Universidade Federal da Paraíba - UFPB
Centro de Ciências Exatas e da Natureza - CCEN
Departamento de Matemática - DM

1^a Lista de Exercícios de Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Professor: Fágner Dias Araruna

Assunto: Operações com vetores - Dependência e independência linear - Base

1. Determine vetorialmente que o segmento determinado pelos pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao 3^0 lado e tem comprimento igual a metade deste.

2. Dois vetores formam um ângulo de 120^0. Seus módulos são, respectivamente , 6 e 2. Calcule o módulo da soma e o módulo da diferença destes vetores. (resp. $2\sqrt{7}$ e $2\sqrt{13}$)

3. Sendo os vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ perpendiculares e $\|\overrightarrow{a}\| = 5$ e $\left\|\overrightarrow{b}\right\| = 12$, determine $\left\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right\|$ e $\left\|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right\|$. (resp. $\left\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right\| = \left\|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right\| = 13$)

4. Determine a coordenada vetorial $\overrightarrow{v}$ do ponto C que divide o segmento orientado $\overline{AB}$, sabendo-se que $\overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{CB}$. (resp. $\overrightarrow{v} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{1+m}$)

5. Dados os pontos $P = (2, 4, 5)$ e $Q = (1, 2, 3)$, determine o vetor $\overrightarrow{w}$ paralelo ao vetor $\overrightarrow{PQ}$ tal que $\overrightarrow{w} = 6\dfrac{\overrightarrow{PQ}}{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|}$. (resp. $\overrightarrow{w} = -2\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} - 4\overrightarrow{k}$)

6. Determine x para que o vetor $\overrightarrow{u} = (x, 2, 2x)$ tenha módulo 7. (resp. $x = \pm 3$)

7. Dado o vetor $\overrightarrow{a} = (-2, 3, 6)$, determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{b}$, paralelo e de sentido contrário a $\overrightarrow{a}$, sabendo-se que $\left\|\overrightarrow{b}\right\| = 14$. (resp. $\overrightarrow{b} = 4\overrightarrow{i} - 6\overrightarrow{j} - 12\overrightarrow{k}$)

8. Dados os pontos A e B, determine a coordenada vetorial do ponto médio do vetor $\overrightarrow{AB}$.

9. Dados $P = (2, 1, 5)$ e $Q = (4, 3, 1)$, ache as coordenadas do ponto médio de $\overrightarrow{PQ}$.

10. Dados $\overrightarrow{u} = (3, -1, 2)$, $\overrightarrow{v} = (2, 4, -2)$, determenie o vetor $\overrightarrow{w}$ tal que $3\overrightarrow{w} + 2\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$.

11. Seja $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$ e considere o ponto $A = (1, 2, 3)$. Determine o ponto B tal que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v}$.

12. Demonstre vetorialmente que as diagonais de um paralelogramo se cortam mutualmente ao meio.

13. Dados os vetores $\overrightarrow{a} = (3, -2, 1)$, $\overrightarrow{b} = (-1, 1, -2)$ e $\overrightarrow{c} = (2, 1, -3)$, mostre que o conjunto $\left\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right\}$ forma um base para o $\mathbf{R}^3$ e determine as coordenadas de vetor $\overrightarrow{v} = (11, -6, 5)$ na base $\left\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right\}$. (resp. $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$)

14. Qual o valor de x para que os vetores $\overrightarrow{a} = (3, -x, -2)$, $\overrightarrow{b} = (3, 2, x)$ e $\overrightarrow{c} = (1, -3, 1)$ sejam coplanares? (resp. 14 ou -2)

15. Passe o vetor $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{v}_1 - \overrightarrow{v}_2 + \overrightarrow{v}_3$ para a base $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3\}$, sendo $\overrightarrow{u}_1 = \overrightarrow{v}_1 - 2\overrightarrow{v}_2 + \overrightarrow{v}_3$, $\overrightarrow{u}_2 = 2\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2$ e $\overrightarrow{u}_3 = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_3$. (resp. $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2$)

16. Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores tais que $\overrightarrow{v}$ é múltiplo de $\overrightarrow{u}$ mas $\overrightarrow{w}$ não é. Se $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$, prove que $\gamma = 0$ e $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} = 0$.

17. Verifique se os vetores $\overrightarrow{a} = -3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$ e $\overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 4\overrightarrow{k}$ podem representar os lados de um triângulo.

18. Os vetores $\overrightarrow{a} = 4\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$ e $\overrightarrow{c} = -3\overrightarrow{i} + 9\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ são L.I. ou L.D.? Eles formam uma base para o $\mathbf{R}^3$? É base positiva ou negativa? Se $\left\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right\}$ for base, determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ em relação a esta base.

19. Seja $\left\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right\}$ uma base. Verifique se $\left\{\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}, 2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b} + 5\overrightarrow{c}\right\}$ é base.

20. Prove as sguintes propriedades de norma de um vetor:
    (a) $\|\overrightarrow{u}\| = 0$ se, e somente se, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
    (b) $\|\lambda\overrightarrow{u}\| = |\lambda|\,\|\overrightarrow{u}\|$.
    (c) $\|-\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{u}\|$.