UFPE - CCEN - Departamento de Matemática

Programa de Verão - 2006

Análise na Reta - Prof. MPMatos

5. Integral de Riemann

5.1 Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Usando a definição mostre que $\int_a^b \lambda dx = \lambda (b - a)$.

5.2 Mostre que toda função monótona $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável.

5.3 Mostre que os seguintes conjuntos têm medida de Lebesgue nula.

(a) um conjunto finito $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$;

(b) um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ infinito enumerável de números reais.

5.4 Seja $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$, se $x \neq 1$, e $f(1) = 0$. Mostre que f é integrável em $[0, 2]$ e calcule sua integral.

5.5 Defina a função $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por $g(x) = 0$ para $0 \leq x \leq 1/2$ e $g(x) = 1$ para $1/2 < x \leq 1$. Mostre que g é integrável e que $\int_0^1 g = 1/2$. Mudando o valor de g no ponto $1/2$ para 5, ela continua integrável?

5.6 Mostre que a função $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = 0$ para x irracional e $h(x) = x$ para x racional não é integrável em $[0, 1]$.

5.7 Considere a função real $f(x) = x^3$, $0 \leq x \leq 1$, e a partição $P_n = \{0, 1/n, 2/n, \cdots, (n-1)/n, 1\}$ do intervalo $[0, 1]$. Usando a fórmula

$$1^3 + 2^3 + \cdots + m^3 = \left[\frac{1}{2} m (m + 1)\right]^2,$$

que pode ser facilmente comprovada por indução, calcule $S(f; P_n)$ e $s(f, P_n)$. Mostre que $\int_0^1 x^3 dx = 1/4$.

5.8 Considere uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$, exceto em uma quantidade finita de pontos do intervalo $[a, b]$. Mostre que f é integrável e que $\int_a^b f = 0$.

5.9 Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua com a seguinte propriedade: para toda função integrável $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, o produto fg é integrável e $\int_a^b fg = 0$. Prove que $f \equiv 0$ em $[a, b]$.

5.10 Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções limitadas. Mostre que:

$$\underline{\int_a^b} (f + g) \geq \underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g. \quad (1)$$

Dê um exemplo onde a desigualdade estrita em (1) ocorre. Estabeleça uma desigualdade análoga para a integral superior.

5.11 Mostre que a função $f(x) = \cos(\pi/x)$, para $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ é integrável em $[0, 1]$.

5.12 Suponha que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ seja uma função limitada e que para qualquer número $c \in (a, b)$ a restrição de f ao intervalo $[c, b]$ é integrável. Mostre que f é integrável em $[a, b]$ e que:

$$\int_a^b f = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f.$$

5.13 Use o exercício precedente e demonstre que toda função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ com apenas um número finito de descontinuidades é integrável em $[a, b]$.

5.14 Sejam f, g e h funções limitadas em $[a, b]$ com $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Se f e h são integráveis e $\int_a^b f = \int_a^b h$, mostre que g é integrável e que $\int_a^b g = \int_a^b f$.

5.15 Mostre que a função $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ é integrável em $[-1, 1]$, mas não possui primitiva em $[-1, 1]$. Se $H(x) = |x|$, então $H'(x) = \operatorname{sgn}(x)$, para $x \neq 0$, e

$$\int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(x)\, dx = H(1) - H(-1).$$

5.16 Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e defina $H(x) = \int_x^b f$. Encontre $H'(x)$.

5.17 Sejam $I = [a, b]$, $J = [c, d]$ e considere $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $v : J \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável com $v(J) \subseteq I$. Mostre que a função $G : J \to \mathbb{R}$ definida por:

$$G(x) = \int_a^{v(x)} f$$

é diferenciável em J e $G'(x) = (f \circ v)(x)\, v'(x)$ para todo $x \in J$.

5.18 Calcule a derivada da função F definida em $[0, 1]$ por $F(x) = \int_0^{x^2} \cos\left(t^2\right) dt$.

5.19 Mostre que:

$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_{1/x}^1 \frac{1}{1+t^2} dt$$

para qualquer $x > 0$. Interprete geometricamente.

5.20 Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é T-periódica, mostre que a função $x \mapsto \int_x^{x+T} f(t)\, dt$ é constante. Em particular:

$$\int_0^T f(t)\, dt = \int_x^{x+T} f(t)\, dt, \ \forall x.$$

5.21 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, ímpar e 2-periódica. Mostre que a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ é par, 2-periódica e $g(2n) = 0,\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

5.22 Determine o domínio, intervalos de monotonia e extremos locais das funções:

(a) $F(x) = \int_1^x \ln t dt$ (b) $G(x) = \int_x^0 \sqrt{1+t^4}dt$ (c) $H(x) = \int_0^{x^2} \exp\left(t^2\right) dt$

5.23 Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e não nula para qualquer x real e defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \int_1^{x^2} th(t)\,dt$. Mostre que f tem um extremo local em $x = 0$. Que condição deve satisfazer a função h de modo que f tenha um mínimo local no ponto $x = 0$.

5.24 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e monótona crescente. Se $g(x)$ é definida por $g(x) = \int_0^{\sin x} f(t)\,dt$, mostre que $g(x) \leq xf(x)$, para $x \geq 0$. Justifique que é possível aplicar o Teorema de Lagrange à função g em um intervalo conveniente.

5.25 Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, par, positiva e designe $f(x) = \int_0^x th(t)\,dt$.

(a) Determine o domínio de f.

(b) Determine o valor mínimo absoluto de f.

(c) Mostre que f é par.

(d) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f \circ f$ no ponto de abscissa $x = 0$.

(e) Se $x \geq 0$, mostre que $f(x) \leq x \int_0^x h(t)\,dt$.

(f) Mostre que para cada $x \in \mathbb{R}$ existe $\xi_x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{2}x^2 h(\xi_x)$.

(g) Mostre que para cada $x \in \mathbb{R}$ existe $\theta_x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{2}x\theta_x h(\theta_x)$.

5.26 Critério de Convergência.

(a) Mostre que a integral imprópria $\int_a^b (b-x)^{-\alpha}$ converge se, e somente se, $\alpha < 1$.

(b) Se f é integrável em cada intervalo $[a, t]$, $a < t < b$, b finito, e $f(x) \geq 0$ em $[a, b)$, seja $L(\alpha) = \lim_{x \to b^-} (b-x)^\alpha f(x)$. Se $L(\alpha) < \infty$, para algum $\alpha < 1$, então $\int_a^b f$ é convergente. Se existir algum $\alpha \geq 1$ tal que $L(\alpha) > 0$, mostre que $\int_a^b f$ é divergente.

5.27 Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções com derivadas primeiras integráveis em cada intervalo $[a, b]$, $a < b$, e tais que $f^2(t) + g^2(t) = 1,\ \forall t \in \mathbb{R}$, e $f(0) = 1$. Seja $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\theta(t) = \int_0^t \left[f(x)\,g'(x) - f'(x)\,g(x)\right] dx.$$

Mostre que $f(t) = \cos\theta(t)$ e $g(t) = \operatorname{sen}\theta(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Este resultado anterior pode ser interpretado como uma definição de ângulo. (comece derivando a função $t \mapsto [f(t) - \cos\theta(t)]^2 + [g(t) - \operatorname{sen}\theta(t)]^2$).

5.28 Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são tais que $f(x) = g(x)$, $\forall x$, exceto nos racionais de $[a,b]$, mostre que f é integrável se, e somente se, g é integrável.

5.29 Seja $f\,[a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \beta^2 - \alpha^2$, para todo $a < \alpha < \beta < b$, se, e somente se, $f(x) = 2x$.

5.30 Se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é contínua e $0 < \alpha < \beta < 1$, mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^n f(x)\,dx = 0$.

5.31 Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e derivável em $(0,1)$. Determine condições para que f satisfaça a: $\int_0^1 f(tx)\,dt = kf(x)$ para todo $x \in (0,1)$.

5.32 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{1+t^2}dt$. Mostre que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 1/2$.

5.33 A Função Gama. Defina $\Gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ por $\Gamma(n) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$.

(a) Mostre que a integral imprópria converge.

(b) Mostre que $\Gamma(1) = 1$.

(c) Integrando or partes, deduza que $\Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-2)$.

(d) Calcule $\int_0^\infty e^{-x}x^5dx$.

5.34 Seja f integrável em $[a,b]$ tal que $m \le f(x) \le M$, para todo $x \in [a,b]$. Mostre que:

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\,dx \le M.$$

5.35 Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são integráveis, mostre que $f \vee g$ e $f \wedge g$ são integráveis em $[a,b]$.

5.36 Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua e $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}$, I intervalo, são deriváveis, mostre que $\varphi : I \to [a,b]$ definida por:

$$\varphi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$$

é derivável em I e $\varphi'(x) = f(\beta(x))\,\beta'(x) - f(\alpha(x))\,\alpha'(x)$.

5.37 Se os coeficientes do polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ satisfazem à relação $\sum_{k=1}^n a_k^2 = 1$, mostre que $\int_0^1 |p(x)|\,dx \le \pi/2$.

5.38 Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Demonstre a *Desigualdade de Cauchy-Schwarz*:

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \le \left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right)^{1/2}.$$