EXERCÍCIOS

1. Seja (M, d) um espaço métrico. Mostre que também são métricas sobre M as funções definidas do seguinte modo:

   a) $\alpha(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$

   b) $\beta(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$

   c) $\gamma(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$

2. Mostre que não são métricas as seguintes funções:

   a) $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $f(x, y) = |x_1 - y_1|$ para quaisquer $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$.
   b) $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definida por $g(x, y) = (x - y)^2$

3. Se a métrica usual em $\mathbb{R}$ induz num subconjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ a métrica zero-um, prove que X tem 2 elementos no máximo.

4. Consideremos o conjunto $X = \{x, y, z, t\}$ de 4 elementos e definamos $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ assim: $d(x, y) = d(x, z) = d(y, z) = 2$, $d(x, t) = d(y, t) = d(z, t) = 1$ e $d(r, r) = 0$, para todo $r \in X$. Verifique que d é uma métrica sobre X.

5. Mostre que não é uma métrica sobre $\mathscr{R}([0, 1]; \mathbb{R})$ a relação definida por

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$

6. Seja $d: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ uma aplicação com as seguintes propriedades: (a) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ (b) para quaisquer $x, y, z \in M$, $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(y, z)$. Prove que d é uma métrica sobre M.

7. Seja G um grupo comutativo aditivo e suponhamos que exista $f: G \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que (a) $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$ sempre que $x \neq 0$; (b) $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in G$; (c) $f(x + y) \leqslant f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in G$. (I) Dê um exemplo de um grupo G e uma função f que satisfaçam as condições acima. (II) Mostre que a aplicação dada por $d(x, y) = f(x - y)$ é uma métrica sobre G.

8. Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função estritamente crescente; definindo $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ por $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$, mostre que d é uma métrica sobre $\mathbb{R}$.

9. Seja $M = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ um conjunto enumerável, tal que $i \neq j \Longrightarrow a_i \neq a_j$. Prove que $d: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definida por

$$d(a_i, a_i) = 0, \ \forall\, i \in \mathbb{N}$$

$d(a_i, a_j) = \dfrac{1}{i+1} + \dfrac{1}{j+1}$, sempre que $i \neq j$, é uma métrica sobre M.

10. Prove que uma métrica sobre um espaço vetorial normado E provém de uma norma se, e somente se, para quaisquer $u, v, a \in E$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$: (a) $d(u + a, v + a) = d(u, v)$; (b) $d(\alpha u, \alpha v) = |\alpha|\, d(u, v)$.

11. Considere no conjunto $X = \{x, y, z, t\}$ a métrica do Exercício 4. Se $A = \{x, y\}$ e $B = \{z, t\}$ ache: (a) $d(t, A)$; (b) $d(y, B)$; (c) $d(y, A)$; (d) $d(A, B)$; (e) $d(A)$; (f) $d(B)$.

12. Em $\mathbb{R}$ considere a métrica usual. Prove que valem as igualdades: (a) $d(p, \mathbb{Q}) = 0$, $\forall\, p \in \mathbb{R}$; (b) $d(\mathbb{Q}, \mathbb{R} - \mathbb{Q}) = 0$. Se a métrica considerada sobre $\mathbb{R}$ fosse a zero-um quanto valeriam $d(p, \mathbb{Q})$, com $p \in \mathbb{R}$, e $d(\mathbb{Q}, \mathbb{R} - \mathbb{Q})$?

13. Seja A um subconjunto não vazio de um espaço métrico. Mostre que: $d(A) = 0 \Longleftrightarrow$ A é unitário.

14. Considere em $\mathbb{R}$ a métrica usual. Justifique as seguintes desigualdades:

$$0 \leqslant d(a, \mathbb{Z}) \leqslant \frac{1}{2}, \ \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

15. Considere sobre $\mathbb{R}$ a métrica definida por $\gamma(x, y) = \dfrac{|x - y|}{1 + |x - y|}$ (ver Exercício 1). Mostre que em relação a essa métrica o diâmetro de $\mathbb{R}$ é igual a 1.

16. Qual o diâmetro de $\mathbb{R}$ em relação às seguintes métricas (a) usual; (b) $\alpha(x, y) = \min\{1, |x - y|\}$; (c) $\beta(x, y) = \sqrt{|x - y|}$?

17. Sejam A e B subconjuntos limitados de um espaço métrico M. Mostre que $A \cup B$ também é limitado e que $d(A \cup B) \leqslant d(A, B) + d(A) + d(B)$.

18. Seja M um espaço métrico e considere sobre $M \times M$ uma qualquer das métricas usuais. Se p é um ponto de $M \times M$ tal que $p \notin \Delta = \{(x, x) \mid x \in M\}$, prove que $d(p, \Delta) > 0$.

19. Considere sobre $\mathbb{R}^n$ a métrica euclidiana. Sendo $A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ e sendo $p = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, mostre que $d(p, A) = |a_n|$.

20. Considere sobre $X = \{x, y, z, t\}$ a métrica do Exercício 4. Ache: (a) $B(x, 3)$; (b) $B\left(y, \frac{1}{2}\right)$; (c) $B(x, 1)$; (d) $B\left(t, \frac{3}{2}\right)$.

21. Sobre o conjunto $A = \{0\} \cup [1, 2[$ considere a métrica usual induzida. Ache as seguintes bolas abertas (a) $B\left(0, \frac{1}{2}\right)$; (b) $B\left(0, \frac{3}{2}\right)$; (c) $B(0, 3)$; (d) $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$; (e) $B(1, 2)$.

22. Considere sobre $\mathbb{R}$ a métrica definida por $\alpha(x, y) = \min\{1, |x - y|\}$. Ache as bolas abertas $B\left(0, \frac{1}{2}\right)$ e $B(0, 3)$. Faça o mesmo considerando a métrica $\beta(x, y) = \sqrt{|x - y|}$.

23. Considere sobre $\mathbb{R}$ a métrica definida por $\gamma(x, y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$. Prove que: (a) se $\varepsilon \geqslant 1$, então $B(p, \varepsilon) = \mathbb{R}$; (b) se $\varepsilon < 1$, então $B(p, \varepsilon) = \left]p - \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}, p + \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right[$

24. Considere sobre $\mathbb{R}^2$ as métricas $D_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$, $\forall\, x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\gamma(x, y) = \dfrac{D_1(x, y)}{1 + D_1(x, y)}$. Mostre que $B_{D_1}((3, 1); 3) \neq B_\gamma((3, 1); 3)$.

25. Seja p um ponto de um espaço métrico M. Prove que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B\left(p, \dfrac{1}{n}\right) = \{p\}$.

26. Seja $B = B(p, \delta)$ uma bola aberta num espaço métrico M. Se A é um subconjunto não vazio de M cujo diâmetro é menor que ε e $A \cap B(p, \varepsilon) \neq \emptyset$, mostre que $A \subset B(p, 2\varepsilon)$.

27. Seja $F = B^c$, onde $B = B(p, \varepsilon)$ é uma bola aberta num espaço M. Prove que: se $d(x, F) = 0$, então $x \in F$.

28. Seja (M, d) um espaço métrico. Dado $p \in M$ e $\varepsilon > 0$ a *bola fechada* de centro p e raio ε é definida por $B[p, \varepsilon] = \{x \in M \mid d(x, p) \leqslant \varepsilon\}$. Sendo $F = (B[p, \varepsilon])^c$, mostre que para todo $x \in F$ existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset F$.

29. Mostre que a métrica γ sobre $\mathbb{R}$ definida por $\gamma(x, y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$ é equivalente à métrica usual.
Sugestão: Levar em conta Exercício 23.

30. Sendo d a métrica usual em $\mathbb{R}$ mostre que não existem constantes $r, s > 0$ de maneira que

$$r\, d(x, y) \leqslant \gamma(x, y) \leqslant s\, d(x, y)$$

$\forall\, x, y \in \mathbb{R}$. Obs.: γ é a métrica do exercício anterior.

31. Seja d uma métrica sobre M. Sendo α a métrica em M definida por $\alpha(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$, mostre que: (a) para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \varepsilon \leqslant 1$, $B_d(p, \varepsilon) = B_\alpha(p, \varepsilon)$; (b) d e α são equivalentes.

32. Mostre que não são equivalentes a métrica zero-um e a usual em $\mathbb{R}$.

33. Sejam d_1 e d_2 métricas equivalentes sobre um conjunto M. Mostre que $d(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y)$ define uma métrica sobre M e que esta é equivalente a d_1 e a d_2.

34. Se d_1 e d_2 são métricas equivalentes sobre M mostre que $d(x, y) = \max\{d_1(x, y); d_2(x, y)\}$ define uma métrica sobre M e que esta é equivalente a d_1 e d_2.

35. Mostre que uma progressão aritmética $(x_1, x_2, \ldots)$ em $\mathbb{R}$ converge se, e somente se, $x_1 = x_2 = \ldots$

36. Seja $(x_1, x_2, \ldots)$ uma seqüência em M. Se $(x_2, x_4, x_6, \ldots) \longrightarrow p$ e $(x_1, x_3, x_5, \ldots) \longrightarrow p$, mostre que $(x_1, x_2, x_3, \ldots) \longrightarrow p$.

37. Seja (x_n) uma seqüência em M. Se (x_{2n}), (x_{3n+1}) e (x_{2n+1}) são subseqüências convergentes em M, mostre que (x_n) também converge em M.

38. Seja M um espaço métrico. Se uma seqüência (x_n) de pontos de M converge em M, mostre que a seqüência real $(d(x_1, p); d(x_2, p); \ldots)$ converge para 0.

39. Se $\lim x_n = p$ e $\lim y_n = q$ num espaço métrico M, mostre que em $\mathbb{R}$ vale a igualdade.

$$\lim d(x_n, y_n) = d(p, q)$$

40. Mostre que $d'(x, y) = \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right|$ define uma métrica sobre $]0, +\infty[$ e que esta métrica é equivalente à usual induzida sobre este intervalo.
Sugestão: Por absurdo: se d e d' não fossem equivalentes existiria $p \in\,]0, +\infty[$ e existiria $\varepsilon > 0$ de maneira que, por exemplo, $B_d\left(p, \dfrac{1}{n}\right) \not\subset B_{d'}(p, \varepsilon)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Tirar daí uma seqüência (x_n) que converge para p, segundo d, mas que não converge para esse ponto segundo d'.

41. Um espaço métrico (M, d) cujos pontos são todos isolados chama-se *espaço discreto.* (a) Mostre que $A = \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \ldots\right\}$ com a métrica induzida pela usual de $\mathbb{R}$ é discreto. (b) Mostre que a métrica de um espaço discreto é equivalente à zero-um.

42. Mostre que $u \longmapsto \|u\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, $u \longmapsto \|u\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$ e $u \longmapsto \|u\|_2 = \max.\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$, $\forall\, u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, são normas equivalentes sobre $\mathbb{R}^n$ e que induzem, pela ordem, as métricas usuais D, D_1 e D_2 deste espaço.