Universidade Federal da Paraíba - UFPB
Centro de Ciências Exatas e da Natureza - CCEN
Departamento de Matemática - DM
Pós-Graduação em Matemática - PGmat

2^a Lista de Exercícios de Análise no $\mathbf{R}^n$

Professor: Fágner Dias Araruna

1. Uma **forma quadrática** $H : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ é uma função cujo valor num vetor $v = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ é $\sum\limits_{i,l=1}^{n} h_{ij}\alpha_i\alpha_j$, onde $[h_{ij}]$ é uma matriz simétrica $n \times n$. O valor de H em $v$será indicado por $H \cdot v^2$, ou seja,

$$H \cdot v^2 = \sum_{i,l=1}^{n} h_{ij}\alpha_i\alpha_j.$$

A forma quadrática H chama-se **não-negativa (não-positiva)** quando $H \cdot v^2 \geq 0$ $(H \cdot v^2 \leq 0)$, para todo $v \in \mathbf{R}^n$, **positiva (negativa)** quando $H \cdot v^2 > 0$ $(H \cdot v^2 < 0)$, para todo $v \in \mathbf{R}^n - \{0\}$ e indefinida quando existem $v, w \in \mathbf{R}^n$ tais que $H \cdot v^2 > 0$ e $H \cdot w^2 < 0$. Dados $A \subset \mathbf{R}^n$ um aberto e $f : \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ uma função de classe C^2, a **forma quadrática hessiana** $H(x) = (Hf)(x)$ de f no ponto $x \in A$ é aquela cuja matriz é $[h_{ij}] = \left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right]$. Seja $a \in A$ um ponto crítico de f. Mostre que:

(a) Se a forma quadrática hessiana $H(a)$ for positiva, então a é um ponto de mínimo local de f.

(b) Se $H(a)$ for negativa, então a é um ponto de máximo local de f.

(c) Se $H(a)$ dor indefinida, então a não é ponto de máximo nem de mínimo local de f.

2. Seja $C \subset \mathbf{R}^n$ um conjunto convexo. Uma função $f : C \to \mathbf{R}$ chama-se **convexa** quando, para quaisquer $x, y \in C$ e $t \in [0, 1]$, tem-se

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Mostre que:

(a) A função $f : C \to \mathbf{R}$ é convexa se, e somente se, sua restrição a qualquer segmento de reta $[a, b] \subset C$ é convexa.

(b) Se $f \in C^1$, então f é convexa se, e somente se, para quaiquer $a, a+h \in A$ tem-se

$$f(a+h) \geq f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle.$$

(c) Se $f \in C^2$, então f é convexa se, e somente se, sua forma quadrática hessiana é não-negativa em todos os pontos de A.

(d) A função f é convexa se, e somente se, o conjunto $E = \{(x, \alpha) \in A \times \mathbf{R};\ f(x) \leq \alpha\}$, chamado **epígrafo de** f, é convexo.

3. Seja $A \subset \mathbf{R}^n$ um conjunto aberto convexo. Mostre que toda função convexa $f : A \to \mathbf{R}$ é contínua.

4. Seja $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ uma função tal que $|f(x)| \leq \|x\|^2$. Mostre que f é diferenciável na origem.

5. Do livro [3], faça os exercícios $(2.4)-(2.8)$ das páginas 20-21, $(2.12)-(2.16)$ das páginas 26-28, (2.20), (2.22), (2.24) da página 33 e $(2.29)-(2.35)$ das páginas 38-39.

6. Do livro [2], faça os exercícios (1.2), (1.4), (1.8), (2.1), (3.1), (3.13), (4.5), (4.12), (9.1), (9.2), (9.6) das páginas 176-187, (1.1), (1.2), (1.11), (3.1), (5.4), (5.8) das páginas 335-346.

7. Das páginas 80-83, 109-110, 122-123 do livro [1], faça todos os exercícios. Ainda do livro [1] faça os exercícios $(1.1)-(1.5)$ e $(3.1)-(3.5)$ das páginas 96-97.

8. Usando o Método dos Multiplicadores de Lagrange, mostre as seguintes desigualdades:

   (a) (Desigualdade de Hölder): Sejam p e q tais que $1 < p, q < +\infty$ e $(1/p) + (1/q) = 1$. Então, para todo $x = (x_1, ...x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbf{R}^n$, vale a desigualdade

$$|\langle x, y\rangle| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}.$$

   (b) (Desigualdade de Young): Sejam p e q tais que $1 < p, q < +\infty$ e $(1/p) + (1/q) = 1$. Então, para todo $x, y \in \mathbf{R}$, vale a desigualdade

$$|xy| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}.$$

9. Calcular o valor máximo da função $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ dada por $f(x_1, x_2, ...x_n) = (x_1 x_2 ... x_n)^2$ sob a restrição $x_1^2 + x_2^2 + ... x_n^2 = 1$. Utilize o resultado para calcular a seguinte desigualdade, válida para números reais positivos $a_1, ..., a_n$:

$$(a_1 ... a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + ... + a_n}{n}.$$

[1] LIMA, Elon L., Análise Real, vol. 2, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2004.

[2] LIMA, Elon L., Curso de Análise, vol. 2, 4a ed., Projeto Euclides, IMPA, 1981.

[3] SPIVAK, M., Calculus on Manifolds, Addison-Wesley, 1965.