3. Funções Contínuas

3.1 Mostre que a função valor absoluto $f(x) = |x|$ é contínua em qualquer ponto $x \in \mathbb{R}$.

3.2 Mostre que a função de Dirichlet $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\varphi(t) = \left| \begin{array}{l} 1, \text{ se } t \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{ se } t \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{array} \right.$$

é descontínua em qualquer ponto $t \in \mathbb{R}$.

3.3 Em cada caso, encontre δ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, para todo x satisfazendo $0 < |x - a| < \delta$.
(a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $a = 1$, $L = 1$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$; $a = 2$, $L = 2/3$ (c) $f(x) = \dfrac{x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$; $a = 0$, $L = 0$.

3.4 Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções. Prove ou apresente um contra-exemplo.

(a) Se f tem limite em $x = a$ e g não tem, então fg não tem limite em $x = a$;

(b) Se f tem limite em $x = a$ e g não tem, então $f + g$ não tem limite em $x = a$;

(c) Se f e $f + g$ têm limite em $x = a$, então g tem limite em $x = a$;

(d) $\lim_{x \to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to a} (f(x) - L) = 0$;

(e) $\lim_{x \to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to a} |f(x)| = |L|$;

(f) Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então $\lim_{x \to a} f(x^3) = L$;

(g) Se $\lim_{x \to a} f(x^2) = L$, então $\lim_{x \to a} f(x) = L$;

3.5 Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem a seguinte propriedade: "se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não tem limite em $x = a$, então $f + g$ não tem limite em $x = a$". Prove que isso ocorre se, e somente se, $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.

3.6 Seja $f(x) = \dfrac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m}$, com $a_n, b_m \neq 0$. Mostre que existe $\lim_{x \to \infty} f(x)$ se, e somente se, $m \geq n$. (sug. use o fato $x^k \to 0$, com $x \to \infty$ e $k > 0$)

3.7 Mostre que $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim f(x_n) = L$, seja qual for a seqüência decrescente (x_n) em $D(f)$ convergindo para a. Formule um resultado análogo para o limite à esquerda.

3.8 Em cada caso, encontre um inteiro n e uma raiz do polinômio entre n e $n + 1$.
(a) $x^3 - x + 3$ (b) $x^5 + x + 1$ (c) $4x^2 - 4x + 1$

3.9 Mostre que toda função contínua $f : [0,1] \to [0,1]$ tem ao menos um ponto fixo, isto é, existe algum $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$. Generalize o resultado para uma função contínua $f : [a,b] \to [a,b]$.

3.10 Sejam $a < b < c$ e considere duas funções contínuas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [b,c] \to \mathbb{R}$ tais que $f(b) = g(b)$. Mostre que a função $h : [a,c] \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(x)$, se $x \in [a,b]$ e $h(x) = g(x)$, se $x \in [b,c]$ é contínua no intervalo $[a,c]$.

3.11 De acordo com o Exercício 1.36(d), um subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, cumpre a seguinte condição: se $\{x_n\}$ é uma seqüência em S com limite x, então $x \in S$. Usando esse fato demonstre que o conjunto dos pontos onde uma função contínua se anula é fechado.

3.12 Dado $x \in \mathbb{R}$ defina $[x]$ como sendo o maior inteiro $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x$. Calcule $[8.3]$, $[\pi]$, $[0.1]$, $[-\pi]$. A função $x \mapsto [x]$ é conhecida na literatura como *função máximo inteiro*. Determine os pontos de continuidade das seguintes funções:

(a) $f(x) = [x]$ (b) $g(x) = x[x]$ (c) $h(x) = [\operatorname{sen} x]$ (d) $k(x) = [1/x]$.

3.13 Considere $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \left(x^2 + x - 6\right) / (x - 2)$. Esta função é contínua? É possível defini-la no ponto $x = 2$ de modo a torná-la contínua em $\mathbb{R}$?

3.14 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $c \in \mathbb{R}$ e $f(c) > 0$, mostre que existe uma ε-vizinhança de c na qual a função f é positiva. Conclua que o conjunto $F = \{x; f(x) \leq 0\}$ é fechado. Usando esse fato, prove que se f e g são duas funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e $f(c) < g(c)$, então existe um número real $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para qualquer x no intervalo $]c - \delta, c + \delta[$.

3.15 Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função real e considere g a restrição de f a um subconjunto $D_0 \subseteq D$. Mostre que se f for contínua em um ponto x_0 de D_0, então a função g também será. Mostre com um exemplo que a função g pode ser contínua em um ponto sem que f o seja.

3.16 Função Lipschitziana. Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é dita *Lipschitziana* quando existir uma constante $C > 0$, denominada *constante de Lipschitz,* tal que $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$, $\forall x, y \in D$. Mostre que toda função Lipschitziana é contínua. Mostre que a função $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \geq 0$, é contínua mas não é lipschitziana.

3.17 Mostre que se uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se anula em um subconjunto $D \subset \mathbb{R}$, então ela se anula no fêcho $\overline{D}$. Em particular, se ela for nula em $\mathbb{Q}$, então ela será identicamente nula em $\mathbb{R}$.

3.18 Mostre que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua se, e só se, $f\left(\overline{X}\right) \subset \overline{f(X)}$, seja qual for o subconjunto $X \subset \mathbb{R}$.

3.19 Defina $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) = 2x$, se $x \in \mathbb{Q}$, e $g(x) = x + 3$, caso contrário. Determine o conjunto dos pontos de continuidade de g.

3.20 Considere a função $k : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida como segue. Para x irracional ponha $k(x) = 0$; para $x = p/q$, fração irredutível, ponha $k(x) = q$. Mostre que a função k assim definida é ilimitada e descontínua em todos os pontos do intervalo $(0, +\infty)$.

3.21 Suponha que uma função limitada $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ não tenha limite quando $x \to 0^+$. Construa duas sequências $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ em $]0, 1[$, ambas convergindo para zero, tais que $\lim f(x_n) \neq \lim f(y_n)$.

3.22 Se $f, g : D \to \mathbb{R}$ são contínuas no ponto $a \in D$, mostre que as funções $f \vee g$ e $f \wedge g$, definidas em D por: $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, são contínuas em $x = a$.

3.23 Considere as funções reais $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por: $f(x) = x + 1$, $g(1) = 0$ e $g(x) = 2$, para $x \neq 1$. Verifique que $(g \circ f)(0) \neq \lim\limits_{x \to 0} (g \circ f)(x)$. Isso contradiz algum fato teórico?

3.24 Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = \left| \begin{array}{l} 0\,, \text{ se } x \notin \mathbb{Q} \\ x, \text{ se } x \in \mathbb{Q} \end{array} \right. \qquad \text{e} \qquad g(x) = \left| \begin{array}{l} 0\,, \text{ se } x \neq 0 \\ 1, \text{ se } x = 0. \end{array} \right.$$

Mostre que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{y \to 0} g(y) = 0$, mas $g(f(x))$ não tem limite em $x = 0$.

3.25 Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sendo g contínua em $x = b$ e $\lim\limits_{x \to c} f(x) = b$. Mostre que $\lim\limits_{x \to c} (g \circ f)(x) = g(b)$.

3.26 Seja D um subconjunto denso em $\mathbb{R}$. Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são duas funções contínuas que coincidem em D, mostre que elas são iguais. Usando este resultado mostre que qualquer função contínua $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz à condição $\varphi(m/2^n) = 0$, $\forall m \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, é identicamente nula.

3.27 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{Q}$. Mostre que f é constante. E se $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$, o que se pode afirmar sobre a função f?

3.28 Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f([a, b]) \subset \mathbb{Q}$. O que se pode afirmar sobre f?

3.29 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma *função aditiva*, isto é, $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y$. Mostre que f é contínua se, e somente se, f é contínua em $x = 0$. Se f é uma função contínua e aditiva, mostre que f é do tipo $f(x) = cx$, para algum $c \in \mathbb{R}$. (primeiro mostre que a relação é válida em $\mathbb{Q}$ e depois use densidade).

3.30 Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$. Mostre que f é contínua em $\mathbb{R}^+$ se, e somente se, o for em algum $c \in \mathbb{R}^+$.

3.31 Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com a seguinte propriedade: $g(x+y) = g(x)\, g(y)$, $\forall x, y$. Se $g(c) = 0$, para algum c, mostre que $g \equiv 0$. Mostre que g é contínua se, e somente se, g é contínua em $x = 0$.

3.32 Seja $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e defina $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ por $\psi(t) = \sup\{\varphi(x),\ a \leq x \leq t\}$. Mostre que a função ψ é contínua em $[a,b]$.

3.33 Seja $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\varphi(x) > 0$, $\forall x \in [a,b]$. Mostre que existe uma constante positiva α tal que $\varphi(x) \geq \alpha$, $\forall x \in [a,b]$.

3.34 Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua com a seguinte propriedade: para cada x do intervalo $[a,b]$ existe um y em $[a,b]$ tal que $|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|$. Mostre que a função f possui ao menos um zero.

3.35 Mostre que não existe uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua tal que para cada $c \in \mathbb{R}$ a equação $f(x) = c$ tem exatamente duas soluções.

3.36 Usando o Teorema do Valor Intermediário deduza que todo polinômio de grau ímpar, com coeficientes reais, tem ao menos uma raiz real.

3.37 Mostre que o polonômio $p(x) = x^4 + 7x^3 - 9$ tem ao menos duas raízes reais.

3.38 Mostre que a equação $x = \cos x$ tem uma solução no intervalo $[0, \pi/2]$.

3.39 Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua com a seguinte propriedade: $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Se $w = \sup\{x \in [a,b];\ f(x) < 0\}$, mostre que $f(w) = 0$. Isto dá uma demonstração alternativa do Teorema do Valor Intermediário de Bolzano.

3.40 Seja f a função definida no intervalo $[0, \pi/2]$ por $f(x) = \max\{x^2, \cos x\}$. Sendo f uma função contínua em $[0, \pi/2]$ ela possui um ponto de mínimo x_0 neste intervalo. Mostre que $x_0^2 = \cos x_0$.

3.41 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. Mostre que f é uma função limitada e que o seu máximo ou seu mínimo é atingido. Por meio de um exemplo, mostre que o máximo e o mínimo não são atingidos necessariamente.

3.42 Uma descontinuidade a de f é dita de *1ª espécie* quando os limites laterais de f em a existirem.

(a) Dê exemplo de uma função com descontinuidade que não seja de 1^a espécie;

(b) Dê exemplo de uma função com uma quantidade não enumerável de descontinuidades;

(c) Se uma função monótona só admite descontinuidades de 1^a espécie, mostre que estas descontinuidades constituem um conjunto no máximo enumerável.

3.43 Seja $f(x) = [1 + \exp(1/x)]^{-1}$, $x \neq 0$. Calcule os limites laterais de f em $x = 0$.

3.44 Mostre por indução em n que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{(\ln x)^n} = \infty$.

3.45 Qual a imagem do intervalo aberto $(-1, 1)$ pela função contínua $f(x) = x^2$? Conclua que a imagem de um intervalo por uma função contínua não é necessariamente um intervalo do mesmo tipo.

3.46 Função Localmente Limitada. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é *localmente limitada* quando cada ponto x do intervalo I for centro de uma vizinhança na qual f é limitada. Se I for um intervalo compacto, mostre que f é limitada se, e somente se, for localmente limitada. Com um exemplo mostre que a conclusão torna-se falsa para intervalos abertos.

3.47 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Dado $c \in \mathbb{R}$, mostre que o conjunto $X = \{x \in \mathbb{R};\ f(x) = c\}$ é compacto (isto é, fechado e limitado). A partir daí deduza que dentre as raízes da equação $f(x) = c$ existe uma, por exemplo x_0, tal que $|x_0|$ é mínimo.

3.48 Semicontinuidade. Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é dita *semicontínua superiormente* (abrevia-se *scs*) em a quando: dado $c > f(a)$, existe $\delta > 0$ tal que $c > f(x)$, $\forall x \in V_\delta(x) \cap D$. A função f será dita *semicontínua inferiormente* (abrevia-se *sci*) em a quando: dado $c < f(a)$ existe $\delta > 0$ tal que $c < f(x)$, $\forall x \in V_\delta(a) \cap D$. Uma função é dita *semicontinua* (inferiormente ou superiormente) quando o for em todo seu domínio.

(a) Mostre que f é contínua em $x = a$ se, e somente se, f for scs e sci em $x = a$;

(b) Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$, sendo f scs e g sci em $x = a$. Se $f(a) < g(a)$, mostre que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$, $\forall x \in V_\delta(x) \cap D$.

(c) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é sci e $f(x) > 0$ em $\mathbb{R}$, prove que a função $x \mapsto 1/f(x)$ é scs.

3.49 Função Uniformemente Contínua. Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua quando:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \text{ tal que } x, y \in D,\ \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Mostre que a função $f(x) = 1/x$ é uniformemente contínua em qualquer intervalo $[a, +\infty)$, $a > 0$.

3.50 Em cada caso, verifique se a função é uniformemente contínua no domínio indicado.

(a) $f(x) = x^2$; $D = [0, +\infty)$ (b) $g(x) = \operatorname{sen}(1/x)$; $D = (0, +\infty)$.

(c) $f(x) = 1/(1+x^2)$; $D = \mathbb{R}$ (d) $g(x) = 1/x^2$; $D = [1, +\infty)$.

3.51 Se f e g são uniformemente contínuas em D e λ é uma constante real, mostre que as funções $f + \lambda g$, $|f|$, $f \vee g$ e $f \wedge g$ são uniformemente contínuas em D. Se além de uniformemente contínuas elas forem limitadas em D, mostre que a função produto $f \cdot g$ é uniformemente contínua em D. Observe que as funções $f(x) = x$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$ são uniformemente contínuas em $\mathbb{R}$, mas o produto $f \cdot g = x \operatorname{sen} x$ não é.

3.52 Mostre que a composição de funções uniformemente contúnuas é uma função uniformemente contínua. Se f é uniformemente contínua em D e $|f(x)| \geq k > 0$, para qualquer x em D, mostre que a função $1/f$ é uniformemente contínua em D.

3.53 Se $D \subset \mathbb{R}$ é limitado e $f : D \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua, mostre que f é limitada em D.

3.54 Prove que a função $f(x) = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$, é uniformemente contínua, mas não é lipschitziana.

3.55 Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua e suponha que f e uniformemente contínua em $[a, +\infty)$ para alguma constante positiva a. Mostre que f é uniformemente contínua em $[0, +\infty)$.

3.56 Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ tem a seguinte propriedade: para cada $\varepsilon > 0$, existe uma função uniformemente contínua $\varphi_\varepsilon : D \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - \varphi_\varepsilon(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in D$. Mostre que f é uniformemente contínua.

3.57 Mostre que toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e p-periódica é uniformemente contínua, limitada e atinge seus extremos.

3.58 Se $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ é contínua e $f(0) = f(2)$, prove que $f(c) = f(c+1)$, para algum $c \in [0, 2]$.

3.59 Suponha que uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem limites finitos quando $x \to \pm\infty$. Mostre que f é uniformemente contínua (mesma conclusão vale se existem os limites $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \{f(x) - x\}$). Usando este resultado, conclua que a função $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$, $x \neq 0$, e $f(0) = 0$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

3.60 Função de Variação Limitada. Dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, a *variação total* de f em $[a, b]$ é, por definição:

$$V_a^b(f) = \sup \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|,$$

onde o supremo é extendido sobre todas as partições $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ do intervalo $[a, b]$. Quando $V_a^b(f) < \infty$ a função f é dita de *variação limitada* em $[a, b]$. A classe das funções de variação limitada é representada por $\mathcal{BV}([a, b])$ (BV do inglês *Bounded Variation*).

(a) Mostre que toda função da classe $\mathcal{BV}([a, b])$ é limitada;

(b) Mostre que toda função f monótona em $[a, b]$ é de variação limitada e $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$;

(c) Mostre que toda função lipschitziana em $[a, b]$ é de variação limitada;

(d) Mostre que a função $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(\pi/x), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

embora uniformemente contínua (e portanto limitada) não é de variação limitada.

(e) Se $f, g \in \mathcal{BV}([a, b])$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, mostre que $\lambda f + g$, fg, $|f|$, $f \vee g$ e $f \wedge g$ são de variação limitada.