Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Álgebra Linear e Geometria Analítica
Terceira Lista de Exercícios - Período 2008.1

1. Determine o polinômio característico dos operadores lineares, encontre seus autovalores e autovetores correspondentes e dê uma base e a dimensão dos respectivos auto-espaços.

   (a) $T(x,y) = (2y,\ x)$;

   (b) $T(x,y) = (x+y,\ 2x+y)$;

   (c) $T\,(x,y) = (-y,\ x)$;

   (d) $T(x,y) = (2x+3y,\ -x-2y)$;

   (e) $T(x,y) = (2x+y,\ -y)$;

   (f) $T(x,y,z,w) = (2x+y,\ 2y,\ 2z,\ 3w)$;

   (g) $T(ax^2+bx+c) = ax^2+cx+b$;

   (h) $T(p(x)) = p(1+x)$, $p(x) \in \mathbf{P}_3$;

   (i) $T(A) = A^t$, sendo $A \in M(2,2)$ e A^t sua transposta;

   (j) $T(x,y,z) = (x+y+z,\ 2y+z,\ 3z)$;

   (k) $T(x,y,z) = (2x+2y,\ x+y+2z,\ x+y+2z)$;

   (l) $T(x,y,z) = (x+y,\ x-y+2z,\ 2x+y-z)$;

   (m) $T(x,y,z) = (-9x+4y+4z,\ -8x+3y+4z,\ -16x+8y+7z)$;

   (n) $T(x,y,z) = (x+3y-3z,\ 4y,\ -3x+3y+z)$;

   (o) $T(x,y,z,w) = (x,\ x+y,\ x+y+z,\ x+y+z+w)$;

   (p) $T(x,y,z,w) = (3x-4z,\ 3y+5z,\ -z,\ w)$;

   (q) $T(p(x)) = p'(x)$, $p(x) \in P_2$;

   (r) $T(p(x)) = (1-x^2)p''(x) - 2xp'(x)$, $p(x) \in P_3$.

2. Para cada um dos operadores lineares do exercício anterior, encontre o polinônio minimal e identifique os operadores que são diagonalizáveis, dando pelo menos duas justificativas para as suas respostas. Nos casos afirmativos, encontre uma base do espaço em relação à qual a matriz do operador é diagonal, e encontre essa matriz.

3. Qual é o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que possui $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 3$ como autovalores associados, respectivamente, a autovetores da forma $(3y,\ y)$ e $(-2y,\ y)$, com $y \neq 0$?

4. Seja T um operador linear possuindo $\lambda = 0$ como autovalor. Prove que T não é injetor.

5. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$T(x, y) = (ax + by,\ cx + dy),$$

onde $a, b, c,$ e d são números reais positivos. Prove que:

   (a) Os autovalores de T são

$$\frac{(a-d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2};$$

   (b) Os autovalores de T são reais, distintos e pelo menos um deles é positivo.

6. Para que valor(es) de t, o operador é diagonalizável?

   (a) $T(x, y) = (x + y,\ ty)$.

   (b) $T(x, y) = (x + ty,\ y)$.

7. Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear cujo polinômio característico é $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4)^3(\lambda + 2)$.

   (a) Qual é a dimensão de V?

   (b) Quais são as possibilidades para o polinômio minimal de T?

   (c) Supondo que T é diagonalizável, qual é o seu polinômio minimal?

8. Sejam V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear cujo polinômio minimal é $m(x) = (x-1)^2(x-2)$.

   (a) Quais são as possibilidades para o polinômio característico de T?

   (b) T é diagonalizável?

9. Seja A uma matriz 4×4 cujos autovalores distintos são 1 e -1.

   (a) Escreva todas os seus possíveis polinômios característicos.

   (b) Para cada posibilidade do polinômio característico, escreva os possíveis polinômios minimais.

10. Se λ e μ são autovalores distintos de um operador linear $T : V \longrightarrow V$, mostre que $V_\lambda \cap V_\mu = \{0\}$.

11. Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear cujo polinômio característico é $p(\lambda) = (\lambda - 4)^2(\lambda + 2)^4$.

    (a) Quais são as possibilidades para $\dim V_4$ e $\dim V_{-2}$?

    (b) Supondo que T é diagonalizável, qual a dimensão de V_4 e a de V_{-2}?

12. Sejam V um espaço vetorial de dimensão 6 e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear cujos autovalores distintos são λ_1 e λ_2. Se $\dim V_{\lambda_1} = 3$ e $\dim V_{\lambda_2} = 1$, quais são as possibilidades para o polinômio característico de T? O polinômio minimal de T pode ser $m(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$?

13. Sejam V um espaço vetorial e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear não diagonalizável cujo polinômio característico é $p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 3)^3$. Quais são as possibilidades para $\dim V_{-1}$ e $\dim V_3$?

14. Seja T um operador linear sobre um espaço vetorial V de dimensão finita. Considere o conjunto $\mathrm{Spec}(T)$ definido por

    $$\mathrm{Spec}(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \text{ é autovalor de } T\}.$$

    Mostre que $\mathrm{Spec}(T)$ é um conjunto finito.

15. Seja T um operador linear sobre um espaço vetorial V, possuindo n autovalores distintos. Se $\dim V = n$, prove que T é diagonalizável.

16. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear cuja matriz em relação à base canônica é simétrica. Prove que T é diagonalizável.

17. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por

$$T(x, y) = (x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta,\ x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta).$$

Mostre que se θ for um multiplo inteiro de π então o autovalor de T será $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

18. Sejam $\mathbf{u} = (a, b)$ e $\mathbf{v} = (c, d)$ vetores de $\mathbb{R}^2$. Mostre que

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2ac + ad + bc + bd$$

é um produto interno sobre $\mathbb{R}^2$. Calcule, com relação a esse produto interno, o ângulo entre os vetores $(1, 1)$ e $(1, -1)$.

19. Sejam $\mathbf{A} = (a_{ij})$ e $\mathbf{B} = (b_{ij})$ matrizes 2×2. Mostre que

$$f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = a_{11}b_{11} + 2a_{12}b_{12} + 3a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$$

é um produto interno sobre $M(2, 2)$. Calcule, com relação a esse produto interno, o ângulo entre as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

20. Sejam $\mathbf{u} = (a, b)$ e $\mathbf{v} = (c, d)$ vetores de $\mathbb{R}^2$. Verifique se

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |c - a| + |d - b|$$

define um produto interno sobre $\mathbb{R}^2$.

21. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

    (a) Mostre que a soma de dois produtos internos sobre V é um produto interno sobre V.

    (b) A diferença de dois produtos internos sobre V é um produto interno sobre V?

    (c) Mostre que um múltiplo positivo de um produto interno sobre V é um produto interno sobre V.

22. Descreva explicitamente todos os produtos internos sobre $\mathbb{R}$.

23. A partir da base $\alpha = \{(1,2),(2,1)\}$, exiba uma base ortonornal para $\mathbb{R}^2$.

24. A partir da base $\beta = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,2,0)\}$, exiba uma base ortonornal para $\mathbb{R}^3$.

25. Usando o produto interno do Exercício 18, determine uma base ortonormal para $\mathbb{R}^2$, a partir da base $\alpha = \{(-1,1),(1,1)\}$.

26. Considerando o produto interno usual em $\mathbb{R}^3$, determine uma base ortonormal para o subespaço W definido por

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}.$$

27. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por

$$T(x,y,z) = (z,\ x-y,\ -z)$$

e W o seu núcleo. Encontre uma base ortonormal para $W^{\perp}$:

   (a) Em relação ao produto interno usual.

   (b) Em relação ao produto interno

$$\langle (x_1,\ y_1,\ z_1),(x_2,\ y_2,\ z_2)\rangle = 2x_1x_2 + y_1y_2 + 4z_1z_2.$$

28. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual e seja

$$W = [(1,1,0),(0,1,1),(1,0,-1)].$$

   (a) Determine $W^{\perp}$.

   (b) Determine o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Im}(T) = W$ e $\ker(T) = W^{\perp}$.

29. Se $p(x), q(x) \in P_2$, defina

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q\,(x)\,dx.$$

(a) Verifique que a função definida acima é um produto interno.

(b) Utilizando esse poduto interno, encontre uma base ortonormal para $W = [1,\ 1 - x]$.

30. Considere o conjunto

$$S = \{(1,0,1),(1,1,0),(2,1,1)\}.$$

(a) Determine $S^{\perp}$.

(b) Seja

$$W = [(1,0,1),(1,1,0),(2,1,1)].$$

Calcule $W^{\perp}$ e encontre bases ortogonais para W e $W^{\perp}$.

31. Se $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in M(n,n)$, definimos o *traço* de $\mathbf{A}$, denotado por $\operatorname{tr}(\mathbf{A})$, como sendo a soma dos elementos da diagonal principal, isto é,

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

(a) Verifique que

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \operatorname{tr}\left(\mathbf{B}^t \mathbf{A}\right)$$

é um produto interno em $M(2,2)$.

(b) Usando esse produto interno, encontre uma base ortonormal para $M(2,2)$ a partir da base

$$\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

32. Sejam V um espaço vetorial com um produto interno e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Mostre que

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\left(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2\right).$$

33. Sejam V um espaço vetorial com um produto interno e $x, y, z, t \in \mathbb{R}$. Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ são ortogonais e unitários, mostre que

$$(x\mathbf{u} + y\mathbf{v}) \perp (z\mathbf{u} + t\mathbf{v}) = 0 \Leftrightarrow xz + yt = 0$$

34. Seja V um espaço vetorial com um produto interno. Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ são ortogonais e unitários, mostre que $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{2}$.

35. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{u} = (a, b)$, $\mathbf{v} = (c, d) \in V$. Se $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, mostre que a matriz $\mathbf{A^t A}$ é diagonal se, e somente se, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores ortogonais em relação ao produto interno usual.

36. Sejam V um espaço vetorial com um produto interno e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ vetores fixados. Mostre que a função $f(x) = \|\mathbf{u} + x\mathbf{v}\|^2$ possui um ponto de mínimo.

37. Sejam V um espaço vetorial com um produto interno e $\mathbf{u}$ um vetor unitário de V. Sejam

$$A = \{\mathbf{v} \in V : \|\mathbf{v}\| = 1\}$$

e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(\mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.

(a) Mostre que o valor máximo de f é 2 e o mínimo é 0;

(b) Mostre que $f(\mathbf{v}) = \sqrt{2}$ se, e somente se, $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

38. Sejam $\beta = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ uma base ortonormal de um espaço vetorial V, com um produto interno qualquer, e $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$. Mostre que $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

39. Sejam V um espaço vetorial com um produto interno qualquer $\langle , \rangle$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Mostre que

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$$

se, e somente se, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são linearmente dependentes.

40. Sejam V um espaço vetorial com um produto interno qualquer $\langle , \rangle$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são unitários tais que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 1$, mostre que $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

41. Mostre que se V é um espaço vetorial com um produto interno qualquer e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ são tais que

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|,$$

então $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são linearmente dependentes.

42. Considere $\mathbb{R}^2$ munido de um produto interno qualquer $\langle , \rangle$ e seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um operador linear tal que

$$\langle T(\mathbf{u}), \mathbf{u} \rangle = 0, \ \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2.$$

Mostre que

$$\langle T(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = - \langle T(\mathbf{v}), \mathbf{u} \rangle \, , \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2.$$

43. Fixe uma matriz $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in M(2,2)$ e seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}.$$

Considerando o produto interno usual sobre $\mathbb{R}^2$, mostre que

$$\langle T(1,0), (0,1) \rangle = a_{21} \quad e \quad \langle T(0,1), (1,0) \rangle = a_{12}.$$

44. Sejam $\mathbf{A}$ e T como no Exercício anterior e suponha que

$$\langle T(\mathbf{u}), \mathbf{u} \rangle = 0, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2.$$

Mostre que

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\lambda} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \textit{para algum } \lambda \in \mathbb{R}.$$

45. Fixe uma matriz $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in M(2,2)$. Para $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in M(2,1)$, seja

$$f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{Y}^t \mathbf{A} \mathbf{X}.$$

Mostre que f é um produto interno sobre $M(2,1)$ se, e somente se,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^t, \quad a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0 \quad e \quad \det(\mathbf{A}) > 0.$$

46. Seja $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Sejam $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ o operador linear definido por

$$T(\mathbf{e}_i) = \mathbf{u}_i, \ i = 1, \ldots, n.$$

(a) Mostre que

$$\|T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \, , \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

(b) Mostre que T é um isomorfismo.