Universidade Federal da Paraíba - UFPB
Centro de Ciências Exatas e da Natureza - CCEN
Departamento de Matemática - DM
Pós-Graduação em Matemática - PGmat

1^a Lista de Exercícios de Análise no $\mathbf{R}^n$

Professor: Fágner Dias Araruna

1. Das páginas 66-79 do livro [2], faça os exercícios (1.4), (2.1), (2.2), (2.3), (2.5), (2.7), (2.9), (2.11), (2.12), (2.14), (2.15), (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), (4.6), (4.7), (5.1), (5.2), (5.4), (5.5), (7.1), (7.2), (7.3), (7.6), (7.7), (7.8), (7.12), (8.2), (9.1), (9.5), (10.3), (10.4), (10.8), (11.3), (11.4), (11.6), (11.7), (12.12), (12.13), (14.5), (14.10), (14.11), (14.12), (14.14), (14.18).

2. Das páginas 36-40 do livro [1], faça todos os exercícios.

3. Mostre que o limite de uma sequência do $\mathbf{R}^n$ convergente é único.

4. Dados $X \subset \mathbf{R}^n$ e $a \in \mathbf{R}^n$, mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

   (a) $a \in X'$;

   (b) Existe uma sequência de pontos $x_k \in X$, com $(x_k) \to a$ e $x_k \neq a$, $\forall k \in \mathbf{N}$;

   (c) Toda bola aberta de centro a contém uma infinidade de pontos de X.

5. Se $X \subset \mathbf{R}^n$ é infinito e limitado, mostre que $X' \neq \emptyset$.

6. Mostre que o fecho de todo conjunto é um conjunto fechado

7. Diz-se que um ponto $a \in X \subset \mathbf{R}^n$ é um **ponto de fronteira** quando toda bola centrada em a contém pontos de X e de $\mathbf{R}^n - X$. Ao conjunto de todos os pontos de fronteira denota-se por ∂X. Mostre que:

   (a) Um conjunto A é aberto se, e somente se, $A \cap \partial A = \emptyset$.

   (b) Para todo conjunto $X \subset \mathbf{R}^n$, mostre que $\overline{X} = X \cup \partial X$.

8. Mostre que todo conjunto $X \subset \mathbf{R}^n$ contém um subconjunto enumerável e denso em X. Neste caso dizemos que X é **separável.**

9. Mostre que $K \subset \mathbf{R}^n$ é compacto se, e somente se, toda sequência de K possui subsequência que converge para um ponto de K.

10. Mostre que para todo conjunto limitado não-vazio $T \subset \mathbf{R}^n$, tem-se $diam\left(\overline{T}\right) = diam\,(T)$.

11. Sejam $S, T \subset \mathbf{R}^n$ conjuntos não-vazios. Define-se a distância de S a T como sendo

$$d\,(S,T) = \inf\left\{|x-y|\,;\; x \in S,\; y \in T\right\}.$$

Mostre que:

(a) $d\,(S,T) = d\left(\overline{S},\overline{T}\right)$

(b) Se $K \subset \mathbf{R}^n$ é compacto e $F \subset \mathbf{R}^n$ é fechado, então existem $x_0 \in K$ e $y_0 \in F$ tais que $d\,(F,K) = |x_0 - y_0|$.

[1] LIMA, Elon L., Análise Real, vol. 2, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2004.

[2] LIMA, Elon L., Curso de Análise, vol. 2, 4^a ed., Projeto Euclides, IMPA, 1981.