

**3ª Lista de Exercícios de Cálculo Avançado**

Professor: Fágner Dias Araruna

1. Mostre que toda cobertura aberta  $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} U_\lambda$  de um conjunto arbitrário  $X \subset \mathbf{R}^n$  admite uma subcobertura enumerável  $X \subset \bigcup_{i \in \mathbf{N}} U_{\lambda_i}$ .
2. Seja  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$  uma aplicação de classe  $C^1$  no aberto  $U \subset \mathbf{R}^n$ . Se  $X \subset U$  tem medida nula, mostre que  $f(X)$  também tem medida nula.
3. Mostre que conjuntos não limitados não podem ter conteúdo nulo.
4. Mostre que a fronteira de um conjunto de conteúdo nulo tem conteúdo nulo.
5. Dê exemplo de:
  - (a) Um conjunto fechado de medida nula cujo conteúdo não seja nulo.
  - (b) Um conjunto limitado de medida nula cuja fronteira não tem medida nula.
6. Do livro [2], faça os exercícios (1.1) – (1.5), (2.1), (3.7), (3.8), (3.13), (3.14) das páginas 390-393.
7. Demonstre o Teorema 8 (pag. 156) do livro [1].
8. Das páginas 166 e 167 do livro [1], faça todos os exercícios.

9. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (1)$$

**Nota:** "Para um matemático, o fato (1) deve ser tão óbvio como é, para o comum dos mortais que o dobro de dois é quatro. Liouville, esse foi mesmo um matemático". Lord Kelvin.

[1] LIMA, Elon L., Análise Real, vol. 2, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2004.

[2] LIMA, Elon L., Curso de Análise, vol. 2, 4a ed., Projeto Euclides, IMPA, 1981.