Universidade Federal da Paraíba - UFPB
Centro de Ciências Exatas e da Natureza - CCEN
Departamento de Matemática - DM

1^a Lista de Exercícios de Cálculo II

Professor: Fágner Dias Araruna

1. Calcule as integrais a seguir interpretando cada uma em termos de áreas.

   $(a)\ \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \quad (b)\ \int_0^1 (x-1)\,dx \quad (c)\ \int_1^3 (1+2x)\,dx \quad (d)\ \int_{-3}^0 \left(1+\sqrt{9-x^2}\right)dx$

   $(e)\ \int_{-2}^2 (1-|x|)\,dx \quad (f)\ \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}dx \quad (g)\ \int_0^3 |3x-5|\,dx$

2. Dado que $\int_4^9 \sqrt{x}dx = \frac{38}{3}$, quanto é $\int_4^9 \sqrt{t}dt$?

3. Calcule $\int_1^1 x^2 \cos x dx$.

4. Se $\int_2^8 f(x)\,dx = 1,7$ e $\int_5^8 f(x)\,dx = 2,5$, ache $\int_2^5 f(x)\,dx$.

5. Se $\int_0^1 f(x)\,dx = 2$, $\int_0^4 f(x)\,dx = -6$ e $\int_3^4 f(t)\,dt = 1$, ache $\int_1^3 5f(x)\,dx$.

6. Calcule:

   $(a)\ \int_{-2}^3 f(x)\,dx$, onde $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x \geq 0 \\ x^2, & \text{se } x < 0 \end{cases}$ $\quad (b)\ \int_{-1}^1 |x|\,dx$

   $(c)\ \int_0^6 f(x)\,dx$, onde $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x < 2 \\ 3x-2, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$ $\quad (d)\ \int_{-1}^1 |e^x - 1|\,dx$

   $(e)\ \int_0^4 f(x)\,dx$, onde $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^2}, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

7. Estime o valor das seguintes integrais:

   $(a)\ \int_1^2 \frac{1}{x}dx \quad (b)\ \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^2}dx \quad (c)\ \int_{-3}^0 (x^2+2x)\,dx \quad (d)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx$

   $(e)\ \int_0^2 xe^{-x}dx \quad (f)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} sen^2 x dx \quad (g)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} x sen x dx$

8. Se f for contínua em $[a, b]$, mostre que

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

9. Calcule a derivada das seguintes funções:

(a) $g(x) = \int_1^x \ln t dt$ $\quad (b)$ $g(u) = \int_{-1}^u \frac{1}{x+x^2}dx$ $\quad (c)$ $f(x) = \int_x^2 \cos(t^2)\,dx$

(d) $h(x) = \int_2^{\frac{1}{x}} arctgxdx$ $\quad (e)$ $h(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{1+r^3}dr$ $\quad (f)$ $y = \int_3^{\sqrt{x}} \frac{\cos t}{t}dt$

(g) $f(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{u^2-1}{u^2+1}du$ $\quad (h)$ $g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^3} \sqrt{t}sentdt$ $\quad (i)$ $y = \int_{\cos x}^{5x} \cos(u^2)\,du$

10. Se $F(x) = \int_1^x f(x)\,dx$, onde $f(t) = \int_1^{t^2} \frac{\sqrt{1+u^4}}{u}du$, determine $F''(2)$.

11. Ache o intervalo em que a curva $y = \int_0^x \frac{1}{1+t+t^2}dt$ é cônvava para cima.

12. Se um objeto move-se ao longo de uma reta com função posição $s(t)$, então sua velocidade é $v(t) = s'(t)$. Se quisermos calcular a distância percorrida durante o intervalo de tempo, teremos de considerar os intervalos quando $v(t) \geq 0$ (a partícula move-se para a direita) e também os intervalos quando $v(t) \leq 0$ (a partícula move-se para a esquerda). Em ambos os casos a distância é computada integrando-se $|v(t)|$. A aceleração do objeto é $a(t) = v(t)$.
Uma partícula move-se ao longo de uma reta de tal forma que sua aceleração no instante t é $a(t) = 2t - 1\ m/s^2$.

(a) Ache a velocidade da partícula no instante t sabendo-se que $v(0) = -6m/s$.

(b) Ache o deslocamento da partícula durante o período de tempo $1 \leq t \leq 4$.

(c) Ache a distância percorrida durante esse período de tempo.

13. Suponha f contínua em $\mathbf{R}$.

(a) Se $\int_0^4 f(x)\,dx = 10$, ache $\int_0^2 f(2x)\,dx$.

(b) Se $\int_0^9 f(x)\,dx = 4$, ache $\int_0^3 xf(x^2)\,dx$.

14. Prove que $\int_a^b f(-x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$.

15. Prove que $\int_a^b f(x+c)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx$.

16. Se a e b forem números positivos, mostre que $\int_0^1 x^a(1-x)^b\,dx = \int_0^1 x^b(1-x)^a\,dx$.

17. Use a substituição $u = \pi - x$ para mostrar que $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(senx)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(senx)\,dx.$

18. Use o exercício anterior para calcular a integral $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{xsenx}{1+\cos^2 x}dx.$

19. Prove que $\displaystyle\int sen^n x dx = -\frac{1}{n}\cos x sen^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int sen^{n-2}x dx.$

20. Use o exercício anterior para provar que

    (a) $\displaystyle\int sen^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{sen2x}{4} + C$

    (b) Calcule $\displaystyle\int sen^4 x dx$

    (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^n x dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{n-2}x dx.$

21. (a) Prove a fórmula de redução $\displaystyle\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x senx + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx$

    (b) Use a parte (a) para avaliar $\displaystyle\int \cos^2 x dx$

    (c) Use as partes (a) e (b) para avaliar $\displaystyle\int \cos^4 x dx$

22. Prove que

    (a) $\displaystyle\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1} dx$

    (b) $\displaystyle\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x dx$

23. Para m e n inteiros positivos, prove

    (a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} sen(mx)\cos(nx)\,dx = 0$

    (b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} sen(mx)\,sen(nx)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ \pi, & \text{se } m = n \end{cases}$

    (c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ \pi, & \text{se } m = n \end{cases}$

24. Suponha que f é contínua em $[-a, a]$. Prove que

    (a) Se f for par $[f(-x) = f(x)]$, então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx$

    (b) Se f for ímpar $[f(-x) = -f(x)]$, então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

25. Calcule as integrais

(1) $\int x^3\left(1-x^4\right)^5 dx$ (2) $\int \sqrt{x-1}dx$ (3) $\int \frac{1+4x}{\sqrt{1+x+2x^2}}dx$ (4) $\int \frac{2}{(1-2y)^{1,3}}dx$

(5) $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$ (6) $\int \sec^2 3\theta d\theta$ (7) $\int \frac{sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ (8) $\int \sec x \tan x\sqrt{1+\sec x}dx$

(9) $\int \cos^4 x senx dx$ (10) $\int \frac{dx}{x\ln x}$ (11) $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^9}{\sqrt{x}}dx$ (12) $\int \frac{\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x^2}dx$

(13) $\int \sqrt[3]{x^3+1}x^5 dx$ (14) $\int \sec^3 x\tan x dx$ (15) $\int \cos x\cos\left(senx\right)dx$

(16) $\int \frac{x}{\sqrt[4]{x+2}}dx$ (17) $\int \frac{xdx}{1+x^4}$ (18) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}dx$ (19) $\int_0^{\pi} x\cos\left(x^2\right)dx$

(20) $\int_1^4 \frac{1}{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}dx$ (21) $\int_0^1 xe^{-x^2}dx$ (22) $\int_e^{e^4}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

(23) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\ln\left(\cos x\right)dx$ (24) $\int_0^{2\pi}\left|senx\right|dx$ (25) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{\left(e^x+1\right)\ln\left(e^x+1\right)}$

(26) $\int \frac{1+x}{1+x^2}dx$ (27) $\int_0^8 \left|x^2-6x+8\right|dx$ (28) $\int_0^1 \cos\pi t dt$