

**2ª Lista de Exercícios de Cálculo Avançado**

Professor: Fágner Dias Araruna

1. Uma **forma quadrática**  $H : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  é uma função cujo valor num vetor  $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  é  $\sum_{i,l=1}^n h_{ij} \alpha_i \alpha_j$ , onde  $[h_{ij}]$  é uma matriz simétrica  $n \times n$ . O valor de  $H$  em  $v$  será indicado por  $H \cdot v^2$ , ou seja,

$$H \cdot v^2 = \sum_{i,l=1}^n h_{ij} \alpha_i \alpha_j.$$

A forma quadrática  $H$  chama-se **não-negativa (não-positiva)** quando  $H \cdot v^2 \geq 0$  ( $H \cdot v^2 \leq 0$ ), para todo  $v \in \mathbf{R}^n$ , **positiva (negativa)** quando  $H \cdot v^2 > 0$  ( $H \cdot v^2 < 0$ ), para todo  $v \in \mathbf{R}^n - \{0\}$  e indefinida quando existem  $v, w \in \mathbf{R}^n$  tais que  $H \cdot v^2 > 0$  e  $H \cdot w^2 < 0$ . Dados  $A \subset \mathbf{R}^n$  um aberto e  $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{R}$  uma função de classe  $C^2$ , a **forma quadrática hessiana**  $H(x) = (Hf)(x)$  de  $f$  no ponto  $x \in A$  é aquela cuja matriz é  $[h_{ij}] = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x) \right]$ . Seja  $a \in A$  um ponto crítico de  $f$ . Mostre que:

- (a) Se a forma quadrática hessiana  $H(a)$  for positiva, então  $a$  é um ponto de mínimo local de  $f$ .
  - (b) Se  $H(a)$  for negativa, então  $a$  é um ponto de máximo local de  $f$ .
  - (c) Se  $H(a)$  for indefinida, então  $a$  não é ponto de máximo nem de mínimo local de  $f$ .
2. Seja  $C \subset \mathbf{R}^n$  um conjunto convexo. Uma função  $f : C \rightarrow \mathbf{R}$  chama-se **convexa** quando, para quaisquer  $x, y \in C$  e  $t \in [0, 1]$ , tem-se

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Mostre que:

- (a) A função  $f : C \rightarrow \mathbf{R}$  é convexa se, e somente se, sua restrição a qualquer segmento de reta  $[a, b] \subset C$  é convexa.
- (b) Se  $f \in C^1$ , então  $f$  é convexa se, e somente se, para quaisquer  $a, a+h \in A$  tem-se

$$f(a+h) \geq f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle.$$

(c) Se  $f \in C^2$ , então  $f$  é convexa se, e somente se, sua forma quadrática hessiana é não-negativa em todos os pontos de  $A$ .

(d) A função  $f$  é convexa se, e somente se, o conjunto  $E = \{(x, \alpha) \in A \times \mathbf{R}; f(x) \leq \alpha\}$ , chamado **epígrafo de  $f$** , é convexo.

3. Seja  $A \subset \mathbf{R}^n$  um conjunto aberto convexo. Mostre que toda função convexa  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$  é contínua.
4. Seja  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  uma função tal que  $|f(x)| \leq \|x\|^2$ . Mostre que  $f$  é diferenciável na origem.
5. Do livro [3], faça os exercícios (2.4)–(2.8) das páginas 20-21, (2.12)–(2.16) das páginas 26-28, (2.20), (2.22), (2.24) da página 33 e (2.29)–(2.35) das páginas 38-39.
6. Do livro [2], faça os exercícios (1.2), (1.4), (1.8), (2.1), (3.1), (3.13), (4.5), (4.12), (9.1), (9.2), (9.6) das páginas 176-187, (1.1), (1.2), (1.11), (3.1), (5.4), (5.8) das páginas 335-346.
7. Das páginas 80-83, 109-110, 122-123 do livro [1], faça todos os exercícios. Ainda do livro [1] faça os exercícios (1.1)–(1.5) e (3.1)–(3.5) das páginas 96-97.

8. Usando o Método dos Multiplicadores de Lagrange, mostre as seguintes desigualdades:  
(a) (Desigualdade de Hölder): Sejam  $p$  e  $q$  tais que  $1 < p, q < +\infty$  e  $(1/p) + (1/q) = 1$ . Então, para todo  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ , vale a desigualdade

$$|\langle x, y \rangle| \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q}.$$

- (b) (Desigualdade de Young): Sejam  $p$  e  $q$  tais que  $1 < p, q < +\infty$  e  $(1/p) + (1/q) = 1$ . Então, para todo  $x, y \in \mathbf{R}$ , vale a desigualdade

$$|xy| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}.$$

9. Calcular o valor máximo da função  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  dada por  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 x_2 \dots x_n)^2$  sob a restrição  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ . Utilize o resultado para calcular a seguinte desigualdade, válida para números reais positivos  $a_1, \dots, a_n$ :

$$(a_1 \dots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

[1] LIMA, Elon L., Análise Real, vol. 2, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2004.

[2] LIMA, Elon L., Curso de Análise, vol. 2, 4a ed., Projeto Euclides, IMPA, 1981.

[3] SPIVAK, M., Calculus on Manifolds, Addison-Wesley, 1965.