Universidade Federal da Paraíba - UFPB
Centro de Ciências Exatas e da Natureza - CCEN
Departamento de Matemática - DM

3^a Lista de Exercícios de Introdução à Análise Real

Professor: Fágner Dias Araruna

Assunto: Séries

1. Use o critério de comparação para provar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente, a partir da convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$.

2. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ diverge, enquanto as séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^r}$, $r > 1$, e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$ convergem.

3. Prove que se $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq ...$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\lim_{n \to \infty} n a_n = 0$.

4. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e $a_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbf{N}$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ é absolutamente convergente para todo $x \in [-1, 1]$ e as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx)$ são absolutamente convergentes para todo $x \in \mathbf{R}$.

5. A série $1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} + ...$tem termos alternadamente positivos e negativos e seu termo geral tende a zero. Entretanto é divergente. Por que isto não contradiz o teorema de Leibniz?

6. Dê exemplo de de uma série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e de uma sequência limitada (x_n) tais que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ seja divergente. Examine o que ocorre se uma das hipóteses seguintes for verificada: (a) (x_n) é convergente; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

7. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente e $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, ponha $c_n = a_1b_n + a_1b_{n-1} + ... + a_nb_1$ e prove que $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

8. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $a_n \geq 0$, mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ também converge. Dê um exemplo para mostrar que a condição $a_n \geq 0$ não pode ser dispensada.

9. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ convergem, prove que $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ converge absolutamente.

10. Suponha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série absolutamente convergente, onde $a_n \neq 1$, para todo $n \in \mathbf{N}$. prove que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ converge.

11. Demonstre que se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de termos positivos for convergente, então as séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$ também serão convergentes.

12. Dada uma sequência de termos positivos x_n, com $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Usando o teste de Cauchy, discuta a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} (x_1x_2...x_n)$.

13. Decida sobre a convergência das séries abaixo:

    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\,(n^2) + 3\cos n}{n^2}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\log n}{n}\right)^n$

14. Prove que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se, $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ converge, onde k é um número natural.

15. Supondo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série convergente de termos não-nulos, prove que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ é uma série divergente.

16. Para qual(is) valor(es) do número real a, a série $\sum_{n=1}^{\infty} na^n$ é convergente?

17. Considere $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série convergente e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ uma série divergente.

   (a) Mostre que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ diverge.

   (b) Se supusermos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentes, o que podemos afirmar a respeito da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$?

18. Considere $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ séries de termos positivos, com $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ convergente. Supondo a existência do $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$, mostre que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

19. Usando o resultado do exercício anterior, prove que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)\,2^{2n-1}}$ é uma série convergente.

20. Prove que que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ converge.para $p > 1$ e diverge para $p \leq 1$.

21. Uma bola de borracha atinge 60% da altura em que foi largada, após quicar no chão. Se ela foi abandonada de uma altura de 2 metros, qual a distância que ela percorre até parar?

22. Mostre as seguintes somas:

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \dfrac{1}{12}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} = 3$ (c) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} 4\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+2} = \dfrac{128}{1875}$

   (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{9n^2+3n-2} = \dfrac{1}{2}$ (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{3}{2}$ (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\dfrac{k}{k+1}\right) = \infty$

   (g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n-1}}{3^n}$ (h) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{3^n}\right)$ (i) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left[sen\left(\dfrac{1}{n}\right) + 2^{-n} - sen\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\right] = 1 + sen\,(1)$

23. (**Teste da Raiz**) Seja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série e suponhamos que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$. Mostre que

   (a) Se $L < 1$ a série é absolutamente convergente.

   (d) Se $L > 1$ a série diverge.

   (g) Se $L = 1$ o teste é inconclusivo.