparando 9.1 e 9.2, obtemos o importante

Teorema 8 *Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(U)$. Então T é diagonalizável se e somente para cada autovalor λ de T as suas multiplicidades algébrica e geométrica forem iguais.*

Corolário 6 *Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(U)$. Se*

$$p_T(x) = (\lambda_1 - x) \cdots (\lambda_n - x),$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ são dois a dois distintos então T é diagonalizável.

Prova: Como os autovalores de T são dois a dois distintos, vê-se que as raízes de $p_T(x)$, são todas simples, isto é, têm multiplicidade um. Desta forma, se λ é um autovalor de T então a sua multiplicidade geométrica é um. Pela proposição 46, a multiplicidade geométrica de λ é menor do que ou igual a um. Como $\dim V(\lambda) \geq 1$, segue-se que a a multiplicidade geométrica de λ é um, ou seja, igual à sua multiplicidade algébrica.

∎

Ex. Resolvido 21 *Verifique se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ da por*

$$T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y + 2z)$$

é diagonalizável.

Resolução: Com relação à base canônica, a matriz de T é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$p_T(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{pmatrix} = (1-x)((1-x)(2-x) - 1) + 1(-(1-x))$$
$$= (1-x)(x^2 - 3x) = x(1-x)(x-3).$$

Desta forma, vemos que $P_T(x)$ apresenta todas as raízes reais e simples e, pelo corolário 6, segue-se que T é diagonalizável.

□

Ex. Resolvido 22 *Encontre uma base de autovetores para o operador do exercício anterior. Encontre também a matriz de T com relação a esta base.*

Resolução: *autovalor 0:* Precisamos encontrar (x, y, z) não nulo tal que $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Temos

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y = -z \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \iff x = y = -z,$$

assim, podemos tomar como autovetor associado ao autovalor 0, o vetor $u = (1, 1, -1)$.

autovalor 1: Precisamos encontrar (x, y, z) não nulo tal que $T(x, y, z) = (x, y, z)$. Temos

$$\begin{cases} x + z = x \\ y + z = y \\ x + y + 2z = z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x = -y \end{cases},$$

assim, podemos tomar como autovetor associado ao autovalor 1, o vetor $v = (1, -1, 0)$.

autovalor 3: Precisamos encontrar (x, y, z) não nulo tal que $T(x, y, z) = (3x, 3y, 3z)$. Temos

$$\begin{cases} x + z = 3x \\ y + z = 3y \\ x + y + 2z = 3z \end{cases} \iff z = 2x = 2y,$$

assim, podemos tomar como autovetor associado ao autovalor 3, o vetor $v = (1, 1, 2)$.

É claro que a matriz de T com relação à base formada por u, v e w é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

□

Ex. Resolvido 23 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuja matriz com relação a alguma base é dada por*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Mostre que T diagonalizável.

Resolução: O polinômio característico de T é dado por

$$p_T(x) = x^2 - (a + c)x + ac - b^2.$$

Vemos que $p_T(x)$ apresenta duas raízes reais simples, isto é, com multiplicidade um, se e somente se o discriminante $(a + c)^2 - 4(ac - b^2)$ for positivo. Assim,

$$(a + c)^2 - 4(ac - b^2) = a^2 + b^2 - 2ac + 4b^2 = (a - c)^2 + 4b^2 > 0$$

se e somente se $a \neq c$ ou $b \neq 0$. Vemos assim que, se $a \neq c$ ou $b \neq 0$ as multiplicidades algébrica e geométrica de cada um dos autovalores de T (as raízes de $p_T(x)$) coincidem e, portanto, T é diagonalizável.

Se $a = c$ e $b = 0$ então vê-se claramente que T é diagonalizável pois, neste caso, A é diagonal.

□

Ex. Resolvido 24 *Verifique se* $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *dado por*

$$T(p(t)) = p''(t) - 2p'(t) + p(t)$$

é diagonalizável.

Resolução: A matriz de T com relação à base canônica é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, $P_T(x) = (1-x)^3$ e, desta forma, 1 é o único autovalor de T. Como pelo teorema 8 T é diagonalizável se e somente se $\dim V(1) = 3$, vejamos qual é a dimensão deste subespaço próprio.

$$(x, y, z) \in V(1) \iff \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff y = z = 0.$$

Portanto, $V(1) = [(1, 0, 0)]$ e T não é diagonalizável.

□

Ex. Resolvido 25 *Verifique se* $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *dada por*

$$T(x, y, z, t) = (x + y, y, 2z + t, 2z + t)$$

é diagonalizável. Encontre também os espaços próprios de T.

Resolução: A matriz de T com relação à base canônica é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

e o seu polinômio característico é

$$p_T(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-x & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2((2-x)(1-x) - 2)$$

$$= (1-x)^2(x^2 - 3x) = x(x-3)(1-x)^2.$$

(i) autovalor 0:

$$(x, y, z, t) \in V(0) \iff (x + y, y, 2z + t, 2z + t) = (0, 0, 0, 0) \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ y = 0 \\ 2z + t = 0 \\ 2z + t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = y = 0 \\ t = -2z \end{cases} \iff (x, y, z, t) = z(0, 0, 1, -2).$$

Logo, $V(0) = [(0, 0, 1, -2)]$.

(ii) autovalor 3:

$$(x, y, z, t) \in V(3) \iff (x + y, y, 2z + t, 2z + t) = (3x, 3y, 3z, 3t)$$

$$\iff \begin{cases} x + y = 3x \\ y = 3y \\ 2z + t = 3z \\ 2z + t = 3t \end{cases} \iff \begin{cases} x = y = 0 \\ t = z \end{cases} \iff (x, y, z, t) = z(0, 0, 1, 1).$$

Logo, $V(3) = [(0, 0, 1, 1)]$.

(iii) autovalor 1:

$$(x, y, z, t) \in V(1) \iff (x + y, y, 2z + t, 2z + t) = (x, y, z, t)$$

$$\iff \begin{cases} x + y = x \\ y = y \\ 2z + t = z \\ 2z + t = t \end{cases} \iff y = z = t = 0 \iff (x, y, z, t) = x(1, 0, 0, 0).$$

Logo, $V(1) = [(1, 0, 0, 0)]$.

Como a multiplicidade algébrica do autovalor 1 é dois e a sua multiplicidade geométrica é um, vemos que T não é diagonalizável.

$\square$

Ex. Resolvido 26 *Ainda com relação ao operador do exercício anterior, encontre a matriz de T com relação à base B formada pelos vetores $u = (0, 0, 1, -2)$, $v = (0, 0, 1, 1)$, $w = (1, 0, 0, 0)$ e $p = (0, 1, 0, 0)$.*

Resolução: Já sabemos que $T(u) = 0$, $T(v) = 3v$ e $T(w) = w$. Agora, como

$$T(p) = T(0, 1, 0, 0) = (1, 1, 0, 0) = w + p,$$

vemos que

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Capítulo 10

Forma Canônica de Jordan

Como vimos, nem todo operador linear é diagonalizável. No entanto, se $T \in \mathcal{L}(U)$, onde U é um espaço vetorial de dimensão finita, existe uma base com relação a qual, a matriz de T é *próxima* de uma de uma matriz diagonal. A seguir daremos uma pequena descrição de como é a forma desta matriz, mas antes precisamos de algumas notações.

Seja $p_T(x)$ o polinômio característico de T. A primeira observação a ser feita é que $p_T(x)$ se fatora como

$$p_T(x) = (\lambda_1 - x)^{m_1} \cdots (\lambda_n - x)^{m_n}((x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2)^{p_1} \cdots ((x-\alpha_k)^2 + \beta_k^2)^{p_k}$$

onde $\lambda_r \neq \lambda_s$, e $(\alpha_r, \beta_r) \neq (\alpha_s, \beta_s)$ se $r \neq s$. Note que cada $\alpha_r + i\beta_r$ é uma raiz complexa de $p_T(x)$. Note também que $m_1 + \cdots + m_n + 2p_1 + \cdots 2p_k = \dim U$.

Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T, denotaremos por $J(\lambda; r)$ a matriz quadrada de ordem r com todos os elementos da diagonal principal iguais a λ e todos os elementos logo acima desta, iguais a 1, ou seja,

$$J(\lambda; r) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}_{r \times r}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{r \times r} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{r \times r} = \lambda I + N,$$

onde I é a matriz identidade de ordem r e

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{r \times r} .$$

Note que N^r é a matriz nula, isto é, N é uma matriz nilpotente.

Se $\alpha + i\beta$ é uma raiz complexa de $p_T(x)$ e r é um número par, definimos

$$R(\alpha,\beta;r) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\beta & \alpha \end{pmatrix}_{r\times r}.$$

Se $B_1, \ldots, B_k$ são matrizes quadradas, não necessariamente de ordens iguais, definimos $\operatorname{diag}(B_1, \ldots, B_)$ como sendo a matriz quadrada de ordem igual à soma das ordens de $B_1, \ldots, B_k$ dada por

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_k \end{pmatrix},$$

por exemplo, se

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

então

$$\operatorname{diag}(B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Teorema 9 (Forma Canônica de Jordan) *Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(U)$. Se*

$$p_T(x) = (\lambda_1 - x)^{m_1} \cdots (\lambda_n - x)^{m_n} ((x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2)^{p_1} \cdots ((x-\alpha_k)^2 + \beta_k^2)^{p_k}$$

onde $\lambda_r \neq \lambda_s$, $(\alpha_r, \beta_r) \neq (\alpha_s, \beta_s)$ se $r \neq s$, e $\beta_r > 0$, então existe uma base de U com relação a qual a matriz de T é da forma

$$J = \operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_p, R_1, \ldots, R_q), \tag{10.1}$$

onde $J_1, \ldots, J_p$ são da forma $J(\lambda; r)$ para algum $r \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ e $R_1, \ldots, R_q$ são da forma $R(\alpha, \beta; s)$ para algum $s \in \mathbb{N}$ e $(\alpha, \beta) \in \{(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_k, \beta_k)\}$.

Observação 10.1.1 *A matriz 10.1 é única a menos de permutações dos seus* blocos *que compõem a sua diagonal.*

Observação 10.1.2 *Se λ é um autovalor de T então a soma das ordens dos blocos $J(\lambda; s)$ é igual à multiplicidade algébrica de λ.*

Observação 10.1.3 *Se $\alpha + i\beta$ é uma raiz complexa de $p_T(x)$ então a soma das ordens dos blocos $R(\alpha, \beta; s)$ é igual ao dobro da multiplicidade da raiz $\alpha + i\beta$.*

Observação 10.1.4 *Se λ é um autovalor de T com multiplicidade geométrica r então existem r blocos $J(\lambda; s)$ associados ao autovalor λ.*

Observação 10.1.5 *Suponha que*

$$p_T(x) = (\lambda_1 - x)^{m_1} \cdots (\lambda_n - x)^{m_n}$$

onde $\lambda_i \neq \lambda_j$, *se* $i \neq j$. *Se* m_j *também é multiplicidade geométrica de* λ_j *então o teorema de Jordan diz simplesmente que* T *é diagonalizável.*

Observação 10.1.6 *O teorema de Jordan diz que a matriz de um operador* T *com relação a uma base arbitrária é semelhante a uma matriz da forma 10.1*

Ex. Resolvido 27 *Encontre as possíveis matrizes na forma canônica de Jordan para a um operador cujo polinômio característico é dado por* $p_T(x) = (2-x)^3(1-x)$.

Resolução: Note que T apresenta apenas os autovalores 2 e 1.

Como as multiplicidades algébricas e geométrica do autovalor 1 são iguais a um, vemos que o único bloco correspondente a este autovalor é $J(1;1) = (1)$.

Com relação ao autovalor 2, a sua multiplicidade algébrica é 3. Se sua multiplicidade geométrica for 3 então existem 3 blocos associados a este autovalor e todos eles são iguais a (2). Neste caso, a matriz da forma canônica de Jordan para este operador é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se a multiplicidade geométrica do autovalor 2 for dois, então existem dois blocos correspondentes a este autovalor que são da forma

$$J(2;1) = (2) \qquad J(2;2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Assim, a matriz da forma canônica de Jordan para este operador é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se a multiplicidade geométrica do autovalor 2 for um, então existe um bloco correspondente a este autovalor que é

$$J(2;3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Assim, a matriz da forma canônica de Jordan para este operador é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ex. Resolvido 28 *Encontre as possíveis matrizes na forma canônica de Jordan para a um operador cujo polinômio característico é dado por* $p_T(x) = (1-x)^2(4+x^2)$.

Utilizando a notação do teorema 9 temos $\lambda_1 = 1$, $\alpha = 0$ e $\beta = 2$. Como $0 + i2$ tem multiplicidade um (como raiz de $p_T(x)$), existe apenas um bloco da forma

$$R(0,2;2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se a multiplicidade geométrica do autovalor 1 for dois então existem apenas dois blocos associados a este autovalor e são iguais a (1). Neste caso, a matriz da forma canônica de Jordan para este operador é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se a multiplicidade geométrica do autovalor 1 for um então existe apenas um bloco de ordem um associado a este autovalor que é dado por

$$J(1;2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, a matriz da forma canônica de Jordan para este operador é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ex. Resolvido 29 *Encontre uma base de $\mathbb{R}^4$ com relação a qual a matriz da transformação*

$$T(x, y, z, t) = (2x + y + z + t, 2y - z - t, 3z - t, 4t)$$

está na forma canônica de Jordan.

Resolução: Com relação à base canônica de $\mathbb{R}^4$, a matriz de T é dada por

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico de T é $p_T(x) = (3 - x)(4 - x)(2 - x)^2$. Desta forma vemos que $\dim V(3) = \dim V(4) = 1$. É simples ver que

$$V(3) = [(0, 1, -1, 0)] \quad \text{e} \quad V(4) = [(0, 0, 1, -1)].$$

Vejamos qual a dimensão de $\dim V(2)$. Temos que $(x, y, z, t) \in V((2)$ se e somente se

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, $(x, y, z, t) = x(1, 0, 0, 0)$. Assim, $\dim V(2) = 1$ e T não é diagonalizável. Sendo assim, a matriz de T na forma canônica de Jordan é da forma

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Note que se colocarmos $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_3 = (0, 1, -1, 0)$ e $u_4 = (0, 0, 1, -1)$ então para que u_1, u_2, u_3, u_4 seja a base procurada, o vetor u_2 deve satisfazer $T(u_2) = u_1 + 2u_2$, ou seja, $(T - 2I)(u_2) = u_1$. Desta forma, colocando $u = (a, b, c, d)$, temos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuja solução geral é da forma $(a, 1, 0, 0)$. Tomamos, por exemplo, $u_2 = (0, 1, 0, 0)$ e isto nos fornece a base procurada.

Capítulo 11

Espaços Euclidianos

11.1 Produto Interno

Definição 36 *Seja V um espaço vetorial. Um produto interno sobre V é uma aplicação que a cada par $(u, v) \in V \times V$ associa um número real denotado por $\langle u, v\rangle$ satisfazendo as seguintes propriedades*

(i) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ *para todo* $u, v, w \in V$;

(ii) $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$ *para todo* $u, v \in V$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$;

(iii) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ *para todo* $u, v \in V$;

(iv) $\langle u, u\rangle > 0$ *se* $u \neq 0$.

O espaço vetorial V munido de um produto interno é chamado de espaço euclidiano.

Algumas propriedades seguem-se imediatamente. Por exemplo, vemos que $\langle 0, u\rangle = 0$ para todo $u \in V$, pois

$$\langle 0, u\rangle = \langle 0 + 0, u\rangle = \langle 0, u\rangle + \langle 0, u\rangle,$$

e o resultado segue por cancelamento.

Outra propriedade é que $\langle u, v + \alpha w\rangle = \langle u, v\rangle + \alpha\langle u, w\rangle$, para todo $u, v, w \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Basta combinar as propriedades (i), (ii) e (iii) acima. Desta maneira, vemos que o produto interno é linear em cada variável.

A seguir apresentamos alguns exemplos de produto interno em vários espaços vetoriais. A verificação das propriedades (i) a (iv) é deixada como exercício.

Exemplo 41 *Se $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ definimos*

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \tag{11.1}$$

Ex. Resolvido 30 *Com relação ao exemplo anterior, calcule o produto interno entre os vetores* $(1, -1, 1)$, $(0, 2, 4) \in \mathbb{R}^3$.

Resolução: Basta notar que

$$\langle (1, -1, 1), (0, 2, 4)\rangle = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 2.$$

□

Ex. Resolvido 31 *Com relação ao produto interno dado por 11.1, calcule $\langle u, v\rangle$ onde $u = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ e $u = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$.*

Resolução: Temos

$$\langle u, v\rangle = \langle(\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta), (\cos\alpha,\ \operatorname{sen}\alpha)\rangle$$
$$= \cos\theta\cos\alpha + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha = \cos(\theta-\alpha).$$

□

Há vários outros tipos de produto interno no $\mathbb{R}^n$ além do apresentado em 11.1. Vejamos um exemplo no $\mathbb{R}^3$:

Exemplo 42 *Se $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, definimos*

$$\langle(x, y, z), (x', y', z')\rangle = \frac{xx'}{2} + \frac{yy'}{3} + \frac{zz'}{4}.$$

É fácil verificar que a expressão acima define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

Ex. Resolvido 32 *Com relação ao produto interno apresentado no exemplo anterior, calcule $\langle(1, -1, 1), (0, 2, 4)\rangle$.*

Resolução:

$$\langle(1, -1, 1), (0, 2, 4)\rangle = \frac{1\cdot 0}{2} + \frac{-1\cdot 2}{3} + \frac{1\cdot 4}{4} = \frac{1}{3}.$$

□

Exemplo 43 *Se $f, g \in C([a, b]; \mathbb{R})$ definimos*

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx. \tag{11.2}$$

Ex. Resolvido 33 *Com relação ao produto interno apresentado no exemplo anterior, calcule o produto interno entre* $\operatorname{sen}, \cos \in C([0, 2\pi]; \mathbb{R})$.

Resolução:

$$\langle \operatorname{sen}, \cos\rangle = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\cos x\,dx = \left.\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2}\right|_0^{2\pi} = 0.$$

□

Exemplo 44 *Se $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ definimos*

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}.$$

Ex. Resolvido 34 *Com relação ao produto interno apresentado no exemplo anterior, calcule o produto interno entre*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resolução:

$$\langle A, B\rangle = 1\cdot(-2) + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 2\cdot 1 = 0.$$

□

Exercício 8 *O traço de uma matriz quadrada A é a soma dos elementos da diagonal da matriz e é denotado por* $\operatorname{tr} A$. *Mostre que se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ então*

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(B^t A)$$

define um produto interno em $M_n(\mathbb{R})$.

11.2 Norma

Definição 37 *Se V é um espaço euclidiano, definimos para cada $u \in$ o número $||u|| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$. Este valor é chamado de norma de u.*

Observação 11.2.1 *Note que é possível extrair a raiz quadrada de $\langle u, u\rangle$ pois este número é não negativo.*

Exemplo 45 *Em $\mathbb{R}^n$, com o produto interno dado por 11.1, a norma de $x = (x_1, \dots, x_n)$ é dada por*

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Note a norma de x representa o comprimento deste vetor.

Exemplo 46 *Em $C([a, b]; \mathbb{R})$ com o produto interno definido por 11.2, a norma de $f \in C([a, b]; \mathbb{R})$ é dada por*

$$||f|| = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 \, dx}.$$

Proposição 48 *Seja V um espaço vetorial com um produto interno. Temos*

1. $||\alpha u|| = |\alpha| ||u||$, $\forall\, u \in V$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$;
2. $||u|| \geq 0$ $\forall\, u \in V$;
3. $||u|| = 0$ *se e somente se* $u = 0$;
4. $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\|$ $\forall\, u, v \in V$ *(desigualdade de Cauchy-Schwarz);*
5. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ $\forall\, u, v \in V$ *(desigualdade triangular).*

Prova:

1. $||\alpha u|| = \sqrt{\langle \alpha u, \alpha u\rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle u, u\rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle u, u\rangle} = |\alpha| \, ||u||$.
2. Óbvio pois a raiz quadrada é não negativa.
3. Se $u = 0$ então $\|u\| = \sqrt{\langle 0, 0\rangle} = 0$.
   Reciprocamente, se $u \neq 0$ então $\langle u, u\rangle > 0$ e $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} > 0$.
4. Se $v = 0$ então $|\langle u, 0\rangle| = 0 = \|u\| \, \|0\|$.
   Suponha que $v \neq 0$. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $\|u + \alpha v\|^2 \geq 0$. Logo,
   $$0 \leq \langle u + \alpha v, u + \alpha v\rangle = \langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle\alpha + \langle v, v\rangle\alpha^2$$
   $$= ||u||^2 + 2\alpha\langle u, v\rangle + ||v||^2\alpha^2.$$
   Assim, o discriminante $\Delta = 4\langle u, v\rangle^2 - 4||u||^2||v||^2 \leq 0$, ou seja, $\langle u, v\rangle^2 \leq ||u||^2||v||^2$. Extraindo a raiz quadrada, obtemos $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\|$.
5. A seguir usaremos a desigualdade de Cauchy-Schwarz
   $$||u + v||^2 = \langle u + v, u + v\rangle = ||u||^2 + ||v||^2 + 2\langle u, v\rangle$$
   $$\leq ||u||^2 + ||u||^2 + 2||u||||v|| = [||u|| + ||v||]^2.$$
   Extraindo a raiz quadrada, segue o resultado desejado.

∎

Observe que a desigualdade de Cauchy-Schwarz aplicada ao produto interno do $\mathbb{R}^n$ dado por 11.1 nos diz que

$$(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2).$$

A mesma desigualdade aplicada ao produto interno em $C([a,b,];\mathbb{R})$ fornece

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \int_a^b [f(x)]^2\,dx \int_a^b [g(x)]^2\,dx.$$

Proposição 49 (Identidade do Paralelogramo) *Sejam u e v vetores de um espaço euclidiano. Então*

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Prova:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle$$

$$= \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle - 2\langle u,v\rangle$$

$$= 2\langle u,u\rangle + 2\langle v,v\rangle = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

∎

A próxima proposição mostra como se pode obter o produto interno entre dois vetores a partir das normas de suas soma e diferença.

Proposição 50 *Sejam u e v vetores de um espaço euclidiano. Então*

$$\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4\langle u,v\rangle.$$

Prova:

$$\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle - \langle u-v, u-v\rangle$$

$$= \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle + 2\langle u,v\rangle - \langle u,u\rangle - \langle v,v\rangle + 2\langle u,v\rangle$$

$$= 4\langle u,v\rangle.$$

∎

Ex. Resolvido 35 *Calcule $\langle u,v\rangle$ sabendo-se que $\|u+v\| = 1$ e $\|u-v\| = 1$.*

Resolução: Temos

$$\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2) = 0.$$

□

11.3 Distância

Definição 38 *Num espaço euclidiano V definimos a distância entre $u,v \in V$ como*

$$d(u,v) = \|u-v\|.$$

Resulta da proposição acima que a distância satisfaz as seguintes propriedades

Proposição 51 *Num espaço euclidiano V temos*

1. *$d(u,v) \geq 0$ para todo $u,v \in V$;*

2. $d(u,v) = 0$ *se e somente se* $u = v$;

3. $d(u,v) = d(v,u)$;

4. $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$ *para todo* $u,v,w \in V$.

Ex. Resolvido 36 *Com relação ao produto interno 11.1 calcule a distância entre os pontos* $u = (1,1,3,2)$ *e* $v = (2,2,1,0)$ *de* $\mathbb{R}^4$.

Resolução: Temos

$$d(u,v) = \sqrt{(1-2)^2 + (1-2)^2 + (3-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{10}$$

□

Ex. Resolvido 37 *Com relação ao produto interno 11.2 calcule a distância entre as funções* sen *e* cos *de* $C([0,2\pi];\mathbb{R})$

Resolução: Temos

$$d(\operatorname{sen}, \cos)^2 = \int_0^{2\pi} [\operatorname{sen} x - \cos x]^2\, dx$$

$$= \int_0^{2\pi} [\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - 2\operatorname{sen} x \cos x]\, dx = \int_0^{2\pi} [1 - 2\operatorname{sen} x \cos x]\, dx =$$

$$= x - \operatorname{sen}^2 x\Big|_0^{2\pi} = 2\pi.$$

Portanto, $d(\operatorname{sen}, \cos) = \sqrt{2\pi}$.

□

11.4 Ângulo

Sejam V um espaço euclidiano e $u,v \in V$ ambos não nulos. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (veja proposição 48) temos

$$-\|u\|\,\|v\| \leq \langle u,v\rangle \leq \|u\|\,\|v\|$$

ou ainda,

$$-1 \leq \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \leq 1.$$

Desta forma, existe um único número real $\theta \in [0,\pi]$ tal que

$$\cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}.$$

Este número θ é chamado de ângulo entre os vetores u e v.

Ex. Resolvido 38 *Calcule o ângulo entre as funções seno e co-seno definidas em* $[0,2\pi]$ *com o produto interno dado por 11.2.*

Resolução:

$$\langle \operatorname{sen}, \cos\rangle = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Desta forma, o ângulo entre seno e co-seno é $\frac{\pi}{2}$.

□

Ex. Resolvido 39 *Sabe-se que $\|u\| = \|v\| = 1$ e $\|u - v\| = 2$. Calcule o ângulo entre u e v.*

Resolução: Como $\|u - v\| = 2$ então

$$4 = \|u - v\|^2 = \langle u - v, u - v\rangle$$

$$= \|u\| + \|v\| - 2\langle u, v\rangle = 2 - 2\langle u, v\rangle.$$

Assim, $\langle u, v\rangle = -1$ e

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} = -1,$$

ou seja, $\theta = \pi$.

11.5 Ortogonalidade

Definição 39 *Seja V um espaço euclidiano. Dizemos que $u, v \in V$ são ortogonais se $\langle u, v\rangle = 0$ e, neste caso, denotaremos $u \perp v$.*

Diremos que um conjunto $S = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ é ortogonal se $u_i \perp u_j$ quando $i \neq j$.

Diremos que um conjunto ortogonal $S = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ é ortonormal se $\|u_j\| = 1$, $j = 1, \ldots, n$.

Exemplo 47 *$S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto ortonormal com relação ao produto interno dado por 11.1.*

Observação 11.2.2 *Se $u = 0$ ou $v = 0$ então $u \perp v$. Se $u \neq 0$ e $v \neq 0$ então $u \perp v$ se e somente se o ângulo entre u e v é $\pi/2$.*

Observação 11.2.3 *Se $S = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ é um conjunto ortogonal com $u_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, n$ então*

$$\{\frac{u_1}{\|u_1\|}, \ldots, \frac{u_n}{\|u_n\|}\}$$

é um conjunto ortonormal.

Proposição 52 *Sejam V um espaço euclidiano e $S = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ um conjunto ortonormal. Então $u_1, \ldots, u_n$ são linearmente independentes.*

Prova: Se

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0 \tag{11.3}$$

então, tomando o produto interno do vetor acima com u_1 e lembrando que $\langle u_1, u_1\rangle = \|u_1\|^2 = 1$ e $\langle u_j, u_1\rangle = 0$, se $j = 2, \ldots, n$, obtemos

$$\alpha_1 = \alpha_1\langle u_1, u_1\rangle + \cdots + \alpha_n\langle u_n, u_1\rangle = \langle 0, u_1\rangle = 0,$$

isto é, $\alpha_1 = 0$, e 11.3 fica

$$\alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0.$$

Tomando o produto interno do vetor acima com u_2, obtemos, como acima, que $\alpha_2 = 0$. Repetindo o processo chegamos à conclusão que a única possibilidade para 11.3 é $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

∎

Observação 11.3.1 *A proposição acima continua válida se S for apenas um conjunto ortogonal com elementos não nulos.*

Definição 40 *Se V é um espaço euclidiano de dimensão n e se $u_1, \ldots, u_n$ formam um conjunto ortonormal, então diremos que $u_1, \ldots, u_n$ formam uma base ortonormal de V.*

Proposição 53 *Sejam V um espaço euclidiano que possui uma base ortonormal dada por $u_1, \ldots, u_n$. Então, se $u \in V$ temos*

$$u = \langle u, u_1 \rangle u_1 + \cdots + \langle u, u_n \rangle u_n.$$

Prova: Como $u_1, \ldots, u_n$ formam uma base de V, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n.$$

Tomando o produto interno de u com u_1, temos

$$\langle u, u_1 \rangle = \alpha_1 \langle u_1, u_1 \rangle + \cdots + \alpha_n \langle u_n, u_1 \rangle = \alpha_1,$$

pois a base é ortonormal. O resultado segue tomando o produto interno de u por u_2, u_3, etc.

∎

Ex. Resolvido 40 *Encontre as coordenadas de $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$ com relação à base formada por $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.*

Resolução: Como a base em questão é ortonormal, pela proposição anterior, temos que

$$(1,1) = \langle (1,1), (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \rangle (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) + \langle (1,1), (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \rangle (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$= \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) + 0(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Desta forma as coordenadas de $(1, 1)$ com relação à base acima são

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

□

Proposição 54 *Sejam V um espaço euclidiano e $U = [u_1, \ldots, u_n]$ o subespaço gerado por um conjunto ortonormal $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$. Então, para qualquer $u \in V$ o vetor dado por*

$$v = u - \langle u, u_1 \rangle u_1 - \cdots - \langle u, u_n \rangle u_n$$

é ortogonal a todo $w \in U$. Além do mais, $v = 0$ se e somente se $u = \langle u, u_1 \rangle u_1 + \cdots + \langle u, u_n \rangle u_n$, isto é, se e somente se $u \in [u_1, \ldots, u_n]$.

Prova: Seja $w \in U$. Podemos escrever $w = \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j$. Precisamos mostrar que $\langle w, v \rangle = 0$, isto é, $\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j, v \rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle u_j, v \rangle = 0$. Portanto, basta verificar que $\langle u_j, v \rangle = 0$ para cada $j = 1, \ldots, n$. Como $u_1, \ldots, u_n$ formam um conjunto ortonormal, temos

$$\langle u_j, v \rangle = \langle u_j, u - \langle u, u_1 \rangle u_1 - \cdots - \langle u, u_n \rangle u_n \rangle$$

$$= \langle u_j, u \rangle - \langle u, u_1 \rangle \langle u_j, u_1 \rangle - \cdots - \langle u, u_n \rangle \langle u_j, u_n \rangle$$

$$= \langle u_j, u \rangle - \langle u, u_j \rangle \langle u_j, u_j \rangle = \langle u_j, u \rangle - \langle u, u_j \rangle = 0$$

∎

Proposição 55 *Sejam $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $R = \{v_1, \ldots, v_n\}$ conjuntos ortonormais de um espaço euclidiano V tais que $[S] = [R]$. Então, para $u \in V$, temos*

$$\langle u, u_1 \rangle u_1 + \cdots + \langle u, u_n \rangle u_n = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle u, v_n \rangle v_n.$$

Prova: Coloque $v = \langle u, u_1\rangle u_1 + \cdots + \langle u, u_n\rangle u_n$ e $w = \langle u, v_1\rangle v_1 + \cdots + \langle u, v_n\rangle v_n$. Temos

$$\|v - w\|^2 = \langle v - w, v - w\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^n \langle u, u_i\rangle u_i - \sum_{j=1}^n \langle u, v_j\rangle v_j, \sum_{k=1}^n \langle u, u_k\rangle u_k - \sum_{l=1}^n \langle u, v_l\rangle v_l \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n \langle u, u_i\rangle \left\langle u_i, \sum_{k=1}^n \langle u, u_k\rangle u_k \right\rangle - \sum_{i=1}^n \langle u, u_i\rangle \left\langle u_i, \sum_{l=1}^n \langle u, v_l\rangle v_l \right\rangle$$
$$- \sum_{j=1}^n \langle u, v_j\rangle \left\langle v_j, \sum_{k=1}^n \langle u, u_k\rangle u_k \right\rangle + \sum_{j=1}^n \langle u, v_j\rangle \left\langle v_j, \sum_{l=1}^n \langle u, v_l\rangle v_l \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n \langle u, u_i\rangle\langle u, u_k\rangle \langle u_i, u_k\rangle - \sum_{i=1}^n\sum_{l=1}^n \langle u, u_i\rangle\langle u, v_l\rangle \langle u_i, v_l\rangle$$
$$- \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \langle u, v_j\rangle\langle u, u_k\rangle \langle v_j, u_k\rangle + \sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^n \langle u, v_j\rangle\langle u, v_l\rangle \langle v_j, v_l\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n \langle u, u_i\rangle^2 - 2\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \langle u, v_j\rangle\langle u, u_k\rangle \langle v_j, u_k\rangle + \sum_{j=1}^n \langle u, v_j\rangle^2 \tag{11.4}$$

Como S forma uma base de $U = [S] = [R]$, podemos escrever

$$v_j = \alpha_{1j}u_1 + \cdots + \alpha_{nj}u_n, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Como $\|v_j\| = 1$, temos

$$1 = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}u_i, \sum_{k=1}^n \alpha_{kj}u_k\rangle = \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n \alpha_{ij}\alpha_{kj}\langle u_i, u_k\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}^2. \tag{11.5}$$

Como $\langle v_j, v_k\rangle = 0$ se $j \neq k$, temos

$$0 = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}u_i, \sum_{l=1}^n \alpha_{lk}u_l\rangle = \sum_{i=1}^n\sum_{l=1}^n \alpha_{ij}\alpha_{lk}\langle u_i, u_l\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}\alpha_{ik} \tag{11.6}$$

Desta forma, se denotarmos por A a matriz (α_{ij}), resulta de 11.6 e 11.5 que $A^tA = I$, onde I é a matriz identidade de ordem n. Segue-se que A tem inversa igual a A^t. Desta maneira, $AA^t = I$, ou seja,

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}\alpha_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{se } k = i \\ 0, & \text{se } k \neq i. \end{cases} \tag{11.7}$$

Também temos

$$\langle v_j, u_k\rangle = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}u_i, u_k\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}\langle u_i, u_k\rangle = \alpha_{kj}, \tag{11.8}$$

$$\langle u, v_j\rangle = \langle u, \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}u_i\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}\langle u, u_i\rangle. \tag{11.9}$$

De 11.7, 11.8 e 11.9 , vem que

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\langle u,v_j\rangle\langle u,u_k\rangle\langle v_j,u_k\rangle=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\alpha_{kj}\langle u,u_i\rangle\langle u,u_k\rangle$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\alpha_{kj}\right]\langle u,u_i\rangle\langle u,u_k\rangle=\sum_{i=1}^{n}\langle u,u_i\rangle^2 \tag{11.10}$$

Agora,

$$\sum_{j=1}^{n}\langle u,v_j\rangle^2=\sum_{j=1}^{n}\langle u,\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}u_i\rangle^2=\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\langle u,u_i\rangle\right]^2$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ij}\alpha_{kj}\langle u,u_i\rangle\langle u,u_k\rangle$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\alpha_{kj}\right]\langle u,u_i\rangle\langle u,u_k\rangle=\sum_{i=1}^{n}\langle u,u_i\rangle^2. \tag{11.11}$$

Comparando 11.4, 11.10 e 11.11, vemos que $v=w$.

∎

Definição 41 *Sejam $S=\{u_1,\dots,u_n\}\subset V$ um conjunto ortonormal de um espaço euclidiano V e $U=[u_1,\dots,u_n]$. Se $u\in V$, o vetor*

$$\langle u,u_1\rangle u_1+\cdots+\langle u,u_n\rangle u_n$$

é chamado de projeção ortogonal de u sobre o subespaço U.

Observação 11.11.1 *Se $v\in V$ é um vetor não nulo então $S=\{\frac{v}{\|v\|}\}$ é um conjunto ortonormal. Assim, se $u\in V$, a projeção ortogonal de u sobre $[S]$ nada mais é do que o vetor*

$$w=\langle u,\frac{v}{\|v\|}\rangle\frac{v}{\|v\|}=\frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}v.$$

Neste caso, w é chamado de projeção ortogonal de u sobre v.

Ex. Resolvido 41 *Com relação ao produto interno usual de $\mathbb{R}^3$, verifique que os vetores $u_1=(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$ e $u_2=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ formam um conjunto ortonormal e encontre a projeção ortogonal de $u=(2,3,1)$ sobre o subespaço gerado por u_1 e u_2.*

Resolução: Claramente,

$$\|u_1\|^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$$

e

$$\|u_2\|^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Também,

$$\langle u_1,u_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}0=0.$$

Assim, a projeção ortogonal de $u=(2,3,1)$ sobre $[u_1,u_2]$ é

$$w=\langle u,u_1\rangle u_1+\langle u,u_2\rangle u_2$$

$$= \langle(2,3,1),(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})\rangle(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$+\langle(2,3,1),(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)\rangle(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0) = (\frac{5}{2},\frac{5}{2},0).$$

□

Ex. Resolvido 42 *Considere $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ com o produto interno dado por*

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx.$$

Encontre a projeção de $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ sobre $q(x) = x^3 - x$.

Resolução: Temos

$$\|q\|^2 = \int_0^1 (x^3 - x)^2\,dx = \int_0^1 (x^6 + x^2 - 2x^4)\,dx = \frac{x^7}{7} + \frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{5}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{7} + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{8}{105};$$

$$\langle p, q\rangle = \langle 1 + x + x^2 + x^3, x^3 - x\rangle = \int_0^1 (1 + x + x^2 + x^3)(x^3 - x)\,dx$$

$$= \int_0^1 (-x - x^2 + x^5 + x^6)\,dx = -11/21.$$

Assim a projeção ortogonal de $p(x)$ sobre $q(x)$ é

$$r(x) = -\frac{11}{21}\cdot\frac{105}{8}(x^3 - x) = -\frac{55}{8}(x^3 - x).$$

□

11.6 Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

A demonstração do próximo teorema fornece um método para se conseguir uma base ortonormal de um espaço euclidiano a partir de uma base dada.

Teorema 10 *Todo espaço euclidiano de dimensão finita possui uma base ortonormal.*

Prova: A prova é por indução sobre a dimensão do espaço.

Seja V um espaço euclidiano de dimensão finita. Se $\dim V = 1$ então existe $v_1 \in V$, tal que $V = [v_1]$. Como $v_1 \neq 0$, tomamos

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

e, dessa forma, $\{u_1\}$ é um conjunto ortonormal e $V = [u_1]$, ou seja, u_1 forma uma base ortonormal de V.

Se $\dim V = 2$ então existem $v_1, v_2 \in V$ tais que $V = [v_1, v_2]$. Coloque

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}.$$

Nosso trabalho se resume em encontrar um vetor ortogonal a u_1 e que tenha norma 1. Primeiramente vamos encontrar um vetor ortogonal a u_1. Ora, pela proposição 54, basta tomarmos $u_2' = v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1$. Note que $u_2' \neq 0$, pois v_1 e v_2 são linearmente independentes. Resta agora *normalizar* u_2', isto é, definimos

$$u_2 = \frac{u_2'}{\|u_2'\|}$$

e então

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \qquad \text{e} \qquad u_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1}{\|v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1\|}$$

formam uma base ortonormal de V.

Dado $n \in \mathbb{N}$, suponha que tenhamos provado o teorema para todos os espaços euclidianos de dimensão $n-1$. Queremos provar que o mesmo é verdade para todo espaço euclidiano de dimensão n.

Se $\dim V = n \geq 2$ então existem $v_1, \ldots, v_n$ que formam uma base de V. Note que $U = [v_1, \ldots, v_{n-1}]$ é um subespaço de V de dimensão $n-1$. Desse modo, usando a nossa hipótese de indução, é possível tomar uma base ortonormal de U. Chamemos estes vetores da base ortonormal de U por $u_1, \ldots, u_{n-1}$. Como $v_n \notin U$ então, pela proposição 54, o vetor

$$u_n' = v_n - \langle v_n, u_1\rangle u_1 - \cdots - \langle v_n, u_{n-1}\rangle u_{n-1}$$

é não nulo e ortogonal a todos os elementos de U (portanto, ortogonal a $u_1, \cdots, u_{n-1}$). Para finalizar, tomamos como base de V os vetores

$$u_1, \cdots, u_{n-1}, u_n$$

onde

$$u_n = \frac{u_n'}{\|u_n'\|} = \frac{v_n - \langle v_n, u_1\rangle u_1 - \cdots - \langle v_n, u_{n-1}\rangle u_{n-1}}{\|v_n - \langle v_n, u_1\rangle u_1 - \cdots - \langle v_n, u_{n-1}\rangle u_{n-1}\|}.$$

∎

Observação 11.11.2 *No caso de um espaço euclidiano tridimensional, se v_1, v_2, v_3 formam uma base, então uma base ortonormal para este espaço pode ser dada por*

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \quad u_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1}{\|v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1\|} \quad e \quad u_3 = \frac{v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2}{\|v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2\|}.$$

Ex. Resolvido 43 *Encontre uma base ortonormal de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$.*

Resolução: Usaremos o processo de Gram-Schmidt para construir uma base ortonormal a partir da base formada pelos polinômios $1, x$ e x^2. Temos

$$\|1\|^2 = \int_0^1 1^2\,dx = 1$$

e colocamos $p_1(x) = 1$. Seguindo o processo, definimos

$$p_2(x) = \frac{x - \langle x, 1\rangle 1}{\|x - \langle x, 1\rangle 1\|},$$

onde

$$\langle x, 1\rangle = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \|x - \langle x, 1\rangle 1\|^2 = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2\,dx = \frac{1}{12}.$$

Assim, $p_2(x) = \sqrt{12}(x - \frac{1}{2}) = \sqrt{3}(2x-1)$. Por fim, colocamos

$$p_3(x) = \frac{x^2 - \langle x^2, 1\rangle 1 - \langle x^2, \sqrt{3}(2x-1)\rangle\sqrt{3}(2x-1)}{\|x^2 - \langle x^2, 1\rangle 1 - \langle x^2, \sqrt{3}(2x-1)\rangle\sqrt{3}(2x-1)\|},$$

onde

$$\langle x^2, 1\rangle = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}, \qquad \langle x^2, \sqrt{3}(2x-1)\rangle = \sqrt{3}\int_0^1 x^2(2x-1)\,dx = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

e

$$\|x^2 - \langle x^2, 1\rangle 1 - \langle x^2, \sqrt{3}(2x-1)\rangle\sqrt{3}(2x-1)\|^2 = \|x^2 - x + \frac{1}{6}\|^2 =$$

$$= \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{6})^2\,dx = \frac{1}{180}.$$

Assim,

$$p_3(x) = \sqrt{180}(x^2 - x + \frac{1}{6}) = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1).$$

Desta forma, uma base ortonormal para $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ é dada por

$$p_1(x) = 1, \qquad p_2(x) = \sqrt{3}(2x-1) \qquad \text{e} \qquad p_3(x) = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1).$$

$\square$

Ex. Resolvido 44 *Encontre uma base ortonormal para* $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y = 0\}$.

Resolução: Note que $(x, y, z) \in W$ se e somente se

$$(x, y, z) = (2y, y, z) = y(2, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

Desta forma $(2, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ formam uma base de W. Tomaremos como $u_1 = (0, 0, 1)$, pois este vetor é unitário (tem norma 1). Pelo processo de Gram-Schmidt, u_2 é a projeção ortogonal unitária de $(2, 1, 0)$ sobre u_1, isto é

$$u_2 = \frac{(2,1,0) - \langle (2,1,0), (0,0,1)\rangle(0,0,1)}{\|(2,1,0) - \langle (2,1,0), (0,0,1)\rangle(0,0,1)\|} = \frac{(2,1,0)}{\|(2,1,0)\|} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0).$$

$\square$

Ex. Resolvido 45 *Encontre uma base ortonormal para* $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y + z + t = 0\}$.

Resolução: Temos que $(x, y, z, t) \in W$ se somente se

$$(x, y, z, t) = (-y - z - t, y, z, t)$$

$$= y(-1, 1, 0, 0) + z(-1, 0, 1, 0) + t(-1, 0, 0, 1).$$

Como $(-1, 1, 0, 0)$, $(-1, 0, 1, 0)$ e $(-1, 0, 0, 1)$ são linearmente independentes, segue-se que formam uma base para W. Coloquemos

$$u_1 = \frac{(-1,1,0,0)}{\|(-1,1,0,0)\|} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0).$$

$$u_2 = \frac{(-1,0,1,0) - \langle (-1,0,1,0), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)\rangle(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)}{\|(-1,0,1,0) - \langle (-1,0,1,0), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)\rangle(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)\|}$$

$$= \frac{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0)}{\|(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2, 0).$$

$$u_3 = \frac{(-1,0,0,1) - \langle (-1,0,0,1), u_1\rangle u_1 - \langle (-1,0,0,1), u_2\rangle u_2}{\|(-1,0,0,1) - \langle (-1,0,0,1), u_1\rangle u_1 - \langle (-1,0,0,1), u_2\rangle u_2\|}$$

onde

$$\langle (-1,0,0,1), u_1\rangle = \langle (-1,0,0,1), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle(-1,0,0,1),u_2\rangle = \langle(-1,0,0,1),\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2,0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}(-1,0,0,1) &- \langle(-1,0,0,1),u_1\rangle u_1 - \langle(-1,0,0,1),u_2\rangle u_2\\ &= (-1,0,0,1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0) - \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2,0)\\ &= (-1,0,0,1) + (\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0,0) + (\frac{1}{6},\frac{1}{6},-\frac{1}{3},0) = (-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1).\end{aligned}$$

Desta forma,

$$u_3 = \frac{(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1)}{\|(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1)\|} = \frac{1}{2}\sqrt{3}(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1)$$

□

11.7 Complemento Ortogonal

Definição 42 *Sejam V um espaço euclidiano e U um subespaço vetorial de V. O complemento ortogonal de U é o conjunto*

$$U^\perp = \{v \in V; \langle u,v\rangle = 0, \quad \forall\, u \in U\}.$$

Proposição 56 *$U^\perp$ é um subespaço vetorial de V.*

Prova: Temos $0 \in U^\perp$ pois $\langle 0,u\rangle = 0$ para todo $u \in U$. Se $v,w \in U^\perp$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então para todo $u \in U$, temos

$$\langle v+\alpha w,u\rangle = \langle v,u\rangle + \alpha\langle w,u\rangle = 0.$$

Portanto, $v+\alpha w \in U^\perp$.

■

Observação 11.11.3 *Se V tem dimensão finita então $u \in U^\perp$ se e somente se u é ortogonal a todos os vetores de uma base qualquer de U.*

Ex. Resolvido 46 *Encontre $U^\perp$ se $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x-y-z=0\}$.*

Resolução: Temos $(x,y,z) \in U$ se somente se $(x,y,z) = (y+z,y,z) = y(1,1,0)+z(1,0,1)$. Vemos que $(1,1,0)$ e $(1,0,1)$ formam uma base para U.

Assim, $(x,y,z) \in U^\perp$ se somente se

$$\langle(x,y,z),(1,1,0)\rangle = 0 \qquad \text{e} \qquad \langle(x,y,z),(1,0,1)\rangle = 0,$$

ou seja,

$$\begin{cases} x+y=0\\ x+z=0\end{cases} \iff (x,y,z) = x(1,-1,-1).$$

Assim,

$$U^\perp = [(1,-1,-1)].$$

□

Teorema 11 *Sejam V um espaço euclidiano de dimensão finita e U um subespaço vetorial de V. Então $V = U \oplus U^\perp$.*

Prova: Dado $v \in V$, seja w a projeção ortogonal de v sobre U. Temos $v = w+(v-w)$ e pela proposição 54, $w \in U$ e para todo $u \in U$, $\langle v-w,u\rangle = 0$, ou seja, $v \in U + U^\perp$.

Agora, se $u \in U \cap U^\perp$ então $\langle u,u\rangle = 0$ e, portanto, $u = 0$.

■

11.8 Isometria

Definição 43 *Sejam U e V espaços euclidianos. Dizemos que $T \in \mathcal{L}(U,V)$ é uma isometria se $\langle T(u_1), T(u_2)\rangle = \langle u_1, u_2\rangle$ para todo $u_1, u_2 \in U$.*

Observação 11.11.4 *Note que os produtos internos acima, embora representados pelo mesmo símbolo, são produtos internos de V e de U, respectivamente.*

Exemplo 48 (rotação) *$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por*

$$T(x,y) = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta, x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

é uma isometria, onde $\theta \in \mathbb{R}$.

De fato,

$$\langle T(x_1,y_1), T(x_2,y_2)\rangle$$
$$= \langle (x_1\cos\theta - y_1\,\mathrm{sen}\,\theta, x_1\,\mathrm{sen}\,\theta + y_1\,\mathrm{sen}\,\theta), (x_2\cos\theta - y_2\,\mathrm{sen}\,\theta, x_2\,\mathrm{sen}\,\theta + y_2\,\mathrm{sen}\,\theta)\rangle$$

$$= x_1x_2(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta) - y_1x_2(-\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta)$$
$$- x_1y_2(\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta) + y_1y_2(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta)$$

$$= x_1x_2 + y_1y_2 = \langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle.$$

Teorema 12 *Sejam U, V espaços euclidianos e $T \in \mathcal{L}(U,V)$. São equivalentes:*

1. *T é uma isometria;*
2. *$\|T(u)\| = \|u\|$ para todo $u \in U$;*
3. *$\|T(u) - T(v)\| = \|u - v\|$ para todo $u, v \in U$;*
4. *Se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é um conjunto ortonormal de U então $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ é um conjunto ortonormal de V.*

Prova: ($1 \Longrightarrow 2$) Como T é uma isometria temos que $\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ para todo $u, v \in U$. Em particular, tomando $u = v$, obtemos

$$\|T(u)\|^2 = \langle T(u), T(u)\rangle = \langle u, u\rangle = \|u\|^2,$$

ou seja, $\|T(u)\| = \|u\|$.

($2 \Longrightarrow 3$) Para todo $u, v \in U$, temos

$$\|T(u) - T(v)\| = \|T(u - v)\| = \|u - v\|.$$

($3 \Longrightarrow 1$) Note que

$$\|T(u) + T(v)\| = \|T(u) - T(-v)\| = \|u - (-v)\| = \|u + v\|.$$

Pela proposição 50, temos

$$\langle T(u), T(v)\rangle = \frac{1}{4}(\|T(u) + T(v)\|^2 - \|T(u) - T(v)\|^2)$$

$$= \frac{1}{4}(\|u + v)\|^2 - \|u - v)\|^2) = \langle u, v\rangle.$$

($1 \Longrightarrow 4$) Se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é um conjunto ortonormal de U então, como T é uma isometria, temos

$$\langle T(u_i), T(u_j)\rangle = \langle u_i, u_j\rangle = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

ou seja, $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ é um conjunto ortonormal.

($4 \Longrightarrow 1$) Seja $u_1, \ldots, u_n$ uma base ortonormal de U. Por hipótese, $T(u_1), \ldots, T(u_n)$ formam um conjunto ortonormal. Dados $u, v \in U$, escrevemos

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$$

e

$$v = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n$$

e obtemos

$$\langle T(u), T(v)\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(u_i), \sum_{j=1}^{n} \beta_j T(u_j)\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \langle T(u_i), T(u_j)\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i.$$

Por outro lado,

$$\langle u, v\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j u_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \langle u_i, u_j\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i.$$

Comparando as expressões acima, concluímos que T é uma isometria.

∎

Corolário 7 *Se $T \in \mathcal{L}(U, V)$ é uma isometria então T é injetora.*

Prova: Basta ver que se $T(u) = 0$ então $\|u\| = \|T(u)\| = 0$, portanto, $u = 0$.

∎

Corolário 8 *Se $T \in \mathcal{L}(U, V)$ é uma isometria e $\dim U = \dim V$ então T é um isomorfismo.*

Prova: Como U e V têm a mesma dimensão e T é injetora, segue-se que T é uma bijeção, isto é, um isomorfismo.

∎

Ex. Resolvido 47 *Seja $T \in \mathbb{R}^2$ tal que a matriz de T som relação a uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ é dada por*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

T é uma isometria?

Resolução: Vejamos, se u, v é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ e

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

é a matriz de uma isometria S com relação a esta base então pelo teorema anterior $\|S(u)\| = \|S(v)\| = 1$. Além do mais, $\langle S(u), S(v)\rangle = 0$. Como $S(u) = au + cv$ e $S(v) = bu + dv$, teríamos

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases} .$$

Deste modo, T não pode se uma isometria pois, por exemplo, $1^2 + 2^2 = 5 \neq 1$.

□

11.9 Operador Auto-adjunto

Definição 44 *Sejam U um espaço euclidiano e $T \in \mathcal{L}(U)$. Dizemos que T é um operador auto-adjunto se $\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle$ para todo $u, v \in U$.*

Ex. Resolvido 48 *Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dado por $T(x, y) = (ax + by, bx + cy)$. Verifique que T é um operador auto-adjunto.*

Resolução: Temos

$$\langle T(x, y), (z, t)\rangle = \langle (ax + by, bx + cy), (z, t)\rangle = axz + byz + bxt + cyt.$$

Por outro lado,

$$\langle (x, y), T(z, t)\rangle = \langle (x, y), (az + bt, bz + ct)\rangle = axz + bxt + byz + cyt.$$

Comparando as expressões vemos que

$$\langle T(x, y), (z, t)\rangle = \langle (x, y), T(z, t)\rangle.$$

□

Note que a matriz do operador do exemplo anterior com relação à base canônica é uma matriz simétrica. Isto, como diz o próximo teorema, não é uma simples coincidência.

Teorema 13 *Seja U um espaço euclidiano de dimensão finita. Então, um operador $T \in \mathcal{L}(U)$ é auto-adjunto se e somente se a matriz de T com relação a uma base ortonormal de U for simétrica.*

Prova: Suponha que T seja auto-adjunto e seja $A = (a_{ij})$ a matriz de T com relação a alguma base ortonormal de U. Queremos mostrar que $a_{ij} = a_{ji}$. Se $u_1, \ldots, u_n$ são os vetores de uma tal base, temos

$$T(u_k) = a_{1k}u_1 + \cdots + a_{nk}u_n, \tag{11.12}$$

para todo $k = 1, \ldots, n$. Se $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ então tomando o produto interno de 11.12 com $k = i$ com o vetor u_j, obtemos

$$\langle T(u_i), u_j = a_{1i}\langle u_1, u_j\rangle + \cdots + a_{ni}\langle u_n, u_j\rangle = a_{ji}. \tag{11.13}$$

Por outro lado, tomando o produto interno de u_i com $T(u_j)$ temos

$$\langle u_i, T(u_j)\rangle = a_{1j}\langle u_i, u_1\rangle + \cdots + a_{nj}\langle u_i, u_n\rangle = a_{ij}.$$

Como T é auto-adjunto, segue-se que $a_{ij} = a_{ji}$.

Reciprocamente, suponha que a matriz (a_{ij}) de T com relação a uma base ortonormal, $u_1, \ldots, u_n$ seja simétrica. Devemos mostrar que $\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle$. Note que se

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$$

e
$$v = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n,$$
então, como o produto interno é linear em cada variável e a base acima é ortonormal, temos
$$\langle T(u), v\rangle = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i T(u_i), \sum_{j=1}^n \beta_j u_j\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \langle T(u_i), u_j\rangle$$
e, analogamente,
$$\langle u, T(v)\rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \langle u_i, T(u_j)\rangle.$$
Desta forma, basta mostrar que $\langle T(u_i), u_j\rangle = \langle u_i, T(u_j)\rangle$. Como (a_{ij}) é a matriz de T com relação a esta base, temos por 11.12 que $a_{ij} = \langle u_i, T(u_j)\rangle$ e $a_{ji} = \langle T(u_i), u_j\rangle$ e como a matriz é simétrica obtemos que
$$\langle T(u_i), u_j\rangle = \langle u_i, T(u_j)\rangle,$$
como queríamos.

∎

Teorema 14 *Se $T \in \mathcal{L}(U)$ é um operador auto-adjunto e se λ e μ são autovalores distintos de T então os autovetores correspondentes são ortogonais.*

Prova: Sejam u e v autovetores correspondentes a λ e μ respectivamente. Temos
$$(\lambda - \mu)\langle u, v\rangle = \langle \lambda u, v\rangle - \langle u, \mu v\rangle = \langle T(u), v\rangle - \langle u, T(v)\rangle = 0$$
pois T é auto-adjunto. Como $\lambda \neq \mu$, segue-se que $\langle u, v\rangle = 0$.

∎

Finalizamos este capítulo com o seguinte resultado que provaremos apenas no caso bidimensional. O caso unidimensional é trivial. Para a prova no caso geral, indicamos a leitura do livro *Álgebra Linear,* de Elon L. Lima, Coleção Matemática Universitária.

Teorema 15 *Sejam U um espaço euclidiano de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(U)$ um operador auto-adjunto. Então existe uma base ortonormal de U formada por autovetores de T. Note que todo operador auto-adjunto é diagonalizável.*

Prova do caso bidimensional: Seja u, v uma base ortonormal de U. Sabemos pelo teorema 13 que a matriz de T é simétrica, ou seja, da forma
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$
Desta forma, o polinômio característico de T é da forma
$$p_T(x) = x^2 - (a+c)x + ac - b^2.$$
Como
$$(a+c)^2 - 4(ac - b^2) = a^2 + b^2 - 2ac + 4b^2 = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$$
vemos que $p_T(x)$ só apresenta raízes reais. Se $a = c$ e $b = 0$ então $A = aI$ e a própria base u, v serve para provar o teorema.

Agora, se $a \neq c$ ou $b \neq 0$ então $p_T(x)$ possui duas raízes reais distintas, isto é, T apresenta dois autovalores distintos. Pelo teorema 14 os autovetores correspondentes são ortogonais. Basta tomar como base dois autovetores unitários correspondentes a cada um dos autovalores.

∎

Índice Remissivo