4. Diferenciabilidade

4.1 Em cada caso use a definição para calcular $f'(x)$.

(a) $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ (b) $f(x) = 1/x$, $x \neq 0$ (c) $f(x) = 1/\sqrt{x}$, $x > 0$.

4.2 Mostre que a função $f(x) = x^{1/3}$, $x \in \mathbb{R}$, não é diferenciável em $x = 0$.

4.3 Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$, para x racional, e $f(x) = 0$ para x irracional. Mostre que f é diferenciável em $x = 0$ e encontre $f'(0)$.

4.4 Considere um número natural n e defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = x^n$, para $x \geq 0$, e $f(x) = 0$ para $x < 0$. Para que valores de n a função f' é contínua em $x = 0$? Para que valores de n a função f' é diferenciável em $x = 0$?

4.5 Se uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em c e $f(c) = 0$, mostre que a função $x \mapsto |f(x)|$ é diferenciável em c se, e somente se, $f'(c) = 0$.

4.6 Determine onde cada uma das seguintes funções de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável e encontre a derivada.

(a) $f(x) = |x| + |x+1|$ (b) $g(x) = x|x|$ (c) $h(x) = |\operatorname{sen} x|$.

4.7 Mostre que se uma *função par* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (f ser *par* significa que $f(x) = f(-x)$, $\forall x$) tem derivada em todo ponto, então a derivada f' é uma *função ímpar,* isto é, $f'(-x) = -f'(x)$.

4.8 Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 \operatorname{sen}\left(1/x^2\right)$ para $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ é diferenciável em todo ponto $x \in \mathbb{R}$ e que a derivada f' não é limitada no intervalo compacto $[-1, 1]$?

4.9 Admitindo que exista uma função $L : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $L'(x) = 1/x$, $x > 0$, calcule, onde existir, a derivada de cada uma das funções $f(x) = L(2x+3)$, $g(x) = \left(L\left(x^2\right)\right)^3$ e $h(x) = L(L(x))$.

4.10 Sejam $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall x \in X$. Suponha que em um ponto $a \in X \cap X'$ se tenha $f(a) = h(a)$ e $f'(a) = h'(a)$. Mostre que g é derivável em a e $g'(a) = f'(a)$.

4.11 Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e derivável em (a, b). Se k é um número real, mostre que existe c em (a, b) tal que $f'(c) = kf(c)$. (*sug.* aplique o Teorema de Rolle à função $g(x) = f(x)\exp(-kx)$)

4.12 Se uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $f(x+y) = f(x) + f, \; \forall x, y$, mostre que f é derivável se, e só se, o for em $x = 0$.

4.13 Um número a é uma *raiz dupla* do polinômio $p(x)$ quando $p(x) = (x-a)^2 q(x)$, para algum polinômio $q(x)$. Prove que a é raiz dupla de p se, e somente se, $p(a) = p'(a) = 0$.

4.14 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e suponha que $f(0) = 0$ e $|f'(x)| \leq |f(x)|, \; \forall x \in \mathbb{R}$. Mostre que $f \equiv 0$.

4.15 Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função derivável e suponha que $f(1) = 0$ e $f'(x) = 1/x, \; \forall x > 0$. Mostre que $f(xy) = f(x) + f(y), \; \forall x, y \in \mathbb{R}^+$. (*sug.* derive a função $x \mapsto f(xy)$)

4.16 O que se pode afirmar sobre uma função f de classe C^1 em (a, b) tal que $f'(x)$ é sempre racional?

4.17 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável na origem tal que $f(tx) = |t| f(x), \; \forall t, x \in \mathbb{R}$. Mostre que $f \equiv 0$.

4.18 Com respeito a uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:
(a) existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(tx) = t^k f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$;
(b) existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $kf(x) = f'(x)\, x, \; \forall x \in \mathbb{R}$.

4.19 Seja $r > 0$ um número racional e seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^r \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Determine os valores de r para os quais $f'(0)$ existe.

4.20 Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $x = c$, mostre que $f'(c) = \lim\limits_{n \to \infty} n\,[f(c + 1/n) - f(c)]$.

4.21 Dado que a função $f(x) = x^3 + 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, tem uma inversa f^{-1} em $\mathbb{R}$, encontre o valor de $\left(f^{-1}\right)'(y)$ nos pontos correspondentes a $x = 0, 1$, e -1.

4.22 Mostre que a função uniformemente contínua $f(x) = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$, é diferenciável em $(0, 1)$, mas a derivada não é limitada.

4.23 Sejam $a > b > 0$ e n um número natural. Mostre que $a^{1/n} - b^{1n} < (a-b)^{1/n}$ (*sugestão*: mostre que a função $f(x) = x^{1/n} - (x-1)^{1/n}$ é decrescente em $[1, +\infty)$ e calcule f em $x = 1$ e $x = a/b$).

4.24 Use o TVM para provar que $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

4.25 Usando o TVM e mais o fato que $D(\log x) = 1/x$, $x > 0$, mostre que:

$$\frac{x-1}{x} < \log x < x - 1, \text{ para } x > 1.$$

4.26 Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e suponha que f é derivável em (a, b). Se $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = A$, mostre que f é derivável à direita em $x = a$ e que $f'_+(a) = A$. (use o TVM e a definição de derivada)

4.27 Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^4 + x^4 \operatorname{sen}(1/x)$, para $x \neq 0$, e $f(0) = 0$ tem um valor mínimo em $x = 0$, mas sua derivada muda de sinal em qualquer vizinhança da origem.

4.28 Para a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 2x^2 \operatorname{sen}(1/x)$, para $x \neq 0$, e $f(0) = 0$ mostre que $f'(0) = 1$, mas sua derivada muda de sinal em qualquer vizinhança da origem. Conclua que f não é monotônica em vizinhança alguma da origem.

4.29 Seja I um intervalo da reta real e seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

(a) Se f' é positiva em I, mostre que f é estritamente crescente em I;

(b) Se $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$, mostre que f' não muda de sinal em I;

(c) Se f' é limitada em I, mostre que f é lipschitziana em I.

4.30 Mostre que uma função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$, $\forall x, y$, é constante.

4.31 Seja $f : I \to \mathbb{R}$ duas vêzes diferenciável no ponto c interior ao intervalo I. Mostre que:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) + f(c-h)}{2h} \tag{1}$$

$$f''(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) + f(c-h) - 2f(c)}{h^2}. \tag{2}$$

Dê exemplo para mostrar que o limite em (1) pode existir, sem que a função tenha derivada no ponto c.

4.32 Considere as constantes reais $C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n$ tais que:

$$C_0 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + \cdots + \frac{C_n}{n+1} = 0.$$

Mostre que a equação $C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_n x^n = 0$ possui ao menos uma raiz real no intervalo $[0, 1]$.

4.33 Considere uma função definida e derivável para $x > 0$ e suponha que $f'(x) \to 0$, quando $x \to +\infty$. Mostre que a função $g(x) = f(x+1) - f(x)$, $x > 0$, tem limite quando $x \to +\infty$.

4.34 A Regra de l'Hôpital. *J. Bernoulli* descobriu uma regra para o cálculo de limites de frações cujos numeradores e denominadores tendem para zero. A regra é conhecida atualmente como *Regra de l'Hôpital*, em homenagem ao marqês de St. Mesme, *Guillaume François Antoine de l'Hôpital* (1661-1704), um nobre francês que escreveu o primeiro texto introdutório de cálculo diferencial, em que a regra foi impressa pela primeira vez.

Forma Indeterminada $0/0$

Se as funções contínuas $f(x)$ e $g(x)$ são zero em $x = a$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

não pode ser calculado com a substituição $x = a$. A substituição gera a expressão $0/0$, sem significado algum. Recorde-se dos argumentos que utilizamos em sala de aula para calcular $\lim_{x \to 0} (\operatorname{sen} x)/x$, em que a substituição $x = 0$ produziu a forma indeterminada $0/0$. Por outro lado, fomos bem sucedidos com o limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

com o qual calculamos a derivada $f'(a)$ e que sempre resulta na forma $0/0$ com a substituição $x = a$. A Regra de l'Hôpital nos permite usar derivadas para calcular llimites que, abordados de outra forma, conduzem a formas indeterminadas.

Teorema (*Regra de l'Hôpital*) Suponha que $f(a) = g(a) = 0$, que f e g sejam deriváveis em um intervalo aberto contendo a e que $g'(x) \neq 0$ nesse intervalo exceto, possivelmente, em $x = a$. Então:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{3}$$

desde que exista o limite do lado direito de (3).

Atenção
Ao aplicar a Regra de l'Hôpital não caia na armadilha de usar a derivada de f/g. O quociente a ser usado é f'/g' e não $(f/g)'$.

Exemplo *Aplicando a Regra de l'Hôpital*
A expressão $\dfrac{1 - cosx}{x + x^2}$ com $x = 0$ produz a indeterminação $0/0$ e aplicando a regra (5.3), encontramos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cosx}{x + x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{senx}{1 + 2x} = \frac{0}{1} = 0$$

Formas indeterminadas $\infty/\infty,\ \infty \cdot 0,\ \infty - \infty$

Uma versão da Regra de l'Hôpital também se aplica a quocientes que produzem as formas indeterminadas $\infty/\infty,\ \infty \cdot 0,\ \infty - \infty$. Por exemplo, se $f(x)$ e $g(x)$ tendem ao infinito quando $x \to a$, então a fórmula (3) continua válida, desde que o limite do lado direito exista. Aqui, como também na forma indeterminada $0/0$, o *ponto* a onde investigamos o limite pode ser finito ou $\pm\infty$.

Exemplo Calcule

(a) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\sec x}{1+\operatorname{tg} x}$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}$

Solução

(a) Note que o numerador e o denominador são descontínuos em $x = \pi/2$, então investigaremos os limites laterais nesse ponto. Temos:

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\sec x}{1+\operatorname{tg} x} = \boxed{\tfrac{\infty}{\infty}} = (\text{l'Hôpital}) = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\sec x \operatorname{tg} x}{\sec^2 x} = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \operatorname{sen} x = 1.$$

O limite lateral à direita também é 1, e a forma indeterminada nesse caso é $\dfrac{-\infty}{-\infty}$. Logo, o limite é 1.

(b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} = \boxed{\tfrac{\infty}{\infty}} = (\text{l'Hôpital}) = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

Exemplo Trabalhando com as Formas Indeterminadas $\infty \cdot 0$ e $\infty - \infty$

Calcule

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} \right)$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x} \right)$

Solução

(a)

$$\lim_{x\to\infty} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) = \boxed{\infty \cdot 0} = (\text{fazer } t = 1/x) = \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{1}{t} \operatorname{sen} t \right) = 1.$$

(b) Se $x \to 0^+$, então $\operatorname{sen} x \to 0^+$ e, portanto, $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x} \to \infty - \infty$. De maneira similar, se $x \to 0^-$, então $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x} \to -\infty + \infty$. Nenhuma das duas formas revela o que acontece com o limite. A saída é combinarmos as frações:

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x}$$

e, então, aplicamos a Regra de l'Hôpital ao resultado:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} = \boxed{\tfrac{0}{0}} = (\text{l'Hôpital}) = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x + x \cos x} = \boxed{\tfrac{0}{0}} = (\text{l'Hôpital}) = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2\cos x - x \operatorname{sen} x} = \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

Formas Indeterminadas 1^∞, 0^0 e ∞^0

Os limites que produzem essas formas indeterminadas podem às vezes ser tratados utilizando-se logarítmos. De fato, da relação $f(x) = \exp[\ln f(x)]$ deduzimos que:

$$\lim_{x\to a} \ln[f(x)] = L \Longrightarrow \lim_{x\to a} \exp[\ln f(x)] = \exp\left[\lim_{x\to a} \ln f(x)\right] = e^L. \tag{4}$$

Em (4) o *ponto* a pode ser finito ou $\pm\infty$.

Exemplo Calcule

(a) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ (b) $\lim_{x\to 0^+} x^x$ (c) $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$

Solução

(a) Trata-se de uma indeterminação do tipo 1^∞, a qual será convertida em $0/0$ por aplicação do logarítimo. Considerando $f(x) = (1+1/x)^x$, temos:

$$\ln f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(1+1/x)}{1/x} \Longrightarrow f(x) = \exp\left[\frac{\ln(1+1/x)}{1/x}\right]$$

e, portanto:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty}\exp[\ln f(x)] = \exp\left[\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+1/x)}{1/x}\right] = \exp(\boxed{\tfrac{0}{0}}) = (\text{l'Hôpital}) = \\ &= \exp\left[\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+1/x}\right] = e^1 = e.\end{aligned}$$

(b) Trata-se de uma indeterminação do tipo 0^0 e procederemos como no ítem (a). Temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x^x &= \boxed{0^0} = \lim_{x\to 0^+}\exp[\ln x^x] = \exp\left[\lim_{x\to 0^+} x\ln x\right] = \exp\left[\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}\right] = \exp(\boxed{\tfrac{-\infty}{\infty}}) = \\ &= (\text{l'Hôpital}) = \exp\left[\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}\right] = \exp\left[\lim_{x\to 0^+}(-x)\right] = e^0 = 1.\end{aligned}$$

(c) Temos agora uma indeterminação do tipo ∞^0 e procederemos como no ítem (a). Temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x^{1/x} &= \boxed{\infty^0} = \lim_{x\to\infty}\exp\left[\ln x^{1/x}\right] = \exp\left[\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\right] = \exp(\boxed{\tfrac{\infty}{\infty}}) = \\ &= (\text{l'Hôpital}) = \exp\left[\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}\right] = \exp\left[\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right] = e^0 = 1.\end{aligned}$$

Escrevendo para aprender *Demonstrando a Regra de l'Hôpital*

Vamos demonstrar a Regra de l'Hôpital (3), no caso em que o limite é finito, isto é, quando a for um número real. A demonstração é na verdade uma aplicação do *Teorema do Valor Médio de Cauchy*, que é uma versão um pouquinho mais geral do Teorema do Valor Médio apresentado em sala de aula.

Teorema do Valor Médio de Cauchy

Suponha que as funções f e g sejam contínuas no intervalo fechado $[a,b]$ e deriváveis no intervalo aberto (a,b) e suponha, ainda, que $g'(x) \neq 0$ em qualquer x do intervalo (a,b). Então existe um número c em (a,b) tal que:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{5}$$

Prova do TVM de Cauchy

Daremos o roteiro e deixaremos os detalhes da demonstração para você preencher. Não deixe de fazê-lo.

(i) Aplique o Teorema de Rolle à função g em $[a,b]$ e deduza que $g(b) \neq g(a)$; essa condição é necessária em (5).

(ii) Aplique o Teorema de Rolle à função

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [g(x) - g(a)]$$

para deduzir que existe c em (a,b) tal que $F'(c) = 0$ e a partir dessa igualdade obtenha (5) $\square$

Prova da Regra de l'Hôpital

Comece revendo as condições exigidas na regra. Suponha que x esteja à direita de a e aplique o TVM de Cauchy ao intervalo $[a,x]$. Existe c entre a e x tal que:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{(lembre-se que } f(a) = g(a) = 0\text{).}$$

Logo,

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Conforme x tende para a, o número c também se aproxima de a, porque está entre x e a. Conseqüentemente, tomando o limite na última igualdade, com $x \to a^+$, obtemos:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

que estabelece a Regra de l'Hôpital. O caso em que x está à esquerda de a o TVM de Cauchy é aplicado ao intervalo $[x,a]$ e o limite obtido é o limite lateral à esquerda. $\square$

4.35 Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \left| \begin{array}{l} \exp\left(-1/x^2\right), \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0. \end{array} \right.$$

(a) Mostre por indução que $f^{(n)}(0) = 0$, $\forall n = 1, 2, 3, \ldots$;

(b) Qual a classe de diferenciabilidade de f? A função f é analítica em $x = 0$?

(c) Determine o resto infinitesimal de Taylor para f.

4.36 Seja f uma função duas vêzes diferenciável em $(0, +\infty)$ e sejam M_0, M_1 e M_2 os supremos de $|f(x)|$, $|f'(x)|$ e $|f''(x)|$, respectivamente, em $(0, +\infty)$. Usando a relação

$$f'(x) = \frac{1}{2h} \{f(x + 2h) - f(x)\} - hf''(\xi),$$

que é conseqüência da fórmula de Taylor, prove que $|f'| \leq hM_2 + M_0/h$ e daí deduza que $M_1^2 \leq 4M_0M_2$.

4.37 Seja f uma função duas vêzes diferenciável em $(0, +\infty)$ e suponha que f'' seja aí limitada e que $f(x) \to 0$, quando $x \to +\infty$. Usando o exercício precedente em $(a, +\infty)$, prove que $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$. Dê um exemplo para mostrar que a hipótese de ser f'' limitada não pode ser omitida.

4.38 Seja f uma função derivável em $[a, b]$ tal que $f(a) = 0$ e suponha que exista um número positivo M tal que $|f'(x)| \leq M|f(x)|$ em $[a, b]$. Mostre que $f \equiv 0$ em $[a, b]$. (*sugestão*: fixe c em $[a, b]$ e verifique que $|f(x)| \leq M_1(c-a) \leq M(c-a)M_0$, onde M_0 e M_1 são, respectivamente, o supremo de $|f(x)|$ e $|f'(x)|$ em $[a, c]$ e daí deduza que $M_0 = 0$, se $M(c-a) < 1$.)

4.39 Seja $0 < a < 1$ e considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \left| \begin{array}{l} ax + x^2 \operatorname{sen}(1/x), \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0. \end{array} \right.$$

Mostre que f é derivável em $\mathbb{R}$, mas f' não é contínua em $x = 0$. Mostre que f não é invertível em vizinhança alguma da origem, embora $f'(0) \neq 0$. Por que isto não contradiz o Teorema da Função Inversa?

4.40 Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1, mostre que o conjunto dos pontos críticos de f é um conjunto fechado. Dê exemplo de uma função derivável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e de uma seqüência $\{x_n\}$ de pontos críticos de f tais que: $x_n \to 0$ e $f'(0) > 0$.

4.41 Função Convexa. Uma função duas vêzes derivável é dita convexa quando $f''(x) \geq 0$, $\forall x$. Mostre que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, dados $x, y \in \mathbb{R}$ e $r, s \in [0, 1]$, com $r + s = 1$ tem-se $f(rx + sy) \leq rf(x) + sf(y)$.

4.42 Seja $f : [a, b] \to [a, b]$ uma função contínua e convexa tal que $f(a) \neq a$ e $f(b) \neq b$ Mostre que f tem um único ponto fixo em $[a, b]$.

4.43 Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e convexa tal que $f(a) < 0 < f(b)$. Prove que existe um único c em (a, b) tal que $f(c) = 0$.

4.44 Seja $X \subset \mathbb{R}$ um subconjunto convexo. Mostre que $f : X \to \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, o conjunto $A(f) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R};\ y \geq f(x)\}$ é convexo.

4.45 Mostre que o conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R};\ \ln x + y \geq 0\}$ é convexo.