Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Álgebra Linear e Geometria Analítica
Segunda Lista de Exercícios - Período 2008.1

1. Verifique quais das transformações abaixo são lineares.

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x - y,\ 0)$;

   (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x - 1,\ y + z)$;

   (c) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $T(x) = (x,\ 2x,\ -x)$;

   (d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (y,\ x^3)$.

2. Seja $\mathbf{V} = \mathbf{M}(n, n)$ o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem n. Se $\mathbf{B}$ é uma matriz não-nula fixada em $\mathbf{V}$, quais das seguintes transformações são lineares?

   (a) $T(\mathbf{A}) = \mathbf{BA}$;

   (b) $T(\mathbf{A}) = \mathbf{BA} - \mathbf{AB}$;

   (c) $T(\mathbf{A}) = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

   (d) $T(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^t$.

3. Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que satisfaça

$$T(1, 2) = (1, 1) \quad e \quad T(0, 1) = (1, 0).$$

4. Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, sabendo que

$$T(-1, 1) = (1, 2, 0) \quad e \quad (0, 2) \in \ker T.$$

5. Para cada uma das transformações lineares abaixo, encontre uma base e a dimensão do núcleo e da imagem.

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x - y,\ 0)$;

   (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + 2y,\ y - z,\ x + 2z)$;

   (c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y,\ x + y)$;

   (d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + y,\ y + z)$;

(e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + z,\ x - z,\ y)$;

(f) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + 2z,\ z)$.

6. Seja $T : \mathbf{M}(2, 2) \to \mathbf{M}(2, 2)$, definida por $T(\mathbf{A}) = \mathbf{BA}$, onde

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Detremine uma base e a dimensão do núcleo e da imagem de T.

7. Considere a transformação $T : P_2 \to P_3$, dada por

$$T\left(p\left(x\right)\right) = p\left(x\right) + x^2 p'\left(x\right).$$

(a) Verifique que T é linear.

(b) Determine uma base e a dimensão do núcleo e da imagem de T.

8. Mesma questão anterior, considerando agora $T : P_2 \to P_2$, definida por $T\left(p\left(x\right)\right) = x^2 p''\left(x\right)$.

9. Se $T : \mathbf{M}(2, 2) \to \mathbf{M}(2, 2)$ é a transformação linear definida por $T(\mathbf{A}) = \mathbf{BA} - \mathbf{AB}$, determine uma base e a dimensão do núcleo e da imagem de T, onde

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. Dentre as transformações dos exercícios 6 a 9, determine as que são isomorfismos e, para essas, encontre uma regra que defina a sua inversa.

11. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\operatorname{Im} T = \left[(1, 2, 3), (4, 0, 5)\right].$$

12. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\ker T = [(1, 1, 0)].$$

13. Sejam T_1 e T_2 operadores lineares sobre um espaço $\mathbf{V}$, tais que

$$\dim \ker T_1 = \dim \ker T_2 = 0.$$

Mostre que $\dim \ker(T_1 \circ T_2) = 0$.

14. Considere $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ uma transformação linear. Mostre que:

    (a) Se $\dim \mathbf{V} < \dim \mathbf{W}$, então T não pode ser sobrejetora;

    (b) Se $\dim \mathbf{V} > \dim \mathbf{W}$, então T não pode ser injetora.

    (c) Se T é um isomorfismo, então $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

15. Mostre que $\mathbb{R}^2$ é isomorfo ao subespaço $\mathbf{W}$ de $\mathbb{R}^3$**,** dado por

$$\mathbf{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}.$$

16. Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cujo núcleo tenha dimensão 1.

17. Sejam

$$\alpha = \{(1, -1), (0, 2)\} \text{ e } \beta = \{(1, 0, -1), (0, 1, 2), (1, 2, 0)\}$$

bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente; e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que

$$[T]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

    (a) Encontre $T(x, y)$;

    (b) Se $S(x, y) = (2y,\ x - y,\ x)$, encontre $[S]^\alpha_\beta$;

    (c) Determine uma base γ de $\mathbb{R}^3$, tal que

$$[T]^\alpha_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

18. Seja $T : \mathbf{M}(2, 2) \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + d, b + c).$$

Sejam α e β as bases canônicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbf{M}(2, 2)$, respectivamente, e $\gamma = \{(1, -1), (1, 2)\}$.

    (a) Encontre $[T]^\beta_\alpha$ e $[T]^\beta_\gamma$;

(b) Se $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbf{M}(2,2)$ é a transformação linear tal que

$$[S]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

determine $S(x, y)$ e, se possível, um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$S(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

19. Considere α a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear que satisfaz

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Se possível, encontre $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tais que $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ e $T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$;

(b) Determine o núcleo e a imagem de T;

(c) Se T for um isomorfismo, encontre $\left[T^{-1}\right]$, e determine $T^{-1}(x, y)$

20. Seja $T : \mathbf{P}_1 \to \mathbf{P}_1$ o operador linear definido por

$$T(p(x)) = (1 - x)\, p\prime(x).$$

Determine a matriz de T em relação à base canônica de $\mathbf{P}_1$.

21. Seja $T : \mathbf{P}_3 \to \mathbb{R}$ a transformação linear definida por

$$T(p(x)) = \int_0^1 p(x)\, dx.$$

Determine a matriz de T em relação às bases canônicas de $\mathbf{P}_3$ e $\mathbb{R}$.

22. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por

$$T(x, y, z) = (x - y,\ 2y,\ y + z).$$

(a) Mostre que T é um isomorfismo;

(b) Encontre uma matriz que represente T^{-1} e determine $T^{-1}(x, y, z)$.