EXERCÍCIOS

1. Sejam M e N espaços métricos e seja $f: M \longrightarrow N$. Se $p \in M$ e para qualquer $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \varepsilon < 1$ existe $\delta > 0$ de maneira que

$$d(x, p) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(p)) < \varepsilon$$

mostre que f é contínua em p.

2. Seja $M = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}^*\right\}$ com a métrica usual induzida. Mostre que a função $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(0) = 0$ e $f\left(\frac{1}{n}\right) = n$ é contínua em todo ponto $\frac{1}{n} \in M$ mas não é contínua no ponto 0.

3. Uma função $f: M \longrightarrow N$ satisfaz a *condição de Holder* de ordem k (constante estritamente positiva) se existe $c > 0$ de maneira que $d(f(x), f(y)) \leqslant c\,[d(x, y)]^k$, $\forall\, x, y \in M$. Mostre que nessas condições f é contínua.

4. Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(n) = n + 1$, se $n \in \mathbb{N}$, e $f(x) = x$ para todo $x \notin \mathbb{N}$. Mostre que f é contínua nos pontos de $\mathbb{R} - \mathbb{N}$ mas não é contínua em $\mathbb{N}$.

5. Mostre que não é contínua no ponto (0, 0) a função $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(0, 0) = 0$ e $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$.

   Sugestão: Mostre que a restrição de f à reta $y = x$ não é contínua no ponto 0 e observe a proposição 5.

6. Mostre que $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(0, 0) = 0$ e $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ não é contínua no ponto (0, 0), mas que a restrição de f ao eixo das ordenadas é contínua.

   Sugestão: Para a primeira parte considere a restrição de f à parábola $y^2 = x$.

7. Seja $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e façamos

$$A = \{p \in \mathbb{R}^2 | f(p) < 0\} \qquad e \qquad B = \{p \in \mathbb{R}^2 | f(p) \leqslant 0\}$$

Mostre que $\overline{A} \subset B$ e $A \subset \mathring{B}$.

8. Seja $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x + y$ se $xy = 0$ e $f(x, y) = 1$ se $xy \neq 0$. Mostre que f é contínua em todo ponto (x, y) com $xy \neq 0$ mas não é contínua nos demais, exceto $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

9. Sejam M e N espaços métricos, $Y \subset N$ um subespaço e $j: Y \longrightarrow N$ a inclusão. Mostre que: uma aplicação $f: M \longrightarrow Y$ é contínua se, e somente se, $j \circ f: M \longrightarrow N$ é contínua.

10. Sejam M e N espaços métricos e $f, g: M \longrightarrow N$ funções contínuas. Se $f(a) \neq g(a)$, para algum $a \in M$, mostre que existe uma bola $B = B(a, \varepsilon)$ tal que $f(x) \neq g(y)$, para quaisquer $x, y \in B$.

11. Sejam $f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas tais que $f(x) = g(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{Q}$. Prove que $f = g$.
Sugestão: Use exercício anterior.

12. Seja M um espaço cuja métrica é a zero-um. Mostre que toda função $f: M \longrightarrow N$, qualquer que seja o espaço métrico N, é contínua.

13. Sejam I e J intervalos em $\mathbb{R}$. Se $f: I \longrightarrow J$ é sobrejetora e estritamente crescente (isto é: $x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$), mostre que f é contínua.

14. Mostre que $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ não é contínua no ponto 0 mas é contínua nos demais pontos.
Sugestão: Para a primeira parte considere a seqüência $\left(\frac{2}{n\pi}\right) \longrightarrow 0$.

15. Seja $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e tal que $f(a) < 0 < f(b)$. Se $c = \sup\{x \in [a, b] | f(x) < 0\}$, mostre que $f(c) = 0$.

16. Use a proposição 3 para provar que a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ se x racional e $f(x) = 0$ se x irracional só é contínua no ponto 0.

17. Seja M um espaço métrico e seja $\chi_A: M \longrightarrow \mathbb{R}$ a função característica de um subconjunto $A \subset M$, isto é, $\chi_A(x) = 1$ se $x \in A$ e $\chi_A(x) = 0$ se $x \notin A$. Mostre que χ_A é contínua em $p \in M$ se, e somente se, $p \notin Fr(A)$.

18. Mostre que $f: M \longrightarrow N$ é contínua se, e somente se, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, para todo $A \subset M$.

19. Use a proposição 3 para provar que a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ se x irracional e $f(x) = 1 - x$ se x racional não é contínua nos pontos $p \neq \frac{1}{2}$. Essa função é contínua no ponto $\frac{1}{2}$?

20. Mostre que toda função $f: M \longrightarrow N$ que satisfaz a condição de Holder é uniformemente contínua.

21. Se M é um espaço métrico e $A \neq \emptyset$ é uma parte de M, mostre que $x \longmapsto d(x, A)$ é uniformemente contínua.

22. Sobre $M = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ considere a métrica usual induzida de $\mathbb{R}$. Mostre que $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f\left(\frac{1}{n}\right) = n$ não é uniformemente contínua.

23. Mostre que $f: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ é contínua mas não é uniformemente contínua.

24. Mostre que $f: M \longrightarrow N$ é uniformemente contínua se, e somente se, $d(x_n, y_n) \longrightarrow 0$ implica $d(f(x_n), f(y_n)) \longrightarrow 0$, para quaisquer seqüências (x_n) e (y_n) de M.

25. Mostre que $m: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $m(x, y) = xy$ não é uniformemente contínua.
Sugestão: Considere a restrição de m à reta $y = x$ e leve em conta o corolário da proposição 11.

26. Mostre que a projeção ortogonal define um homeomorfismo do parabolóide $z = x^2 + y^2$ do $\mathbb{R}^3$ no plano $z = 0$.

27. Estabeleça um homeomorfismo entre $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ e $\mathbb{R}^2 - B$, sendo $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

28. Mostre que não são homeomorfos os intervalos $]0, 1[$, $[0, 1[$ e $[0, 1]$.
Sugestão: Mostre primeiro que se J é um intervalo, uma aplicação injetora e contínua $J \longrightarrow \mathbb{R}$ é monótona.

29. Estabeleça um homeomorfismo entre o primeiro quadrante $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y \geqslant 0\}$ e $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geqslant 0\}$.

30. Um espaço métrico M se diz *homogêneo* se para quaisquer $a, b \in M$ existe um homeomorfismo $f: M \longrightarrow M$ tal que $f(a) = b$.

a) Se M e N são homeomorfos mostre que M é homogêneo se, e somente se, N é homogêneo.

b) Mostre que um espaço vetorial normado E é homogêneo.
c) Mostre que uma bola aberta num espaço vetorial normado é homogêneo.
d) Mostre que um espaço cuja métrica é a zero-um é homogêneo.

31. Sejam $f: M \longrightarrow N$ e $g: N \longrightarrow P$ funções contínuas. Mostre que se $g \circ f$ é homeomorfismo e g injetora (ou f sobrejetora), então f e g são homeomorfismos.

32. Seja $f: M \longrightarrow N$ um homeomorfismo. Para qualquer parte $A \subset M$ mostre que:

a) $p \in \overset{\circ}{A} \Longleftrightarrow f(p) \in \overset{\circ}{\widehat{f(A)}}$
b) $p \in \overline{A} \Longleftrightarrow f(p) \in \overline{f(A)}$
c) $p \in A' \Longleftrightarrow f(p) \in (f(A))'$

33. Seja $f: M \longrightarrow N$ um homeomorfismo. Se $x \in M$ e $f(x) = y$, mostre que $M - \{x\}$ e $N - \{y\}$ são homeomorfos.