Universidade Federal da Paraíba - UFPB
Centro de Ciências Exatas e da Natureza - CCEN
Departamento de Matemática - DM

4^a Lista de Exercícios de Introdução à Análise Real

Professor: Fágner Dias Araruna

Assunto: Noções Topológicas e Limite de Funções

1. Uma **cisão** de um conjunto $X \subset \mathbf{R}$ é uma decomposição $X = A \cup B$ tal que $A \cap \overline{B} = \emptyset$ e $\overline{A} \cap B = \emptyset$. A decomposição $X = X \cup \emptyset$ chama-se **cisão trivial**. Mostre que um intervalo da reta só admite cisão trivial.

2. Mostre que os únicos subconjuntos de $\mathbf{R}$ que são simultaneamente abertos e fechados são $\emptyset$ e $\mathbf{R}$.

3. Seja $X \subset \mathbf{R}$, mostre que o fecho $\overline{X}$ é um conjunto fechado.

4. Dado um subconjunto $S \subset \mathbf{R}$,dizemos que um ponto $x \in \mathbf{R}$ é um **ponto de fronteira** de S se toda vizinhança de x contém pontos de S e de $\mathbf{R} - S$. Denota-se por ∂S o conjunto dos pontos de fronteira de S. Prove que $\overline{S} = S \cup \partial S$.

5. Seja $X \subset \mathbf{R}$, mostre que o conjunto dos pontos de acumulação X' é um conjunto fechado.

6. Prove que todo conjunto infinito limitado de números reais admite pelo menos um ponto de acumulação.

7. Se $X' \neq \emptyset$, então X é infinito.

8. Construa um conjunto limitado de números reais com exatamente três pontos de acumulação.

9. Dê exemplo de uma cobertura aberta do segmento $(0, 1)$ que não tem subcobertura finita.

10. O **conjunto de Cantor** K é um subconjunto fechado do intervalo $[0,1]$, obtido como complementar de uma reunião de intervalos abertos, do seguinte modo. Retira-se do intervalo $[0,1]$ seu terço médio aberto $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. Depois retira-se o terço médio aberto de cada um dos intervalos restantes $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3},1\right]$. Sobra então $\left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right]$. Em seguida, retira-se o terço médio aberto de cada um desses intervalos. Repete-se o precesso indefinidamente. O conjunto K dos pontos não retirados é o conjunto de Cantor. Prove que K é compacto, tem interior vazio, não contém pontos isolados e é não-enumerável.

11. Uma coleção de conjuntos abertos $A=\{A_\lambda;\ \lambda\in\Gamma\}$, onde Γ é um conjunto de índices, é denominada **cobertura aberta** de um subconjunto $S\subset\mathbf{R}$ se $S\subset\bigcup\limits_{\lambda\in\Gamma}A_\lambda$. Quando Γ é um conjunto finito, diz-se que a cobertura é **finita**. Mostre que um subconjunto $K\subset\mathbf{R}$ é compacto se, e somente se, toda cobertura aberta de K possui uma subcobertura finita.

12. Usando o exercício anterior, mostre que o subconjunto $(0,1]$ de $\mathbf{R}$ não é compacto.

13. Seja $X\subset\mathbf{R}$ compacto. Mostre que $\inf X=\min X$ e $\sup X=\max X$.

14. Seja $F_n=[a_n,b_n]$, $n\in\mathbf{N}$,uma família de intervalos fechados e limitados tais que $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$. Mostre que $\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}}F_n\neq\emptyset$.

15. Todo conjunto X de números reais contém um subconjunto enumerável E, denso em X.

16. Se todos os pontos do conjunto X são isolados, mostre que X é enumerável.

17. Considere o conjunto $K=\{0\}\cup\left\{\frac{1}{n};\ n\in\mathbf{N}\right\}$. Mostre que toda cobertura aberta de K possui uma subcobertura finita que ainda cobre K. Desta forma conclua que K é compacto.

18. Seja $E=\{p\in\mathbf{Q};\ 2<p^2<3\}$. Mostre que E é fechado e limitado em Q, mas que E não é compacto. E é aberto em Q?

19. Usando a definição de limite, prove que $\lim\limits_{x\to2}2x+1=5$.

20. Tendo em vista o resultado do exercício anterior, determine uma vizinhança $V_\delta(2)$ do ponto 2, tal que
$$x\in V_\delta(2)\Rightarrow|2x-4|<1.$$

21. Usando a definição de limite, prove que $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1}=-8.$

22. Usando o resultado do Teorema 3, pág. 63, do livro do Elon, mostre que

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x+1}{5x+4}=\frac{1}{2}.$$

23. Mostre que não existe $\lim\limits_{x\to+\infty} sen x$.

24. Sejam $f,g : X\subset \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $a\in X'$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ e $\lim\limits_{x\to a}g(x)=M$. Mostre que se $L>M$,então $f(x)>g(x)$, para x em uma vizinhança de a.É verdade que se $L=M$ então $f(x)=g(x)$, para x em uma vizinhança de a?

25. Seja I um intervalo aberto limitado não contendo o ponto $x_0\in\mathbf{R}$. Mostre que existe $k>0$ tal que $x\in I$ implica $|x-x_0|>k$.

26. Usando a definição de limite e o resultado do exercício anterior, prove que:

   $(a)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}.$ $\quad(b)\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{1}{4}$ $\quad(c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}=1.$

   Nos exercícios 27 a 34, estamos supondo $f : X\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ uma função e a um ponto de acumulação de X.

27. Mostre que se $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ então L é um ponto aderente ao conjunto $f(X-\{a\})$.

28. Um número real c chama-se **valor de aderência** de f no ponto a quando existe uma sequência de pontos $x_n\in X-\{a\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ e $\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=c$. Considere f limitada numa vizinhança de a. Mostre que o conjunto de todos os valores de aderência a f no ponto a é compacto e não-vazio. Sendo o conjunto compacto e não vazio, pode-se concluir que ele possui um elemento mínimo e um elemento máximo. Chama-se **limite superior de** f no ponto a ao maior valor de aderência de f no ponto a e escreve-se $\lim\limits_{x\to a}\sup f(x)=L$ para exprimir que L é o limite superior de f no ponto a. Analogamente, se l é o menor valor de aderência de f no ponto a, diz-se que l é o **limite inferior de** f no ponto a e escreve-se $\lim\limits_{x\to a}\inf f(x)=l$.

29. Seja $f:\mathbf{R}-\{0\}\to\mathbf{R}$ definida por $f(x)=sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Mostre que $\lim\limits_{x\to 0}\sup sen\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$ e $\lim\limits_{x\to 0}\inf sen\left(\dfrac{1}{x}\right)=-1.$

30. Mostre que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ então $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|L|$. Se $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|L|$ então o conjunto dos valores de aderência de f no ponto a é $\{L\}$, $\{-L\}$ ou $\{L,-L\}$.

31. Sejam $f, g : X \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ limitadas numa vizinhança de $a \in X'$. Mostre que $\limsup_{x \to a} [f(x) + g(x)] \leq \limsup_{x \to a} f(x) + \limsup_{x \to a} g(x)$ e que $\limsup_{x \to a} [-f(x)] = -\liminf_{x \to a} f(x)$. Enuncie e prove os resultados análogos $\liminf_{x \to a}$.

32. Seja $g : X \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uma função limitada e suponha $\lim_{x \to a} f(x) = 0$. Mostre que $\lim_{x \to a} [f(x) g(x)] = 0$.

33. Se $Y \subset X$ também tem a como ponto de acumulação e se g é a restrição de f ao conjunto Y, mostre que se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ então $\lim_{x \to a} g(x) = L$. Dê um exemplo que mostra que a recíproca não é verdade.

34. Se $Y = I \cap X$, onde I é um intervalo aberto contendo a, então prove que é verdadeira a recíproca do resultado do exercício anterior.

35. Seja $f : \mathbf{R} - \{2\} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$. Mostre que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

36. Seja $f : \mathbf{R} - \{-3\} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{5x+1}{3x+9}$. Mostre que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{5}{3}$.

37. Mostre que não existe $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$.

38. Existe $\lim_{x \to 0} \cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$?