Universidade Federal da Paraíba - UFPB
Centro de Ciências Exatas e da Natureza - CCEN
Departamento de Matemática - DM

# $2^a$ Lista de Exercícios de Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Professor: Fágner Dias Araruna

Assunto: Produtos entre vetores

1. Sendo $\|\overrightarrow{a}\| = 2$ e $\left\|\overrightarrow{b}\right\| = \sqrt{3}$, calcule $\left\|3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right\|$, sabendo-se que o ângulo $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = 30^0$. (resp. $2\sqrt{3}$)

2. Mostre que se os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ têm o mesmo comprimento se, e somente se, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ são ortogonais.

3. Prove que $\|\overrightarrow{u} \pm \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| \pm 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|$.

4. Prove a desigualdade de Cauchy-Schwarz $|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| \leq \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\|$.

5. Prove a desigualdade triangular $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leq \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$.

6. Usando o cálculo vetorial, demonstre o teorema de Pitágoras.

7. Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são vetores quaisquer, mostre que:
   $(i)$ $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2$.
   $(ii)$ $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \dfrac{1}{4}\left[\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right]$.
   $(iii)$ (Lei do Paralelogramo) $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = 2\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$.

8. Prove que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \pm\|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\|$ se, e somente se, um dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é múltiplo do outro. Em seguida conclua que $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$ se, e somente se, um dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é nulo ou é múltiplo positivo do outro.

9. Determine a projeção do vetor $\overrightarrow{BA}$ sobre o vetor $\overrightarrow{BC}$, sendo os pontos $A = (3, 2, 1)$, $B = (5, 0, 2)$ e $C = (1, 4, 0)$. Em seguida de termine o ângulo entre $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$. (resp. $-12\overrightarrow{i} + 12\overrightarrow{j} - 6\overrightarrow{k}$, $0^0$)

10. As normas dos vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ são, respectivamente, 4 e 2 e o ângulo por eles formado mede $60^0$. Calcule o ângulo de $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ com $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$. (resp. $\arccos \dfrac{\sqrt{21}}{7}$)

11. Dados $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$ vetores tais que o ângulo entre dois quaisquer deles, nessa ordem, é $60^0$. Determine $\left\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right\|$, sabendo-se que $\|\overrightarrow{a}\| = 4$, $\left\|\overrightarrow{b}\right\| = 2$ e $\|\overrightarrow{c}\| = 6$.

12. Determine o valor de $x$ para o qual os vetores $x\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$ e $3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ sejam perpendiculares.

13. Demonstre que não existe número um real $x$ tal que os vetores $x\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$ e $x\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$ sejam perpendiculares.

14. Determine os ângulos do triângulo cujos vértices são os pontos $A = (3, 2, 1)$, $B = (3, 2, 2)$ e $C = (3, 3, 2)$.

15. Se $Proj_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v} = (2, 1)$, $\overrightarrow{u} = (4, 2)$ e $\|\overrightarrow{v}\| = 6$, determine $\overrightarrow{v}$.

16. Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetotes não-nulos. Demonstre que $\overrightarrow{u}$ é perpendicular a $\overrightarrow{v} - Proj_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v}$.

17. Os ângulos $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ que o vetor não-nulo $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ faz, respectivamente, com os vetores $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ e $\overrightarrow{k}$ são chamados **ângulos diretores** do vetor $\overrightarrow{u}$. Mostre que:

   $(i)$ $\cos\alpha = \dfrac{x}{\|\overrightarrow{u}\|}$, $\cos\beta = \dfrac{y}{\|\overrightarrow{u}\|}$ e $\cos\gamma = \dfrac{z}{\|\overrightarrow{u}\|}$.

   $(ii)$ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

18. Sejam $\overrightarrow{a} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\left(\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right)$, $\overrightarrow{b} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}\right)$ e $\overrightarrow{c} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right)$ vetores. Verifique se $\left\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right\}$ é base ortonormal. Determine, se possível, as coordenadas de $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ em relação aos vetores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$.

19. Ache um vetor $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} - z\overrightarrow{k}$ tal que $\overrightarrow{v} \cdot \left(2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}\right) = 6$ e $\overrightarrow{v} \times \left(2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}\right) = 4\overrightarrow{k}$.

20. Determine um vetor de norma 7 perpendicular aos vetores $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$ e $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$.

21. Determine uma base ortonormal positiva a partir dos vetores $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ e $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$.

22. Calculea área do paralelogramo que tem vértices consecutivos nos pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 1, 3)$ e $C = (3, 2, -5)$.

23. Determine os cossenos diretores de $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ sendo $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$ e $\overrightarrow{v} = 4\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

24. Sabendo que $\|\overrightarrow{a}\| = 3$, $\left\|\overrightarrow{b}\right\| = 5$, determine os valores de $m \in \mathbf{R}$ tal que os vetores $\overrightarrow{a} + m\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{a} - m\overrightarrow{b}$ sejam: $(a)$ perpendiculares $(b)$ paralelos.

25. Determine um vetor $\overrightarrow{c}$ perpendiculares aos vetores $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$ e $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ e $\overrightarrow{c} \cdot \left(\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 7\overrightarrow{k}\right) = 100$.

26. Determine a área do triângulo de vértices $A = (2,3,1)$, $B = (2,-2,0)$ e $C = (1,2,-3)$. $\left(\text{resp. } \dfrac{3}{2}\sqrt{43}\right)$

27. Calcule o volume do paralelepípedo que tem um dos vértices no ponto $A = (2,1,6)$ e os três vértices adjacentes nos pontos $B = (4,1,3)$, $C = (1,3,2)$ e $D = (1,2,1)$.

28. Demonstre vetorialmente que todo ângulo inscrito num semi-círculo é reto.
[Sugestão: Considere um semi-círculo de raio $R$ e centro $O$. Tome três pontos $A$, $B$ e $C$ sobre o semi-círculo de forma que $B$ e $C$ sejam colineares com a origem. Mostre que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}$ e $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{DA}$ e em seguida que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.]

29. Os vértices de um triângulo são os pontos $A = (-1,2,4)$, $B = (3,-3,4)$ e $C = (-1,6,1)$. Determine a altura relativa ao lado $AC$. (resp. 5)

30. Dados os vetores $\overrightarrow{e_1} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ e $\overrightarrow{e_2} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$, determine uma base ortonormal $\beta = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$. $\left(\text{resp. } \left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}, \dfrac{\sqrt{6}}{6}, \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)\right)$