Universidade Federal da Paraíba - UFPB
Centro de Ciências Exatas e da Natureza - CCEN
Departamento de Matemática - DM

1^a Lista de Exercícios de Introdução à Análise Real

Professor: Fágner Dias Araruna

Assunto: Conjuntos Finitos, Conjuntos Enumeráveis e Números Reais

1. Se A é um subconjunto próprio do conjunto $I_n = \{p \in \mathbf{N};\ p \leq n\}$, mostre que não pode existir uma bijeção $f : A \to I_n$.

2. Se $f : I_n \to X$ e $g : I_m \to X$ são bijeções, mostre que $m = n$.

3. Seja X um conjunto finito. Prove que uma aplicação $f : X \to X$ é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva.

4. Mostre que todo subconjunto finito A de $\mathbf{Z}$ é limitado, ou seja, exitem m e M tais que $m \leq x \leq M$, para todo $x \in A$.

5. Indicando com $card\ X$ o número de elementos do conjunto finito X, prove:

   (a) Se X é finito e $Y \subset X$, então $card\ Y \leq card\ X$.

   (b) Se X e Y são finitos então $X \cup Y$ é finito e $card\ (X \cup Y) = card\ X + card\ Y - card\ (X \cap Y)$.

   (c) Se X e Y são finitos então $X \times Y$ é finito e $card\ (X \times Y) = card\ X.card\ Y$.

6. Se X é um conjunto infinito, mostre que existe uma aplicação injetiva $f : \mathbf{N} \to X$.

7. Mostre que A é infinito se, e somente se, A contém um subconjunto enumerável.

8. Se A é infinito e B não vazio, mostre que $A \times B$ é infinito.

9. Mostre que todo subconjunto de um conjunto enumerável também é enumerável.

10. Seja $f : X \to Y$ injetiva. Se Y é enumerável, mostre que X também é enumerável.

11. Seja $f : X \to Y$ sobrejetiva. Se X é enumerável, mostre que Y também é enumerável.

12. Demonstre que o produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis também é enumerável.

13. Dado $n \in \mathbf{N}$, prove que não existe $x \in \mathbf{N}$ tal que $n < x < n + 1$.

14. Prove que o conjunto $\mathbf{Q}$ é denso em $\mathbf{R}$. Em outras palavras, dados dois números reais quaisquer $x < y$, existem racionais r tais que $x < r < y$. $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$ é denso em $\mathbf{R}$?

15. Se $r \neq 0$ é racional e x é irracional, prove que $r + x$ e rx são irracionais.

16. Prove que não existe número racional cujo quadrado é 12.

17. Prove que:

    (a) Se $x + \theta = x$ então $\theta = 0$.

    (b) Se $x + y = 0$ então $y = -x$.

18. Usando os axiomas da multiplicação, mostre que:

    (a) Se $x \neq 0$ e $xy = xz$ então $y = z$

    (b) Se $x \neq 0$ e $xy = x$ então $y = 1$

    (c) Se $x \neq 0$ e $xy = 1$ então $y = \dfrac{1}{x}$

    (d) Se $x \neq 0$ então $\dfrac{1}{\frac{1}{x}} = x$.

19. Prove as desigualdades:

    (a) $|a + b| \leq |a| + |b|$.

    (b) $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

    (c) $\sqrt{ab} \leq \dfrac{1}{2}(a + b)$.(Esta desigualdade diz que a média geométrica de dois números reais positivos é menor ou igual à média aritmética desses mesmos números)

    (d) $2ab \leq a^2 + b^2$.

    (e) (Desigualdade de Bernoulli) Para todo número real $x \geq -1$ e todo $n \in \mathbf{N}$, prove que $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

20. Prove que o princípio da indução e o princípio da boa ordenação são equivalentes.

21. Seja $A = \{\dfrac{1}{n}; n \in \mathbf{N}\}$. Mostre que $\inf A = 0$.

22. Mostre que o corpo dos reais é **arquimediano**, isto é, dados dois reais a, b com $0 < a < b$, existe um número natural n tal que $na > b$.

23. Seja E um conjunto não-vazio de um conjunto ordenado. Suponha α um limite inferior de E e β um limite superior de E. Prove que $\alpha \leq \beta$.

24. Seja A um conjunto não-vazio de números reais limitado inferiormente. Seja $-A$ o conjunto dos números $-x$, onde $x \in A$. Prove que $\inf A = -\sup(-A)$.

25. Consideremos o subconjunto dos racionais $A = \{x \in \mathbf{Q};\ x^2 > 2,\ x > 0\}$. Mostre que A não tem ínfimo em $\mathbf{Q}$. Isto contradiz o Postulado de Dedekind? Justifique.

26. Seja S um subconjunto não vazio e limitado de $\mathbf{R}$. Dado $a \in \mathbf{R}$, considere os conjuntos $aS = \{ax;\ x \in S\}$ e $a + S = \{a + x;\ \mathrm{x} \in S\}$.

    (a) Mostre que aS e $a + S$ são não vazios e limitados.

    (b) Se $a \geq 0$, mostre que $\sup\,(aS) = a.\sup S$ e $\inf\,(aS) = a.\inf S$.

    (c) Se $a < 0$, mostre que $\sup\,(aS) = a.\inf S$ e $\inf\,(aS) = a.\sup S$.

    (d) Mostre que $\sup\,(a + S) = a + \sup S$ e $\inf\,(a + S) = a + \inf S$.

27. Diz-se que uma função $f : X \to \mathbf{R}$ é <u>limitada superiormente</u> quando sua imagem $f(X) = \{f(x);\ x \in X\}$ é um conjunto limitado superiormente. Então põe-se $\sup f = \sup\{f(x);\ x \in X\}$. Prove que se $f, g : X \to \mathbf{R}$ são limitadas superiormente o mesmo ocorre com a soma $f + g : X \to \mathbf{R}$ e tem-se $\sup\,(f + g) \leq \sup\, f + \sup\, g$. Dê um exemplo com $\sup\,(f + g) < \sup\, f + \sup\, g$. Enuncie e prove um resultado análogo para $\inf$.

28. Dadas as funções $, g : X \to \mathbf{R}^+$ limitadas superiormente, prove que o produto $f.g : X \to \mathbf{R}^+$ é uma função limitada com $\sup\,(f.g) \leq \sup\, f.\sup\, g$ e $\inf\,(f.g) \leq \inf\, f.\inf\, g$. Dê exemplos onde se tenha $<$ e não $=$.

29. Nas condições do exercício anterior, mostre que $\sup\,(f^2) = (\sup f)^2$ e $\inf\,(f^2) \leq (\inf f)^2$.