Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Álgebra Linear e Geometria Analítica
Primeira Lista de Exercícios - Período 2008.1

1. Determine dentre os conjuntos abaixo quais os que são subespaços vetoriais.

   (a) $\mathbf{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq y \leq z\}$.

   (b) $\mathbf{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3z = 0\}$.

   (c) $\mathbf{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{Z}\}$.

   (d) $\mathbf{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\}$.

   (e) $\mathbf{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{M}(2,2) : a = c \text{ e } b + d = 0 \right\}$.

   (f) $\mathbf{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{M}(2,2) : a + d \leq b + c \right\}$.

   (g) $\mathbf{W} = \{A \in \mathbf{M}(2,2) : AT = TA$, onde T *é* uma matriz fixa em $\mathbf{M}(2,2)\}$.

   (h) $\mathbf{W} = \{f(x) \in \mathbf{P}_2 : f(0) = 0\}$.

   (i) $\mathbf{W} = \{f(x) \in \mathbf{P}_2 : f(0) = 2f(1)\}$.

   (j) $\mathbf{W} = \{f(x) \in \mathbf{P}_2 : f(x) + f'(x) = 0\}$.

2. Sejam $\mathbf{W}_1$,$\mathbf{W}_2$ e $\mathbf{W}_3$ os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_1 &= \{(x, y, z) : x = z\}, \;\; \mathbf{W}_2 = \{(x, y, z) : x = y = 0\}, \\ \mathbf{W}_3 &= \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}. \end{aligned}$$

   É verdade que $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 = \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_3 = \mathbf{W}_2 + \mathbf{W}_3 = \mathbb{R}^3$? Em algum dos casos a soma é direta?

3. Suponhamos que um espaço $\mathbf{V}$ seja escrito como soma direta de dois subespaços $\mathbf{W}_1$ e $\mathbf{W}_2$. Mostre que, para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$, existem vetores únicos $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{W}_1$ e $\mathbf{u}_2 \in \mathbf{W}_2$ tais que $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$.

4. Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ dois vetores não-nulos de $\mathbb{R}^2$ e suponhamos que não exista um escalar x tal que $\mathbf{u} = x\mathbf{v}$. Mostre que

$$\mathbb{R}^2 = [\mathbf{u}] \oplus [\mathbf{v}].$$

5. Considere

$$\mathbf{W}_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\right\}.$$

   Encontre um subespaço $\mathbf{W}_2$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $\mathbb{R}^2 = \mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2$.

6. Verifique que qualquer vetor de $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $(1, 2)$ e $(5, 0)$. Que relação existe entre $\mathbb{R}^2$ e $[(1, 2), (5, 0)]$?

7. Encontre geradores para os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

   (a) $\mathbf{W}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\}$.

   (b) $\mathbf{W}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = x - 2y = 0\}$.

   (c) $\mathbf{W}_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - 3z = 0\}$.

   (d) $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$.

   (e) $\mathbf{W}_2 + \mathbf{W}_3$.

8. Sejam $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ vetores de um espaço $\mathbf{V}$. Sabendo-se que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ é um conjunto LI, mostre que:

   (a) $\{\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w}, \mathbf{u} - \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{u} + \mathbf{w}\}$ é um conjunto LI.

   (b) $\{\mathbf{u} + \mathbf{v} - 3\mathbf{w}, \mathbf{u} + 3\mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}\}$ é um conjunto LD.

9. Sejam $\mathbf{u} = (a, b)$, $\mathbf{v} = (c, d)$ vetores de $\mathbb{R}^2$. Mostre que o conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é LD se, e somente se, $ad = bc$.

10. O conjunto $\{1, x, x^2, 2 + x + 2x^2\}$ é LI ou LD em $\mathbf{P}_3$? Retirando-se um elemento qualquer desse conjunto, o conjunto restante é LI ou LD?

11. Encontre um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que $[\mathbf{v}] = \mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$, onde $\mathbf{W}_1$ é o plano $x0y$ e

$$\mathbf{W}_2 = [(1, 2, 3), (1, -1, 1)].$$

12. Para que valores reais de x,

$$\left\{(1, 0, x), (1, 1, x), \left(1, 1, x^2\right)\right\}$$

    é uma base de $\mathbb{R}^3$?

13. Sejam $\mathbf{W}_1$ e $\mathbf{W}_2$ subespaços de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$. É possível que $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \{(0, 0, 0)\}$?

14. Sejam $\mathbf{W}_1$ e $\mathbf{W}_2$ subespaços de $\mathbb{R}^3$ tais que $\dim \mathbf{W}_1 = 1$, $\dim \mathbf{W}_2 = 2$ e $\mathbf{W}_1 \nsubseteq \mathbf{W}_2$. Mostre que $\mathbb{R}^3 = \mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2$.

15. Suponhamos que $\mathbf{W}_1$ e $\mathbf{W}_2$ sejam subespaços de um espaço vetorial $\mathbf{V}$, tais que $\dim \mathbf{W}_1 = 4$, $\dim \mathbf{W}_2 = 5$ e $\dim \mathbf{V} = 7$. Determine os possíveis valores para $\dim(\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2)$.

16. Em $\mathbb{R}^4$, determine uma base e dê a dimensão dos subespaços

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_1 &= [(1, 4, -1, 3), (2, 1, -3, -1), (0, 2, 1, -5)] \\
\mathbf{W}_2 &= [(1, -4, -2, 1), (1, -3, -1, 2), (3, -8, -2, 7)].
\end{aligned}$$

17. Em $\mathbb{R}^3$, considere

$$\mathbf{W}_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\right\} \quad e \quad \mathbf{W}_2 = [(1, 2, 0), (3, 1, 2)].$$

    Determine uma base e dê a dimensão de $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$, $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ e $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$.

18. Sejam $\mathbf{W}_1$ e $\mathbf{W}_2$ os subespaços de $\mathbf{M}(2,2)$ definidos por

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_1 &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} \in \mathbf{M}(2,2) : b = -a \right\} \\ \mathbf{W}_2 &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} \in \mathbf{M}(2,2) : c = -a \right\}.\end{aligned}$$

Determine uma base e dê a dimensão de $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$, $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ e $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$. É verdede que $\mathbf{M}(2,2) = \mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2$?

19. Em $\mathbf{P}_2$, determine uma base e dê a dimensão do subespaço

$$\mathbf{W} = \{p(x) \in \mathbf{P}_2 : p'(x) = 0\}.$$

20. Em $\mathbb{R}^2$, considere o conjunto $\alpha = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, onde

$$\mathbf{u} = (1-a, 1+a) \text{ e } \mathbf{v} = (1+a, 1-a).$$

Determine o(s) valor(es) de a para que α não seja uma base de $\mathbb{R}^2$.

21. Considere $p(x) = 2x^2 - 3x + 1$. O conjunto $\alpha = \{p(x), p'(x), p''(x)\}$ é uma base de $\mathbf{P}_2$?

22. Em $\mathbb{R}^2$, considere o conjunto $\beta = \{(2,1), (1,-1)\}$. Mostre que β é uma base de $\mathbb{R}^2$e calcule $[(4,-1)]_\beta$ e $[(x,y)]_\beta$.

23. Mostre que o conjunto

$$\alpha = \left\{(1-x)^3, (1-x)^2, 1-x, 1\right\}$$

é uma base de $\mathbf{P}_3$ e determine $[-x^2 - 2x + 3]_\alpha$.

24. Ache a matriz de mudança da base $\alpha = \{(1,1,0), (0,1,0)\,(0,0,3)\}$ para a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

25. Sejam $\alpha = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ e $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ tais que

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{v}_2 &= 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3.\end{aligned}$$

(a) Determine as matrizes de mudança da base α para β e de β para α.

(b) Sabendo-se que

$$[\mathbf{v}]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

determine $[\mathbf{v}]_\beta$.

26. Sejam α e β bases de $\mathbb{R}^3$ tais que

$$[\mathbf{I}]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e

$$[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix},$$

encontre $[\mathbf{v}]_\alpha$.

27. A matriz de mudança de uma base α de $\mathbb{R}^2$ para a base

$$\beta = \{(1,1),(0,2)\}$$

é

$$[\mathbf{I}]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determine a base α.

28. sejam $\alpha = \{(1,0),(0,1)\}$, $\beta = \{(-1,1),(1,1)\}$ e $\theta = \{(2,0),(0,2)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$. Se

$$[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

determine $[\mathbf{v}]_\alpha$ e $[\mathbf{v}]_\theta$.

29. Se α é uma base de um espaço vetorial de dimensão n, qual é a matriz de $[\mathbf{I}]_\alpha^\alpha$?

30. Seja

$$\mathbf{V} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

um espaço vetorial.

(a)

$$\begin{aligned} \alpha &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \\ \beta &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

são bases de $\mathbf{V}$?

(b) Se sua resposta ao item anterior foi positiva, determine $[\mathbf{I}]_\beta^\alpha$ e $[\mathbf{I}]_\alpha^\beta$.