$p \in F^c$, que é aberto, e portanto existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \subset F^c$, isto é, $B(p, \varepsilon) \cap F = \emptyset$. Mas como $p \in F'$ então $(B(p, \varepsilon) - \{p\}) \cap F$ é infinito do que decorre que $B(p, \varepsilon) \cap F$ também é infinito e portanto não vazio. Este absurdo vem garantir a validade desta implicação.

($\Longleftarrow$) Seja $p \in F^c$. Como $F' \subset F$, então $F^c \subset (F')^c$ e daí $p \in (F')^c$. Donde existe $\varepsilon > 0$ de maneira que

$$(B(p, \varepsilon) - \{p\}) \cap F = \emptyset$$

conforme nota anterior. Mas $p \notin F$ e daí vamos ter também a igualdade $B(p, \varepsilon) \cap F = \emptyset$ que equivale a $B(p, \varepsilon) \subset F^c$ o que nos garante que todos os pontos de F^c são interiores, ou seja, que F^c é aberto. Donde F é fechado. ∎

EXERCÍCIOS

1. Mostre que o conjunto $G = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > 0\}$ é um subconjunto aberto do espaço $\mathbb{R}^n$.

2. Considere sobre $M = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ a métrica induzida pela usual de $\mathbb{R}$. Mostre que a bola fechada $B[0, 1]$ (ver Exercício 28 – Cap. II) é um subconjunto aberto do espaço M.

3. Mostre que o conjunto $A = [0, 1]$ é aberto e fechado simultaneamente quando considerado como parte do espaço $M = [0, 1] \cup \{2\}$ com a métrica induzida pela usual de $\mathbb{R}$. E como subconjunto de $N = [0, 2]$?

4. Mostre que todo aberto do $\mathbb{R}^2$ contém um ponto $p = (x_1, x_2)$ tal que $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$. Generalize para o $\mathbb{R}^n$.

5. Considere sobre $M = \mathscr{B}(X; R)$ a métrica dada por $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$. Mostre que não é aberto o seguinte subconjunto de $M : G_a = \{f \in M \mid f(a) > 0\}$, onde a é um ponto fixo de X.

6. Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um *subespaço vetorial* de E é um subconjunto $S \subset E$ tal que: (i) $0 \in S$; (ii) $u, v \in S \Longrightarrow u + v \in S$; (iii) $u \in S$ e $\alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha u \in S$. Se S é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^n$ tal que $S \neq \mathbb{R}^n$, mostre que S não é aberto.
Sugestão: Mostre que qualquer bola aberta de centro no ponto $0 \in S$ contém n vetores não nulos do tipo

$$(a_1, 0, \ldots, 0), (0, a_2, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 0, a_n)$$

e portanto não pode estar contida em S visto que $S \neq \mathbb{R}^n$.

7. Para cada um dos seguintes subconjuntos $A \subset \mathbb{R}$ ache $\overset{\circ}{A}$, $\overline{A}$, $\overset{\circ}{\overline{A}}$ e $\overline{\overset{\circ}{A}}$:

a) $A = \mathbb{Z}$
b) $A = \mathbb{Q} \cap]0, 1]$
c) $A = \{-1\} \cup \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$
d) $A =]0, 1] \cup \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right\}$

8. Seja M um espaço métrico e considere subconjuntos $A, B \subset M$. Mostre que

a) $\overset{\circ}{(A \cap B)} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$
b) $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{(A \cup B)}$

Dê um exemplo em que se tenha $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \neq \overset{\circ}{(A \cup B)}$.

9. Mostre que são fechados:

a) $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}$;
b) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ no espaço $\mathbb{R}^2$;
c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geqslant 0\}$, no $\mathbb{R}^2$.

Generalize este último resultado.

d) Uma bola fechada num espaço métrico qualquer (ver Exercício 28 – Cap. II).

10. Sejam A e B subconjuntos de um espaço métrico M. Mostre que:

a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
b) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Dê um exemplo em que se tenha $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

11. Dado um espaço métrico M, se $A \subset M$ define-se a *fronteira* de A (indicada por $Fr(A)$), através da seguinte fórmula: $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \overline{A} \cap (\overset{\circ}{A})^c$.

a) Em $\mathbb{R}$ ache a fronteira de $A = [a, b[$, $B = \{a, b\}$, $C = [a, +\infty[$ e $C = \mathbb{Z}$
b) Em $\mathbb{R}^2$ ache a fronteira de $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ e } y > 0\}$.

12. Mostre que, para qualquer espaço M e qualquer subconjunto $A \subset M$, vale $\overline{A} = \overset{\circ}{A} \cup Fr(A)$.

13. Para qualquer subconjunto A de um espaço M prove que

a) $Fr(A) \subset A \Longleftrightarrow$ A é fechado;
b) $Fr(A) \cap A = \emptyset \Longleftrightarrow$ A é aberto;
c) $Fr(A) = \emptyset \Longleftrightarrow$ A é aberto e fechado.

14. Achar o conjunto derivado de

a) $\mathbb{Z}$ no espaço $\mathbb{R}$;
b) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ em $\mathbb{R}$;
c) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}^2$;
d) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}^2$.

15. Para quaisquer subconjuntos de um espaço M mostre que $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

16. Se A é um subconjunto finito de um espaço M, mostre que $A' = \emptyset$.

17. Mostre que vale a igualdade $\overline{A} = A \cup A'$, para qualquer subconjunto $A \subset M$.

18. Seja F um subconjunto fechado de um espaço M. Se $p \notin F$, mostre que $d(p, F) > 0$.

19. Seja F um subconjunto fechado de um espaço métrico M. Se $p \notin F$, mostre que existem abertos disjuntos G e H de maneira que $p \in G$ e $F \subset H$.

20. Mostre que num espaço vetorial normado E a aderência de uma bola aberta $B(p, \varepsilon)$ é a bola fechada $B[p, \varepsilon]$.
Sugestão: Sendo $S(p, \varepsilon) = \{x \in M \mid \|x - p\| = \varepsilon\}$ basta provar que $S(p, \varepsilon) \subset \overline{B(p, \varepsilon)}$. Qualquer $u \in S(p, \varepsilon)$ é limite da seqüência (x_n) dada por $x_n = p + \frac{n}{n+1}(u - p)$ cujos termos pertencem todos à bola $B(p, \varepsilon)$.

21. Sejam M e N espaços métricos. Considerando sobre $M \times N$ uma qualquer das métricas usuais D, D_1 ou D_2, mostre que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ e $\overset{\circ}{\widehat{A \times B}} = \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$, para quaisquer $A \subset M$ e $B \subset N$.