Universidade Federal da Paraíba - UFPB
Centro de Ciências Exatas e da Natureza - CCEN
Departamento de Matemática - DM

2^a Lista de Exercícios de Introdução à Análise Real

Professor: Fágner Dias Araruna

Assunto: Sequências de Números Reais

1. Seja $a = \lim x_n$. Mostre que se $b < a$ então, para n suficientemente grande, tem-se $b < x_n$. Prove também que se $a < b$ então $x_n < b$, para todo n suficientemente grande.

2. Mostre que se $x_n > 0$, para todo $n \in \mathbf{N}$ e $\lim \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = a < 1$ então $\lim x_n = 0$.

3. Considere a sequência (a_n) de números reais definida por
$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$
Prove que (a_n) é convergente.

4. Para $a > 1$, mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

5. Dado $a > 0$, mostre que $(\sqrt[n]{a}) \to 1$.

6. Supondo $a, b \geq 0$, mostre que $\left(\sqrt[n]{a^n + b^n}\right) \to \max\{a, b\}$.

7. Prove os seguintes limites:

   (a) $(\sqrt[n]{n}) \to 1$ $\quad(d)$ $(\sqrt[n]{n} - 1)^n \to 0$ $\quad(b)$ $\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$ $\quad(c)$ $\left(\dfrac{\log n}{n}\right) \to 0$

   (d) $\left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dots + \dfrac{1}{(2n)^2}\right) \to 0$ $\quad(e)$ $\left(\sqrt[n]{n^2 + n}\right) \to 1$

8. Prove que as sequências abaixo são convergentes e calcule seus limites.

   (a) $\left(\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)$ $\quad(b)$ $\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ $\quad(c)$ $\left(n\left(\sqrt{9n^2+1} - 3n\right)\right)$ $\quad(d)$ $\left(\dfrac{n^3 sen\,(n!)}{n^4+1}\right)$

   (d) $\left(\dfrac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}\right)$ $\quad(e)$ $\left(\dfrac{n^5 + 2^n}{n^4 + 3^n}\right)$ $\quad(f)$ $\left(\dfrac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2}\right)$

9. Mostre que a sequência $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$ converge para o número 2.

10. Considere a sequência $a_1 = \sqrt{5}$ e $a_n = \sqrt{5 + a_{n-1}}$, para $n \geq 2$. Mostre que (a_n) é convergente e encontre seu limite.

11. Prove que não se pode ter $\lim\limits_{n\to\infty} sen\,(n) = 0$.

12. Uma sequência (x_n) diz-se *periódica* quando existe $p \in \mathbf{N}$ tal que $x_{n+p} = x_n$, para todo $n \in \mathbf{N}$. Prove que toda sequência periódica convergente é constante.

13. Dadas as sequências (x_n) e (y_n), defina (z_n) pondo $z_{2n-1} = x_n$ e $z_{2n} = y_n$. Se $\lim x_n = \lim y_n = a$, prove que $\lim z_n = a$.

14. Se $\lim x_n = a$, prove que $\lim |x_n| = |a|$. A recíproca é verdadeira?

15. Se uma sequência monótona tem uma subsequência convergente, prove que a sequência é, ela própria, convergente.

16. Se $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$ e $|x_n - y_n| \geq \epsilon$, para todo $n \in \mathbf{N}$, prove que $|a - b| \geq \epsilon$.

17. Sejam $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$. Se $a < b$, prove que existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $n > n_0$, então $x_n < y_n$.

18. Dados $a, b \in \mathbf{R}^+$, defina intuitivamente as sequências (x_n) e (y_n) pondo $x_1 = \sqrt{ab}$, $y_1 = \dfrac{a+b}{2}$ e $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$. Prove que (x_n) e (y_n) convergem para o mesmo limite.

19. Prove que $\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

20. Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ e $a \in \mathbf{R}$, prove que $\lim\limits_{n\to\infty} [\sqrt{\log(x_n + a)} - \sqrt{\log x_n}] = 0$.

21. Se (a_n) converge para a, mostre que $(\sigma_n) = \left(\dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)$ também converge para a.

22. Sejam $t_0, t_1, \ldots, t_p \in \mathbf{R}$ tais que $t_0 + t_1 + \ldots + t_p = 0$. Mostre que a sucessão (a_n) cujo termo geral é
$$a_n = t_0\sqrt{n} + t_1\sqrt{n+1} + \ldots + t_p\sqrt{n+p}$$
tende a zero.

23. Sejam (a_n) uma sequência e o conjunto

$$C = \{x \in \mathbf{R};\ \text{existe uma subsequência de } (a_n) \text{ que converge para } x\}.$$

Se (a_n) for limitada então o conjunto C é não-vazio e limitado. Podemos, assim definir o limite superior de (a_n), denotado por lim sup a_n e o limite inferior de (a_n), denotado por lim inf a_n, como sendo

$$\limsup a_n = \sup C \quad \text{e} \quad \liminf a_n = \inf C.$$

Mostre que se $L = \limsup a_n$ e $l = \liminf a_n$ então dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow l - \epsilon < a_n < L + \epsilon.$$

Em seguida conclua que uma sequência (a_n) é convergente se, e somente se, $\limsup a_n = \liminf a_n$. Considere a sequência (a_n) cujo termo geral é dado por

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) sen \frac{n\pi}{2}.$$

Encontre o $\limsup a_n$ e $\liminf a_n$.