EXERCÍCIOS

1. As seguintes afirmações são verdadeiras quando em $\mathbb{R}$ a métrica considerada é a usual. Justifique-as.

   a) $\mathbb{Q}$ não é compacto

   b) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\}$ é compacto

   c) $B = \{2\} \cup [3, 4]$ é compacto

   d) $\mathbb{Z}$ não é compcato

   e) $[1, 2] \cap \mathbb{Q}$ não é compacto

   f) $\mathbb{R}$ não é compacto.

2. Seja **M** um espaço métrico cuja métrica é a zero-um. Mostre que **M** é compacto se, e somente se, **M** é finito.

3. Num espaço métrico **M** seja (x_n) uma seqüência que converge para $p \in M$. Mostre que $A = \{p\} \cup \{x_1, x_2, \ldots\}$ é compacto.

4. Seja E um espaço vetorial normado. Se $A \subset E$ é um subconjunto compacto e se $p \in E$, mostre que

$$A_p = \{x + p \mid x \in A\}$$

   também é compacto.

5. Sejam **M** e **N** espaços métricos e $f: M \longrightarrow N$ uma aplicação bijetora e aberta. Mostre que:

   a) Se (y_n) é uma seqüência convergente em N, então (x_n), onde $x_n = f^{-1}(y_n)$, converge em **M**.

   b) Se B é compacto em N, então $A = f^{-1}(B)$ é compacto em M.

6. Seja $f: M \longrightarrow N$ uma aplicação contínua. Se **M** é compacto, prove que $f(M)$ é fechado.

7. Sejam **A** e **B** subconjuntos de um espaço métrico tais que **A** é compacto e **B** é fechado. Mostre que $A \cap B$ é compacto.

8. As seguintes afirmações a respeito do $\mathbb{R}^n$ são verdadeiras. Justifique-as:

a) $B^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1\}$ é compacto.
b) $S^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$ é compacto.
c) Uma bola aberta $B(p, \varepsilon)$, $\forall\, p \in \mathbb{R}^n$ e $\forall\, \varepsilon > 0$, não é um conjunto compacto.

9. Se A e B são subconjuntos compactos de um espaço M, mostre que $A \cap B$ e $A \cup B$ também são compactos.

10. Mostre que não existe nenhuma aplicação sobrejetora e contínua de $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ em $\mathbb{R}$.

11. Seja A um subconjunto compacto de um espaço métrico M. Mostre que $\overline{A}$ também é compacto.
Sugestão: Para toda seqüência (x_n) em $\overline{A}$ existe uma seqüência (y_n) em A de modo que $d(x_n, y_n) < \frac{\lambda}{n}$, para qualquer $\lambda > 0$ tomado "a priori". Se (y_{n_i}) converge para um ponto de A, mostre que (x_{n_i}) converge em $\overline{A}$.

12. Se A é um subconjunto totalmente limitado de um espaço métrico M, mostre que $\overline{A}$ também é totalmente limitado.

13. Exiba um recobrimento aberto de $A =]0, +\infty[$ que não admite nenhum subrecobrimento finito. Conclusão?

14. Dê um recobrimento aberto de $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x\}$ que não admite nenhum subrecobrimento finito. Conclusão?

15. Seja (M, d) um espaço métrico compacto. Se d_1 é uma métrica sobre M tal que $d_1(x, y) \leqslant k\,d(x, y)$, $\forall\, x, y \in M$, onde $k > 0$ é uma constante dada, mostre que (M, d_1) também é compacto.
Sugestão: Mostre que todo aberto de (M, d_1) é um aberto de (M, d).

16. Seja (M, d) um espaço métrico. Se $A \subset M$ é compacto, mostre que todo subconjunto infinito $B \subset A$ tem um ponto de acumulação em A.
Sugestão: Suponha $B \subset A$ infinito, de maneira que $B' \cap A = \emptyset$. Daí, $\forall\, x \in A$, existe $B_x = B(x, \varepsilon_x)$ tal que $B_x \cap B = \emptyset$ ou $B_x \cap B = \{x\}$. Use o fato de que $(B_x)_{x \in A}$ é um recobrimento aberto de A que é compacto.

17. Prove que são equivalentes as seguintes afirmações para um espaço métrico M: (a) M satisfaz a condição de Heine-Borel ($\Longleftrightarrow$ M é compacto); (b) para toda família (F_i) de subconjuntos fechados de M tais que $\cap F_i = \emptyset$, existe uma subfamília finita $(F_{i_1}, \ldots, F_{i_n})$ para a qual $F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_n} = \emptyset$.
Nota: A propriedade (b) acima, que também caracteriza a compacidade nos espaços métricos, é conhecida como *propriedade da intersecção finita*.

18. Seja M um espaço métrico. Se $K \subset M$ $(K \neq \emptyset)$ é compacto, mostre que existe uma função contínua $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $K = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$.
Sugestão: Considere a função $x \longrightarrow d(x, K)$.

19. Prove que se $d(A, B) = 0$ para dois subconjuntos A e B de um espaço métrico M e se $f: M \longrightarrow N$ é uniformemente contínua, então $d(f(A), f(B)) = 0$.

20. Seja M um espaço métrico compacto. Mostre que existe uma seqüência $y_1, y_2, \ldots$ de pontos de M tal que o conjunto $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ é denso em M.
Sugestão: Sendo compacto, M é totalmente limitado. Assim existem $x_{11}, \ldots, x_{1n_1}, x_{21}, \ldots, x_{2n_2}, \ldots$ em M de maneira que:

$$B(x_{11}, 1) \cup \ldots \cup B(x_{1n_1}, 1) \supset M$$
$$B\left(x_{21}, \frac{1}{2}\right) \cup \ldots \cup B\left(x_{2n_2}, \frac{1}{2}\right) \supset M$$
$$\ldots$$

Considere a seqüência dos x_{ij} assim obtidos.

2. Sobre $\mathbb{R}$ considere a métrica usual. Mostre que $R^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ é um conjunto desconexo.

3. Seja $f: [a, b] \longrightarrow [c, d]$ uma função contínua e estritamente crescente tal que $f(a) = c$ e $f(b) = d$. Mostre que f é um homeomorfismo.

4. Mostre que uma função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}$ é contínua se, e somente se, f é constante.

5. Mostre que um espaço métrico M é conexo se, e somente se, todo subconjunto não vazio $A \subsetneq M$ tem $Fr(A) \neq \emptyset$.

6. Mostre que o cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ é conexo.
Sugestão: Mostre que $f: C \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = ((x, y), z)$ é um homeomorfismo e leve em conta que S^1 e $\mathbb{R}$ são conexos.

7. Mostre que $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ é conexo.
Sugestão: $f:]0, +\infty[\times S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ definida por $f(t, x) = tx$ é um homeomorfismo cujo inverso é dado por $f^{-1}(y) = \left(\|y\|, \frac{y}{\|y\|}\right)$.

8. Em $\mathbb{R}^2$, sendo $p = (0, 1)$, mostre que $S^1 - \{p\}$ é conexo.
Sugestão: Projeção estereográfica.

9. Se u e v são pontos distintos de S^1, mostre que $S^1 - \{u, v\}$ é desconexo.

10. Mostre que S^1 não é homeomorfo a nenhum subconjunto de $\mathbb{R}$.
Sugestão: Suponha $f: S^1 \longrightarrow A \subset \mathbb{R}$ um homeomorfismo e conclua que A é um intervalo fechado. Se y é um ponto interior ao conjunto A e $f(x) = y$, considere $f: S^1 - \{x\} \longrightarrow A - \{y\}$.

11. Sejam A e B subconjuntos de um espaço métrico M. Se A é conexo, B é aberto e fechado e $A \cap B \neq \emptyset$, prove que $A \subset B$.
Sugestão: $A \not\subset B \Longrightarrow A = A \cap B \mid A \cap B^c$.

12. Seja M um espaço métrico. Se um subconjunto conexo X intercepta $Y \subset M$ e também seu complementar Y^c, mostre que X intercepta $Fr(Y)$. (Este resultado é, às vezes, conhecido como *teorema da alfândega*.)

Sugestão: Suponha que X não intercepte $Fr(Y) = \overline{Y} - \overset{\circ}{Y}$. Mostre a seguir que $X \cap Y = X \cap \overset{\circ}{Y}$ e $X \cap Y^c = X \cap \overset{\circ}{\widehat{Y^c}}$.

13. Sejam A e B partes conexas de um espaço métrico M tais que $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$. Mostre que $A \cup B$ é conexo.

14. Se A e B são duas partes não vazias de um espaço métrico M tais que $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset$, mostre que $A \cup B$ é desconexo.

15. Seja M um espaço métrico tal que para quaisquer subconjuntos não vazios $A, B \subset M$, vale a relação:

$$(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \neq \emptyset.$$

Mostre que M é conexo.

16. Seja A um subconjunto conexo de um espaço métrico M. Se X é um subconjunto de M tal que $A \subset X \subset \overline{A}$, mostre que X também é conexo.

17. Seja M um espaço conexo. Se A e B são subconjuntos conexos de M tais que $\mathrm{Fr}(A) \subset B$, prove que $A \cup B$ é conexo se $\mathrm{Fr}(A) \neq \emptyset$.

18. Seja $A \neq \emptyset$ uma parte do espaço métrico. Se o subespaço A é conexo por caminhos dizemos que A é um *subconjunto conexo por caminhos*.
Se A e B são subconjuntos conexos por caminhos de um espaço M tais que $A \cap B \neq \emptyset$, mostre que $A \cup B$ é conexo por caminhos.

19. Mostre que um espaço cuja métrica é a zero-um é conexo por caminhos se, e somente se, é formado de um ponto apenas.

20. Seja $f: M \longrightarrow N$ uma aplicação contínua e sobrejetora. Se M é conexo por caminhos, prove que N também é conexo por caminhos.

21. Prove que $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ é conexo por caminhos.

22. Determine as componentes conexas do espaço $M = \{0\} \cup [1, 2]$ cuja métrica é a induzida pela usual de $\mathbb{R}$.

23. Considerando sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ a métrica induzida pela usual, ache as suas componentes conexas.

24. Se um subconjunto não vazio de M é conexo, aberto e fechado, simultaneamente, prove que esse subconjunto é uma componente.

25. Se o número de componentes de um espaço métrico é finito, mostre que cada componente é um conjunto aberto e fechado simultaneamente.

EXERCÍCIOS

1. Verifique se as seqüências (x_n) definidas abaixo são seqüências de Cauchy:

   a) $x_n = \dfrac{1}{1+n}$ em $\mathbb{Q}$

   b) $x_n = \dfrac{1}{n}$ em $]0, 1]$

   c) $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ em $\mathbb{R}$

   d) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ em $\mathbb{R}$

   e) $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ em $\mathbb{Q}$

   f) $x_n = \dfrac{1}{n}$ em $\mathbb{R}$ com a métrica zero-um.

   Obs.: De (a) a (e) a métrica considerada é a usual.

2. Seja (x_n) uma seqüência de Cauchy num espaço cuja métrica é a zero-um. Mostre que (x_n) é estacionária.

3. Seja (x_n) uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{R}$ cujo conjunto dos termos é infinito. Mostre que $A' = \{x_n\}'$ é unitário.

4. Seja E um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{R}$. Se (x_n) e (y_n) são seqüências de Cauchy em E e se $\alpha \in \mathbb{R}$, mostre que $(x_n + y_n)$ e (αx_n) também são seqüências de Cauchy em E.

5. Se (x_n) e (y_n) são seqüências de Cauchy em $\mathbb{R}$, mostre que $(x_n y_n)$ é também uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{R}$.

6. Seja $f: M \longrightarrow N$ um homeomorfismo uniforme. Mostre que: uma seqüência (x_n) de pontos de M é de Cauchy se, e somente se, $(f(x_n))$ é de Cauchy em N.
Sugestão: Proposição 4.

7. Use a função $f:]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$ e a seqüência $\left(\frac{1}{n}\right)$ em $]0, 1]$ para mostrar que uma função contínua não transforma necessariamente seqüências de Cauchy em seqüências de Cauchy.

8. Se (x_n) é uma seqüência de pontos de um espaço M e $\lim x_n = p \in M$, mostre que $(x_1, p, x_2, p, \ldots)$ é uma seqüência de Cauchy em M.

9. Se $f: M \longrightarrow N$ é uma função que transforma seqüências de Cauchy em seqüências de Cauchy, mostre que f é contínua.
Sugestão: Para todo $p \in M$, se $x_n \longrightarrow p$, considere a seqüência $(x_1, p, x_2, p, \ldots)$. Use então o exercício anterior a fim de concluir que $f(x_n) \longrightarrow f(p)$.

10. Seja (M, d) um espaço métrico compacto. Se $X \subset M$ é infinito, mostre que existe uma seqüência de Cauchy (x_n) em X tal que $x_i \neq x_j$, sempre que $i \neq j$.
Sugestão: Exercício 16, Cap. V.

11. Mostre que não são completos os seguintes subespaços de $\mathbb{R}$:

a) $]0, 1]$

b) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$

c) $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$

12. O subespaço $\mathbb{Z}$ da reta real é completo? Justifique.

13. Seja M um espaço completo. Se $f: M \longrightarrow N$ é contínua e $(x_1, x_2, \ldots)$ é uma seqüência de Cauchy em M, mostre que $(f(x_1), f(x_2), \ldots)$ é seqüência de Cauchy em N.

14. Se (M, d) é um espaço métrico tal que M é finito, mostre que esse espaço é completo.

15. Se M é um espaço cuja métrica é a zero-um, mostre que M é completo.
Sugestão: Exercício 2.

16. Dê um exemplo de duas métricas d e d' equivalentes sobre um conjunto M de maneira que (M, d) é completo mas (M, d') não é completo.
Sugestão: Exercício 41 – Cap. II.

17. Se $f: M \longrightarrow N$ é uma isometria e M é completo, prove que N é completo.

18. Dê um exemplo de um espaço métrico completo M e de uma função contínua e sobrejetora $f: M \longrightarrow N$ de maneira que N não é completo.
Sugestão: Considere sobre $\mathbb{Q}$ as métricas zero-um e usual.

19. Se X e Y são subespaços completos de um espaço M, mostre que $X \cup Y$ é completo.

20. Sejam (x_n) e (y_n) seqüências de Cauchy num espaço M. Mostre que (d_n), onde $d_n = d(x_n, y_n)$, é uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{R}_+$ que, portanto, converge para um ponto de $\mathbb{R}_+$.

21. Seja M um espaço métrico tal que toda bola fechada de M é um conjunto compacto. Prove que M é completo.
Sugestão: Mostre primeiro que o conjunto dos termos de uma seqüência de Cauchy é limitado e, portanto, está contido numa bola fechada.

22. Seja E o conjunto das seqüências reais cujos termos são todos nulos, salvo um número finito deles no máximo. Para $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$ em E definamos

$$d(x, y) = \sup\{|x_k - y_k| : k \geqslant 1\}$$

a) Mostre que d é uma métrica sobre E;

b) Mostre que (z_n), onde $z_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, 0, \ldots\right)$, é uma seqüência de Cauchy em E;

c) Prove que (E, d) não é completo.

23. Seja M um espaço métrico completo. Se X é um subespaço de M, mostre que: X é completo $\Longleftrightarrow$ X é fechado.

24. Mostre que $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2 + \frac{x}{3}$ é uma contração; a seguir construa as seqüências definidas por $f^n(0)$ e $f^n(1)$ e ache os seus limites.

25. Seja M um espaço métrico completo e suponhamos que $f: M \longrightarrow M$ é uma contração relativamente à constante k $(0 \leqslant k < 1)$. Dado qualquer $p \in M$, se $\varepsilon > 0$ e vale a relação $\varepsilon \geqslant \frac{d(p, f(p))}{1 - k}$, mostre que o ponto fixo de f pertence à bola $B[p, \varepsilon]$.