Existência, Unicidade e Estabilidade para a Equação de Kawahara

por

Roberto de Almeida Capistrano Filho

sob orientação de

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna (UFPB)

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Março/2010
João Pessoa - PB

Existência, Unicidade e Estabilidade da Equação de Kawahara

por

Roberto de Almeida Capistrano Filho

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisitos parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna (Presidente)

(Universidade Federal da Paraíba - UFPB)

Prof. Dr. Ademir Fernando Pazoto

(Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ)

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

(Universidade Federal de Campina Grande - UFCG)

Prof. Dr. Nelson Nery de Oliveira Castro (Suplente)

(Universidade Federal da Paraíba - UFPB)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Ficha Catalográfica

CAPISTRANO FILHO, Roberto de Almeida.

Existência, Unicidade e Estabilidade para a Equação de Kawahara.

Roberto de Almeida Capistrano Filho.

João Pessoa: UFPB/DM, 2010.

91p. 29cm

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Paraíba, DM.

1. Matemática. 2. Equações Dispersivas.

3. Equação de Kawahara - existência - estabilidade.

I. Análise II. Título

Agradecimentos

Aos meus pais pelo incentivo em todos os momentos em minha vida, e que sempre me deram muito amor e carinho, não medindo esforços para tal conquista.

Aos meus avôs, em especial, a minha avó Joana Medeiros, pelo carinho que só ela sabe proporcionar.

Aos meus irmãos por estarem do meu lado sempre com grande carinho, em especial a Emille Joana por me dá forças nos momentos mais difíceis.

Aos meus padrinhos: Marcos Antônio e Erivan, pelo carinho, sempre.

Aos amigos: Jonathas Barbosa, Eduardo Marcelo, Yuri Carlos, Renato Maia, Diego Souza e Fágner Araruna que tanto me apoiaram com palavras de incentivo e força.

Aos amigos que fiz: Adriano Alves, Anselmo Barganha, Bruno Formiga, Disson Soares, Elielson Mendes Pires, Juanice Andrade, Mauricio Santos, Pitágoras Carvalho, Simeão Targino, Thiago Ginez, entre outros, já com saudade.

À "Turma do Futebol", pelo apoio nas horas difíceis, contribuindo para uma ótima relação no dia a dia.

Ao Prof. Dr. Fágner Dias Araruna, pelo apoio desde a época da graduação, dedicação e amizade construída durante esses anos de orientação.

Aos Professores Doutores Ademir Fernando Pazoto, Claudianor Oliveira e Nelson Nery de Oliveira Castro, pela aceitação e contribuição à dissertação.

Ao Prof. Dr. Marivaldo Pereira Matos, pelos conhecimentos adquiridos e sua organização invejável.

Aos Professores Dr. Antônio de Andrade e Dr. Nelson Nery, por suas inúmeras contribuições matemáticas em minha vida acadêmica.

Ao Prof. Dr. Uberlandio Severo, por todos os momentos de atenção nas horas de dúvidas e conversas no corredor, que ajudaram e muito na minha formação.

Ao Prof. Dr. Gleb G. Doronin, da Universidade Estadual de Maringá, pelas sugestões e comentários que deixaram o trabalho mais completo.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

.

Aos meus pais, Roberto e Leca, meus irmãos Emille, Richardyson, Germana e Geordana e minha Avó Joana.

Resumo

Este trabalho é dedicado ao estudo da existência, unicidade e estabilidade para a equação não linear de Kawahara

$$u_t + u_x + u_{xxx} + u^p u_x - u_{xxxxx} = 0 \quad (p = 1,\ 2)\,,$$

em um domínio limitado. Para provar a existência e unicidade, usamos técnicas de semi-discretização para o caso $p = 1$ e, para o caso $p = 2$, utilizamos a teoria de semigrupos. Ao adicionarmos uma dissipação localizada, obtemos um decaimento exponencial (quando $t \to \infty$) da energia associada às soluções da equação de Kawahara. Isto foi feito combinando estimativas de energia, técnicas de multiplicadores e argumentos de compacidade, fazendo com que o resultado de estabilização ficasse reduzido a provar uma propriedade de continuação única para a equação de Kawahara. Tal propriedade foi provada usando um resultado devido a J. C. Saut e B. Sheurer (ver [38]).

Abstract

This work is dedicated to the study of existence, uniqueness and stability for the nonlinear equation for Kawahara

$$u_t + u_x + u_{xxx} + u^p u_x - u_{xxxxx} = 0 \quad (p = 1,\ 2)\,,$$

on a bounded domain. To prove the existence and uniqueness, we use techniques of finite differences for the case $p = 1$ and semigroup theory for the case $p = 2$. Under effect of a localized damping mechanism, we obtain an exponential decay (as $t \to \infty$) for the energy associated to solutions of Kawahara equation. Combining energy estimatives, multipliers and compacteness argument, the stabilization result was reduced to prove a unique continuation property for the Kawahara equation. This property was proved using a result due to J. C. Saut and B. Sheurer (see [38]).

Sumário

.

Introdução

Equações que modelam o movimento de ondas em meios dispersivos, lineares e não lineares, tem suas raízes na descoberta de uma Onda Solitária por John Scott Russel. Por volta de 1834 ele observou ondas criadas na superfície da água em um canal, que pareciam se propagar de forma constante e sem mudar de forma. Russel realizou vários experimentos deste fenômeno que ele chamou de "Ondas Solitárias".

Após isto, outros cientistas como George Airy e George Stokes se interessaram pelo assunto desenvolvendo e analisando principalmente os modelos matemáticos dos fenômenos observados anteriormente em laboratórios. Apesar de certo avanço, várias perguntas ficaram sem respostas concretas, como por exemplo, por que se realiza uma propagação constante de uma onda de forma permanente sobre a superfície da água? O próximo grande avanço se encontra no trabalho de Joseph Boussinesq por volta de 1871. O modelo matemático dele inclui, implicitamente, várias situações as quais originaram outras importantes equações.

Em 1895, surgiu o famoso artigo de dois cientistas holandeses, Diederik Korteweg e Gustav de Vries, que relata uma modelagem matemática essencial sobre Ondas Solitárias observado por Russel. A forma original da equação principal do artigo é:

$$\eta_t = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\left(\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{3}{2}\alpha\eta + \frac{1}{3}\beta\eta_{xx}\right)_x,$$

onde η é a elevação da superfície de líquido sobre o seu nível de equilíbrio $l > 0$, $\alpha > 0$ é uma constante relacionada ao movimento uniforme (propução linear) do líquido, $g > 0$ é a constante de gravidade e $\beta = \frac{l^3}{3} - \frac{Tl}{\rho g}$ é a constante relacionada às forças capilares do tensor T e da densidade ρ, constante e positiva.

Podemos dizer que tais equações que descrevem os movimentos de ondas, são uma das mais familiares nas quais os efeitos dispersivos estão presentes. De modo simples, podemos dizer que a dispersão de uma onda é o fenômeno no qual a velocidade de onda depende da sua amplitude (ou na frequência, no caso de um envelope de ondas), ver [17] ou [28] para mais detalhes.

O sistema de equações

$$\left| \begin{array}{l} u_t + \left[(1+\alpha u)\, w\right]_x - \frac{\beta}{6} w_{xxx} = 0, \\ u_x + w_t + \alpha w w_x - \frac{\beta}{2} w_{xxt} = 0, \end{array} \right. \tag{1}$$

descreve a propagação unilateral das ondas dispersivas na superfície de um líquido e foi originado por Boussinesq. Sua dedução pode ser encontrada em [2] ou [4]. Fisicamente, as variáveis redimensionadas u e w estão relacionadas à amplitude e comprimento de onda, respectivamente. A fim de obter um modelo matemático mais relevante em termos de α e β e ao mesmo tempo mantendo a propagação em um único sentido, considerou-se algumas mudanças de variáveis em (1) e obteve-se duas equações que modelam a propagação unidimensional de ondas longas com pequenas amplitudes, a saber

$$\left| \begin{array}{ll} u_t + u_x + \frac{3}{2}\alpha u u_x + \frac{\beta}{6} u_{xxx} = 0 & \qquad \text{KdV}, \\ u_t + u_x + \frac{3}{2}\alpha u u_x + \frac{\beta}{6} u_{xxt} = 0 & \qquad \text{BBM}. \end{array} \right.$$

A primeira das equações é a famosa equação de Korteweg-de Vries (KdV) e a segunda é a BBM, em uma homenagem aos matemáticos Benjamim, Bona e Mahony, ver [2], [4], [5] ou [7].

Para análise matemática, é conveniente modificar os termos α e β relacionados à amplitude máxima e comprimento de onda, respectivamente. Para isto, podemos fazer $\alpha = \frac{2}{3}$ e $\beta = 6$. Assim, podemos reescrever as equações KdV e BBM como

$$\left| \begin{array}{ll} u_t + u_x + u u_x + u_{xxx} = 0 & \qquad \text{KdV}, \\ u_t + u_x + u u_x + u_{xxt} = 0 & \qquad \text{BBM}. \end{array} \right.$$

Existem vários artigos que estudam diversos aspectos dessas equações, dentre eles podemos destacar [5], [7], [14], [19], [24], [25], [27], [28], [33], [36], e [37].

Em 1972, Takuji Kawahara, em um artigo intitulado "Oscillatory Solitary Waves in Dispersive Media" (ver [23]), generalizou a equação da KdV, denominada equação de Kawahara ou Equação de KdV generalizada. Equações diferenciais dispersivas de quinta ordem descrevem a propagação de ondas de pequenas amplitudes em uma dimensão. Problemas relacionados a fluídos e física de plasmas são, em geral, formulações físicas que são representadas por equações do tipo Kawahara. A Equação de Kawahara é dada por

$$u_t + \frac{3}{2}uu_x + \alpha u_x + \beta u_{xxx} - \gamma u_{xxxxx} = 0.$$

Tal equação difere da KdV, por possuir um termo a mais, a derivada de ordem cinco. Uma, dentre muitas, das formulações da equação de Kawahara foi desenvolvida através do modelo que estuda ondas de gravidade capilar em um canal de comprimento longo e de fundo plano ver [22] e [39].

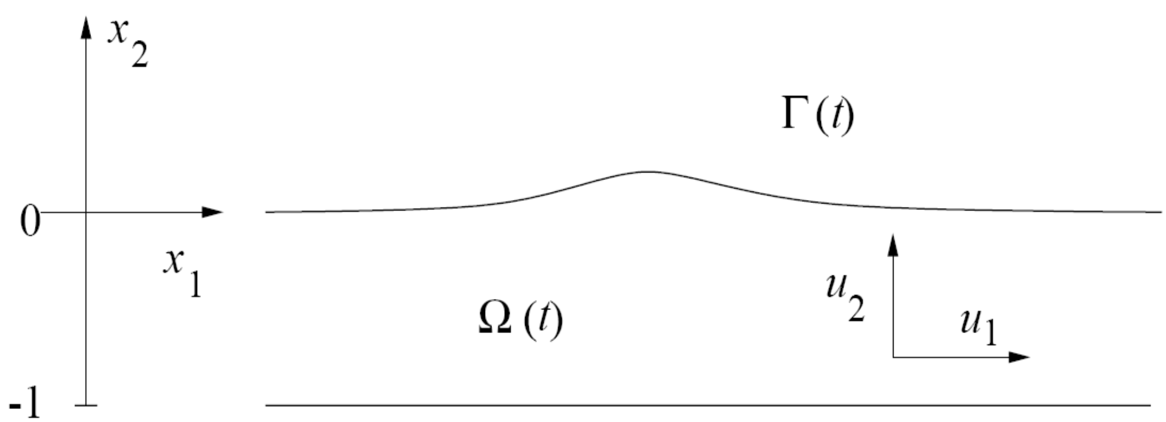

Fig. 1 - O problema onda-água

Para tal estudo considera-se um fluxo irrotacional de um fluído viscoso incompreensível em um canal "infinitamente" longo de profundidade fixa com fundo impermeável sob a influência da gravidade e tensão superficial.

Com isto, da mesma forma que na KdV, existe o interesse de estudar problemas de valores iniciais e de fronteira, tais estudos foram iniciados em [3], [11], [12], [24], entre outros. Contudo, métodos para estudo de tais problemas, nas equações de KdV e Kawahara, diferem entre si por dois tipos de problemas: Problemas colocados em um quarto do Plano

([6], [10], [18], [42]); e problemas de valores iniciais e de fronteira sobre um intervalo finito, que é o caso que atraí o interesse neste trabalho.

Este trabalho é dedicado, primeiramente, ao estudo da existência e unicidade de solução da equação de Kawahara em um domínio limitado:

$$\left| \begin{array}{l} u_t + u_x + u^p u_x + u_{xxx} - u_{xxxxx} = 0 \quad \text{em} \quad Q_T, \\ u(0,T) = u(L,t) = u_x(0,T) = u_x(L,T) = u_{xx}(L,T) = 0, \quad t \in (0,T) \ , \\ u(x,0) = u_0(x) \,, \quad x \in (0,L) \,. \end{array} \right. \tag{2}$$

Ao longo do trabalho assumiremos o domínio $Q_T = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,L) \subset \mathbb{R},\, t \in (0,T)\}$, e $p = 1,\ 2$. Nas questões relacionadas ao estudo de existência e unicidade do sistema (2) serão utilizados dois processos distintos, à saber, no caso $p = 1$ utilizaremos o método da semi-discretização com respeito a variável t, ver [26], para mostrar a existência de solução. No caso $p = 2$ a existência será demonstrada via teoria de semigrupos.

A partir da existência e unicidade obteremos uma taxa de decaimento para a energia associada à solução do sistema

$$\left| \begin{array}{l} u_t + u_x + u^p u_x + u_{xxx} - u_{xxxxx} + a(x)\, u = 0 \quad \text{em} \quad Q_T, \\ u(0,T) = u(L,t) = u_x(0,T) = u_x(L,T) = u_{xx}(L,T) = 0, \quad t \in (0,T) \ , \\ u(x,0) = u_0(x) \,, \quad x \in (0,L) \,. \end{array} \right.$$

onde a função $a = a(x)$ é não negativa em $(0,L)$ e satisfaz

$$\begin{cases} a \in L^\infty(0,L) \quad \text{e} \quad a(x) \geq a_0 \geq 0 \text{ q.s. em } \omega, \\ \text{com } \omega \text{ sendo um subconjunto não vazio de } (0,L) \,. \end{cases}$$

A análise descrita acima foi dividida em três partes:

No **Capítulo 1** apresentamos os resultados clássicos que serão utilizados no desenvolvimento do trabalho.

No **Capítulo 2** utilizamos o método da semi-discretização com respeito a variável t para encontrarmos existência e unicidade de solução global do problema acima no caso $p = 1$. Neste capítulo utilizamos a linha de raciocínio análogo ao trabalho de G. Doronin e N. Larkin, ver [15]. Além disso, provamos o decaimento exponencial da solução ($t \to \infty$) quando adicionado um amortecimento localizado.

No **Capítulo 3** utilizamos o método de semigrupos para encontrar a existência e unicidade de solução global do problema acima no caso $p = 2$. E como no capítulo anterior, mostraremos o decaimento exponencial da solução quando $t \to \infty$.

Vale ressaltar que o decaimento exponencial abordado nos Capítulos 2 e 3 foram conseguidos, inspirados nos trabalhos de Rosier [36], Pazoto [34], Menzala-Vasconcelos-Zuazua [33], que utilizaram técnicas de multiplicadores e de "compacidade-unicidade".

No **Apêndice** provamos resultados de continuação única necessários para o método que usamos para obter a estabilidade para a equação de Kawahara nos Capítulos 2 e 3.

Capítulo 1

Notações e Resultados

Neste capítulo fixaremos algumas notações e daremos definições e resultados essenciais à continuidade do trabalho.

1.1 Espaços Funcionais

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e uma função contínua $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, define-se suporte de f, e denota-se por supp(f), o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega;\ f(x) \neq 0\}$. Assim, supp$(f)$ é um subconjunto fechado de Ω.

Uma n-upla de inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ é denominada de multi-índice e sua ordem é definida por $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Representa-se por D^α o operador de derivação de ordem $|\alpha|$, isto é,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, 0, ..., 0)$, define-se $D^0 u = u$, para toda função u.

Por $C_0^\infty(\Omega)$ denota-se o espaço vetorial, com as operações usuais, das funções infinitamente diferenciáveis definidas, e com suporte compacto, em Ω.

Um exemplo clássico de uma função de $C_0^\infty(\Omega)$ é dado por

Exemplo 1.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto tal que $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| < 1\}$ compactamente* *contido em* Ω. *Consideremos* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, *tal que*

$$f(x) = \left| \begin{array}{ll} e^{\frac{1}{\|x\|^2 - 1}}, & se \ \|x\| < 1 \\ 0, & se \ \|x\| \geq 1 \end{array} \right. ,$$

onde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *e* $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ *é a norma euclidiana de* x. *Temos que* $f \in C^\infty(\Omega)$ *e* $supp(f) = \overline{B_1(0)}$ *é compacto, isto é* $f \in C_0^\infty(\Omega)$.

Definição 1.1 *Diz-se que uma sequência* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $C_0^\infty(\Omega)$ *converge para* φ *em* $C_0^\infty(\Omega)$, *quando forem satisfeitas as seguintes condições:*

(i) Existe um compacto K de Ω tal que $\text{supp}(\varphi) \subset K$ e $\text{supp}(\varphi_n) \subset K$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

(ii) $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ uniformemente em K, para todo multi-índice α.

Observação 1.1 *É possível (ver [40]) dotar* $C_0^\infty(\Omega)$ *com uma topologia de forma que a noção de convergência nessa topologia coincida com a dada pela Definição 1.1.*

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido da convergência acima definida, será denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado de Espaço das Funções Testes sobre Ω.

Uma distribuição (escalar) sobre Ω é todo funcional linear contínuo sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. Mais precisamente, uma distribuição sobre Ω é um funcional $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall\, \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

(ii) T é contínua, isto é, se $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ, em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $(T(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$, em $\mathbb{R}$.

É comum denotar o valor da distribuição T em φ por $\langle T, \varphi \rangle$.

O conjunto de todas as distribuições sobre Ω com as operações usuais é um espaço vetorial, o qual representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Os seguintes exemplos de distribuições escalares desempenham um papel fundamental na teoria.

Exemplo 1.2 *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. *O funcional* $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, *definido por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

é uma distribuição sobre Ω *univocamente determinada por* u (*ver* [*31*]). *Por esta razão, identifica-se* u *à distribuição* T_u *por ela definida e, desta forma,* $L^1_{loc}(\Omega)$ *será identificado a uma parte (própria) de* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemplo 1.3 *Consideremos* $0 \in \Omega$ *e o funcional* $\delta_0 : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, *definido por*

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Em [*31*], *vê-se que* δ_0 *é uma distribuição sobre* Ω. *Além disso, mostra-se que* δ_0 *não é definido por uma função de* $L^1_{loc}(\Omega)$.

Definição 1.2 *Diz-se que uma sequência* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *converge para* T *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$, *quando a sequência numérica* $(\langle T_n, \varphi \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergir para* $\langle T, \varphi \rangle$ *em* $\mathbb{R}$, *para toda* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 1.3 *Sejam* T *uma distribuição sobre* Ω *e* α *um multi-índice. A derivada* $D^\alpha T$ *(no sentido das distribuições) de ordem* $|\alpha|$ *de* T *é o funcional definido em* $\mathcal{D}(\Omega)$ *por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observação 1.2 *Decorre da Definição 1.3 que cada distribuição* T *sobre* Ω *possui derivadas de todas as ordens.*

Observação 1.3 $D^\alpha T$ *é uma distribuição sobre* Ω, *onde* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. *De fato, vê-se facilmente que* $D^\alpha T$ *é linear. Agora, para a continuidade, consideremos* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergindo para* φ *em* $\mathcal{D}(\Omega)$. *Assim,* $|\langle D^\alpha T, \varphi_n \rangle - \langle D^\alpha T, \varphi \rangle| \leq |\langle T, D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi \rangle| \to 0$, *quando* $n \to \infty$.

Observação 1.4 *Vê-se em* [*32*] *que a aplicação* $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ *tal que* $T \mapsto D^\alpha T$ *é linear e contínua no sentido da convergência definida em* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Dado um número inteiro $m > 0$, por $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, representa-se o espaço de Sobolev de ordem m, sobre Ω, das (classes de) funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α, com $|\alpha| \leq m$. $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço vetorial, qualquer que seja $1 \leq p < \infty$.

Munido das normas

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ quando } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} ess \, |D^\alpha u(x)|, \text{ quando } p = \infty,$$

os espaços de sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ são espaços de Banach (vide [32]).

Observação 1.5 *Quando $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H^m(\Omega)$, o qual munido do produto interno*

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) \, D^\alpha v(x) \, dx$$

é um espaço de Hilbert.

Consideremos no nosso trabalho o subespaço de $H^1(0, L)$ definido por

$$V = \left\{ u \in H^1(0, L); \quad u(0) = 0 \right\}.$$

Em [31] demonstra-se que a norma do gradiente e a norma do $H^1(0, L)$ são equivalentes em V. Assim, consideraremos V munido do produto interno e norma dados respectivamente por

$$((u, v)) = (u_x, v_x), \qquad \|u\|^2 = |u_x|^2,$$

onde $(\cdot, \cdot)$ e $|\cdot|$ denotam, respectivamente, o produto interno e a norma em $L^2(0, L)$.

Dado um espaço de Banach X, denotaremos por $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço de Banach das (classes de) funções u, definidas em $]0, T[$ com valores em X, que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X^p$ é integrável a Lebesgue em $]0, T[$, com a norma

$$\|u(t)\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por $L^{\infty}(0,T;X)$ representa-se o espaço de Banach das (classes de) funções u, definidas em $]0,T[$ com valores em X, que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X$ possui supremo essencial finito em $]0,T[$, com a norma

$$\|u(t)\|_{L^{\infty}(0,T;X)} = \sup_{t\in]0,T[} ess \|u(t)\|_X .$$

Observação 1.6 *Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por*

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X \, dt.$$

Consideremos o espaço $L^p(0,T;X)$, $1 < p < \infty$, com X sendo Hilbert separável, então podemos fazer a seguinte identificação

$$[L^p(0,T;X)]' \approx L^q(0,T;X'),$$

onde $(1/p) + (1/q) = 1$. Quando $p = 1$, faremos a identificação

$$\left[L^1(0,T;X)\right]' \approx L^{\infty}(0,T;X').$$

Essas identificações encontram-se detalhadamente em [29].

O espaço vetorial das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X é denominado de Espaço das Distribuições Vetoriais sobre $]0,T[$ com valores em X e denotado por $\mathcal{D}'(0,T;X)$.

Definição 1.4 *Dada $S \in \mathcal{D}'(0,T;X)$, define-se a derivada de ordem n como sendo a distribuição vetorial sobre $]0,T[$ com valores em X dada por*

$$\left\langle \frac{d^n S}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle S, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Exemplo 1.4 *Dadas $u \in L^p(0,T;X)$, $1 \leq p < \infty$, e $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$ a aplicação $T_u : \mathcal{D}(0,T) \to X$, definida por*

$$T_u(\varphi) = \int_0^T u(t)\varphi(t)\, dt,$$

integral de Bochner em X, é linear e contínua no sentido da convergência de $\mathcal{D}(0,T)$, logo uma distribuição vetorial. A aplicação $u \mapsto T_u$ é injetiva, de modo que podemos identificar u com T_u e, neste sentido, temos $L^p(0,T;X) \subset \mathcal{D}'(0,T;X)$.

Consideremos o espaço

$$W^{m,p}(0,T;X)=\left\{u\in L^{p}(0,T;X)\,;\; u^{(j)}\in L^{p}(0,T;X)\,,\; j=1,...,m\right\},$$

onde $u^{(j)}$ representa a j-ésima derivada de u no sentido das distribuições vetoriais. Equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(0,T;X)}=\left(\sum_{j=0}^{m}\left\|u^{(j)}\right\|_{L^{p}(0,T;X)}^{p}\right)^{\frac{1}{p}},$$

$W^{m,p}(0,T;X)$ é um espaço de Banach (vide [1]).

Observação 1.7 *Quando $p=2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $W^{m,p}(0,T;X)$ será denotado por $H^{m}(0,T;X)$, o qual, munido do produto interno*

$$(u,v)_{H^{m}(0,T;X)}=\sum_{j=0}^{m}\left(u^{(j)},v^{(j)}\right)_{L^{2}(0,T;X)},$$

é um espaço de Hilbert. Denota-se por $H_{0}^{m}(0,T;X)$ o fecho, em $H^{m}(0,T;X)$, de $\mathcal{D}(0,T;X)$ e por $H^{-m}(0,T;X)$ o dual topológico de $H_{0}^{m}(0,T;X)$.

Lema 1.1 (Imersão de Sobolev) *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^{n}$ com fronteira Γ regular.*

(i) Se $n>2m$, então $H^{m}(\Omega)\hookrightarrow L^{p}(\Omega)$, onde $p\in\left[1,\dfrac{2n}{n-2m}\right]$.

(ii) Se $n=2m$, então $H^{m}(\Omega)\hookrightarrow L^{p}(\Omega)$, onde $p\in[1,+\infty[$.

(iii) Se $n=1$ e $m\geq 1$, então $H^{m}(\Omega)\hookrightarrow L^{\infty}(\Omega)$.

Aqui o símbolo $\hookrightarrow$ denota imersão contínua.

Prova: Ver [8].

Lema 1.2 (Rellich-Kondrachov) *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^{n}$ com fronteira Γ regular.*

(i) Se $n>2m$, então $H^{m}(\Omega)\overset{c}{\hookrightarrow} L^{p}(\Omega)$, onde $p\in\left[1,\dfrac{2n}{n-2m}\right[$.

(ii) Se $n = 2m$, então $H^m(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$, onde $p \in [1, +\infty[$.

(iii) Se $2m > n$ então $H^m(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^k\left(\overline{\Omega}\right)$, onde k é um inteiro não negativo tal que $k < m - (n/2) \leq k + 1$.

Aqui o símbolo $\overset{c}{\hookrightarrow}$ denota imersão compacta.

Prova: Ver [8].

Teorema 1.1 (Banach-Alaoglu-Bourbaki) *O conjunto* $\mathcal{B}_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\}$ *é compacto pela topologia fraca ** $\sigma(E', E)$, *onde* E *é um espaço de Banach.*

Prova: Ver [8].

Lema 1.3 (Lema de Lions) *Sejam* $\mathcal{O}$ *um aberto limitado de* $\mathbb{R}^n$, $(g_m)_m$ *e* g *funções de* $L^q(\mathcal{O})$, $1 < q < \infty$, *tais que:*

$$\|g_m\|_{L^q(\mathcal{O})} \leq C \quad e \quad g_m \rightarrow g \ \text{q.s. em } \mathcal{O}.$$

Então $g_m \rightarrow g$ *fraco em* $L^q(\mathcal{O})$.

Prova: Ver [30].

Lema 1.4 (Du Bois Raymond) *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Então*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0, \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

se, e somente se, $u = 0$ *quase sempre em* Ω.

Prova: Ver [32].

Teorema 1.2 (Teorema de Unicidade de Holmgren) *Seja* P *um operador diferencial com coeficientes constantes em* $\mathbb{R}^n$. *Seja* u *solução de* $Pu = 0$ *em* Q_1, *onde* Q_1 *é um aberto do* $\mathbb{R}^n$. *Suponha* $u = 0$ *em* Q_2, *onde* Q_2 *é um subconjunto aberto e não vazio de* Q_1. *Então* $u = 0$ *em* Q_3, *onde* Q_3 *é um subconjunto aberto de* Q_1 *que contém* Q_2 *e tal que qualquer hiperplano característico do operador* P *que intersecta* Q_3 *também intersecta* Q_2.

Prova: Ver [21].

1.2 Interpolação de Espaços de Sobolev

Os resultados que aqui enunciaremos, assim como suas demonstrações, podem ser encontrados em [29].

Sejam X e Y dois espaços de Hilbert separáveis, com imersão contínua e densa, $X \hookrightarrow Y$. Sejam $(\cdot,\cdot)_X$ e $(\cdot,\cdot)_Y$ os produtos internos de X e Y, respectivamente.

Indicaremos por $D(S)$, o conjunto de todas as funções u's definidas em X, tal que a aplicação $v \longrightarrow (u,v)_X$, $v \in X$ é contínua na topologia induzida por Y. Então, $(u,v)_X = (Su,v)_Y$ define S, como sendo um operador ilimitado em Y com domínio $D(S)$, denso em Y.

S é um operador auto-adjunto e estritamente positivo. Usando a decomposição espectral de operadores auto-adjuntos, podemos definir S^θ, $\theta \in \mathbb{R}$. Em particular usaremos $A = S^{1/2}$.

O operador A, é auto-adjunto, positivo definido em Y, com domínio X e

$$(u,v)_X = (Au, Av)_Y\,, \quad \forall u, v \in X.$$

Definição 1.5 *Com as hipóteses anteriores, definimos o espaço intermediário*

$$[X,Y]_\theta = D\left(A^{1-\theta}\right), \qquad \left(\textit{domínio de } A^{1-\theta}\right),\ 0 \le \theta \le 1,$$

com a norma

$$\|u\|_{[X,Y]_\theta} = \left(\|u\|_Y^2 + \left\|A^{1-\theta}u\right\|_Y^2\right)^{1/2}.$$

Observermos que:

1. $X \hookrightarrow [X,Y]_\theta \hookrightarrow Y$.
2. $\|u\|_{[X,Y]_\theta} \le \|u\|_X^{1-\theta}\, \|u\|_Y^\theta$.
3. Se $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$ então $[X,Y]_{\theta_0} \hookrightarrow [X,Y]_{\theta_1}$.
4. $\left[[X,Y]_{\theta_0}, [X,Y]_{\theta_1}\right]_\theta = [X,Y]_{(1-\theta)\theta_0 + \theta\theta_1}$.

Teorema 1.3 *Sejam Ω, um subconjunto do $\mathbb{R}^n$, $s > \frac{1}{2}$. Então,*

$$H_0^s = \left\{u : u \in H^s(\Omega)\,,\ \frac{\partial^j u}{\partial \eta_j} = 0,\ \ 0 \le j < s - \frac{1}{2}\right\}.$$

Teorema 1.4 *Sejam* Ω*, um subconjunto do* $\mathbb{R}^n$*,* $s_1 \geq s_2 \geq 0$*,* s_1 *e* s_2 *diferentes de* $k + \frac{1}{2}$*,* $k \in \mathbb{Z}$*. Se* $s = (1-\theta)\, s_1 + \theta s_2 \neq k + \frac{1}{2}$*, então*

$$\left[H_0^{s_1}(\Omega), H_0^{s_2}(\Omega)\right]_\theta = H_0^s(\Omega)$$

e

$$\left[H_0^m(\Omega), H^0(\Omega)\right]_\theta = H_0^s(\Omega)\,, \text{ com } s = (1-\theta)\, m \neq k + \frac{1}{2}$$

com as normas equivalentes.

1.3 Desigualdades importantes

Teorema 1.5 (Ehrling) *Suponha que* Ω *satisfaz a propriedade do cone uniforme, ver [1], e seja* $\varepsilon_0 > 0$ *qualquer. Então existe uma constante* $\delta = \delta(\varepsilon_0, m, p, \Omega)$ *tal que para quaisquer* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$*, inteiro* $0 \leq j \leq m-1$ *e* $u \in W^{m,p}(\Omega)$ *vale a seguinte estimativa:*

$$\left(\sum_{|\alpha| \leq j} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{1/p} \leq \delta\varepsilon \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{1/p} + \delta\varepsilon^{\frac{-j}{m-j}} \|u\|_{L^p(\Omega)}\,.$$

Prova: Ver [1] ou [8].

Lema 1.5 (Desigualdade de Gronwall) *Seja* $z(t)$ *uma função real absolutamente contínua em* $[0, a[$ *tal que para todo* $t \in [0, a[$ *tem-se*

$$z(t) = C + \int_0^t z(s)\, ds.$$

Então $z(t) \leq Ce^t$, $\forall\, t \in [0, a[$.

Prova: Ver [9] ou [31].

Lema 1.6 (Desigualdade Discreta de Gronwall) *Seja* k_n *uma sequência de números reais não negativos. Considere a sequência* $\phi_n \geq 0$ *tal que*

$$\begin{aligned} &\phi_0 \leq g_0, \\ &\phi_n \leq g_0 + \sum_{s=0}^{n-1} p_s + \sum_{s=0}^{n-1} k_s \phi_s,\ n \geq 1 \end{aligned}$$

com $g_0 \geq 0$ *e* $p_s \geq 0$. *Então para todo* $n \geq 1$

$$\phi_n \leq \left(g_0 + \sum_{s=0}^{n-1} p_s\right) \exp\left\{\sum_{s=0}^{n-1} k_s\right\}.$$

Prova: Ver [16].

Lema 1.7 (Desigualdade Diferencial de Gronwall) *Seja* $u(t)$ *uma função não negativa e diferenciável em* $[0,T]$, *satisfazendo*

$$u'(t) \leq f(t)\, u(t) + g(t)$$

onde $f(t)$ *e* $g(t)$ *são funções integráveis em* $[0,T]$. *Então*

$$u(t) \leq e^{\int_0^t f(\tau)d\tau}\left[u(0) + \int_0^t g(s)\, e^{-\int_0^s f(\tau)d\tau} ds\right], \ \forall t \in [0,T].$$

Se $f(t)$ *e* $g(t)$ *são funções não negativas, então a expressão torna-se*

$$u(t) \leq e^{\int_0^t f(\tau)d\tau}\left[u(0) + \int_0^t g(s)\, ds\right], \ \forall t \in [0,T].$$

Prova: Ver [16] ou [9].

Lema 1.8 (Desigualdade de Poincaré-Friedrichs) *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado. Se* $u \in H_0^1(\Omega)$, *então existe uma constante* $C > 0$, *tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\, \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Prova: Ver [1] ou [8].

Lema 1.9 (Desigualdade de Young) *Sejam* a, b *constantes positivas,* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $1 \leq q \leq \infty$, *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Prova: Ver [8].

Lema 1.10 (Desigualdade de Hölder) *Sejam* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$, *com* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *então* $fg \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Prova: Ver [8].

Lema 1.11 (Desigualdade de Gagliardo-Niremberg) *Seja* $u \in H_0^1(\Omega)$ *então existe* $c > 0$ *tal que*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|u_x\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}.$$

Prova: Ver [1] ou [8].

1.4 Método das Diferenças Finitas

Em problemas (básicos) onde se utiliza as estimativas a priori, o método das diferenças finitas pode ser muito importante. O seu interesse principal é que a estrutura das equações aproximadas por discretização (diferenças finitas) seja muito próxima da equação que queremos resolver. Sua principal desvantagem reside nos cálculos tecnicamente pesados. Em geral, existem três possibilidades de discretização em problema de evolução: Discretização Completa, Discretização da Variável Tempo, Discretização do Espaço. Trataremos neste trabalho a resolução de uma equação de evolução usando o método das diferenças finita, particularmente, a discretização da variável tempo na qual consiste basicamente em substituirmos o operador d/dt pelo quociente diferencial $\frac{u^n - u^{n-1}}{k}$ e analisarmos o comportamento da solução de um determinado problema quando $k \to 0$.

1.4.1 Método da Semi-discretização

Dados os espaços de Hilbert

$$V \subset H \subset V' \tag{1.1}$$

e um operador A definido por

$$\left| \begin{array}{l} A \in \mathcal{L}\left(V; V'\right), \\ (Av, v) \geq \alpha \left\|v\right\|_V^2, \quad \alpha > 0,\, v \in V, \end{array} \right. \tag{1.2}$$

por meio do método da semi-discretização, mostraremos, o seguinte resultado:

Teorema 1.6 *Suponha que (1.1) e (1.2) sejam satisfeitas. Seja K um conjunto convexo fechado de V. Se*

$$f \in L^2\left(0, T; V'\right) \tag{1.3}$$

e

$$u_0 \in K, \tag{1.4}$$

existe uma única função u, tal que

$$u \in L^2\left(0, T; V\right) \cap L^\infty\left(0, T; H\right), \tag{1.5}$$

$$u(t) \in K \;\; q.s., \tag{1.6}$$

$$\int_0^T \left(u'(t) + au(t) - f(t), v(t) - u(t)\right) dt + \frac{1}{2}\left|v(0) - u_0\right|^2 \geq 0,\;\; \forall v(t) \in K \;\; q.s.. \tag{1.7}$$

Antes de provarmos o teorema faremos aqui algumas notações a serem utilizadas. Seja

$$k = \Delta t = \frac{T}{N} \tag{1.8}$$

e denotaremos por u^n uma aproximação de u no instante nk. Seja

$$f^n = \frac{1}{k}\int_{nk}^{(n+1)k} f\left(\sigma\right) d\sigma,\; n \geq 1. \tag{1.9}$$

Tomemos

$$u^0 = u_0 \tag{1.10}$$

e definamos u^n por:

$$\left| \begin{array}{l} \left(\dfrac{u^n - u^{n-1}}{k}, v - u^n\right) + \left(Au^n - f^n, v - u^n\right) \geq 0, \quad \forall v \in K, \\ u^n \in K \;\; \left(1 \leq n \leq N - 1\right). \end{array} \right. \tag{1.11}$$

O sistema (1.11) é uma desigualdade variacional elípitica. Observe que (1.11) pode ser escrita como

$$\left(Au^n + \frac{1}{k}u^n, v - u^n\right) \geq \left(f^n + \frac{u^{n-1}}{k}, v - u^n\right), \ \forall v \in K.$$

Dizemos que a desigualdade (1.11) é uma semi aproximação da desigualdade (1.7).

Prova do Teorema 1.6:

Existência: Naturalmente tudo depende das estimativas à priori sobre $\{u^n\}$. Assim, seja

$$u_k(t) = u^n \text{ em } [nk, (n+1)k[\,, \ \ 0 \leq n \leq N-1. \tag{1.12}$$

Demonstraremos que

Lema 1.12 *Quando $k \to 0$, temos*

$$u_k \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H). \tag{1.13}$$

Prova: Seja v_0 escolhido arbitrariamente em K. Tomando $v = v_0$ em (1.11) e fazendo

$$w^n = u^n - v_0,$$

deduzimos

$$\frac{1}{k}\left(w^n - w^{n-1}, w^n\right) + (Aw^n, w^n) \leq (f^n - Av_0, w^n),$$

onde após multiplicarmos por k e denotarmos $\|\cdot\|$, $|\cdot|$, $\|\cdot\|_*$ as normas de V, H e V' respectivamente, temos

$$\frac{1}{2}\left[|w^n|^2 - \left|w^{n-1}\right|^2 + \left|w^n - w^{n-1}\right|^2\right] + k\alpha \|w^n\|^2 \leq k \|f^n - Av_0\|_* \|w^n\|. \tag{1.14}$$

Daí, usando a Desigualdade de Young,

$$\frac{1}{2}\left(|w^n|^2 - \left|w^{n-1}\right|^2\right) + k\alpha \|w^n\|^2 \leq \frac{k\alpha}{2}\|w^n\|^2 + \frac{k}{2\alpha}\|f^n - Av_0\|_*^2$$

e, portanto,

$$|w^n|^2 - \left|w^{n-1}\right|^2 + k\alpha \|w^n\|^2 \leq \frac{k}{\alpha}\|f^n - Av_0\|_*^2, \ \ 1 \leq n \leq N-1. \tag{1.15}$$

Somando em n, deduzimos

$$|w^n| + \alpha k \sum_{q=1}^{n} \|w^q\|^2 \leq \left|w^0\right|^2 + \frac{k}{\alpha} \sum_{q=1}^{n} \|f^q - Av_0\|_*^2 . \tag{1.16}$$

Mas desde que $f \in L^2\left(0, T; V'\right)$ e juntamente com (1.9), obtemos

$$k \sum_{q=1}^{n} \|f^q - Av_0\|_*^2 \leq C,$$

onde C independe de k. De (1.16), temos

$$\begin{cases} |w^n| \leq C, \\ k \displaystyle\sum_{q=1}^{N-1} \|w^q\|^2 \leq C. \end{cases} \tag{1.17}$$

Dessa forma segue-se imediatamente (como $kN = T$) as seguintes estimativas

$$\begin{cases} |u^n| \leq C, \\ k \displaystyle\sum_{q=1}^{N-1} \|u^q\|^2 \leq C, \end{cases} \tag{1.18}$$

às quais implicam (1.13), de acordo com a definição (1.12).

Passagem ao limite em k. Por (1.13), podemos extrair subsequência, ainda denotada por u_k, tal que

$$\left| \begin{array}{l} u_k \rightarrow u \quad fraco \text{ em } L^2\left(0, T; V\right) \text{ e} \\ u_k \rightarrow u \quad fraco - * \text{ em } L^\infty\left(0, T; H\right). \end{array} \right. \tag{1.19}$$

Seja K o conjunto fechado e convexo das funções $v \in L^2\left(0, T; V\right)$ tal que $v(t) \in K$ q.s.. Temos que $u_k \in K$, para todo k e como K é fracamente fechado em $L^2\left(0, T; V\right)$, temos que

$$u \in K. \tag{1.20}$$

Assim u satisfaz (1.5) e (1.6), restando mostrar que satisfaz (1.7). Considere v satisfazendo

$$v \in C^1\left(\left[0, T\right]; V\right), \, v(t) \in K, \, \forall t \geq 0. \tag{1.21}$$

Seja

$$\left| \begin{array}{l} v^n = v\,(nk)\,,\; n = 0, \ldots, N-1, \\ v_k = \text{Função escada definida por: } v_k(t) = v^n \text{ em } \left(nk, (n+1)k\right), \\ \tilde{v}_k = \text{ Função Linear por partes, contínuas em } [0,T] \text{ tal que,} \\ \tilde{v}_k(nk) = v^{n-1},\; n = 1, 2, \ldots \text{ e } \tilde{v}_k\,(0) = v^0. \end{array} \right. \tag{1.22}$$

Note que

$$\int_0^T \left(\frac{d\tilde{v}_k}{dt}, v_k - u_k\right) dt = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{nk}^{(n+1)k} \left(\frac{d\tilde{v}_k}{dt}, v_k - u_k\right) dt = \sum_{n=1}^{N-1} \left(v^n - v^{n-1}, v^n - u^n\right), \tag{1.23}$$

e que

$$\int_0^T (Au_k, v_k - u_k)\, dt = k \sum_{n=0}^{N-1} (Au^n, v^n - u^n)\,. \tag{1.24}$$

Então, se definirmos,

$$f_k = f^n \text{ em } \left[nk, (n+1)\,k\right),\;\; n = 0, \ldots, N-1, \tag{1.25}$$

temos

$$\int_0^T (f_k, v_k - u_k)\, dt = k \sum_{n=0}^{N-1} (f^n, v^n - u^n)\,. \tag{1.26}$$

Agora fazendo em (1.11) $v = v^n$, e multiplicando por k, temos

$$\left(u^n - u^{n-1}, v^n - u^n\right) + k\,(Au^n - f^n, v^n - u^n) \geq 0. \tag{1.27}$$

Notemos que somando e subtraindo o seguinte termo $(u^n - u^{n-1}, v^n - u^n)$, obtemos,

$$\begin{aligned} &(v^n - v^{n-1}, v^n - u^n) + k\,(Au^n - f^n, v^n - u^n) = (u^n - u^{n-1}, v^n - u^n) \\ &+k\,(Au^n - f^n, v^n - u^n) + \frac{1}{2}\left(|v^n - u^n|^2 - |v^{n-1} - u^{n-1}|^2\right) \\ &+\frac{1}{2}\left(|v^n - u^n - (v^{n-1} - u^{n-1})|^2\right) \geq \frac{1}{2}\left(|v^n - u^n|^2 - |v^{n-1} - u^{n-1}|^2\right). \end{aligned}$$

Somando em n,

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{N-1} \left[(v^n - v^{n-1}, v^n - u^n) + k\,(Au^n - f^n, v^n - u^n)\right] \geq \\ &\frac{1}{2}\left|v^{N-1} - u^{N-1}\right|^2 - \tfrac{1}{2}\left|v^0 - u^0\right|^2 \geq -\frac{1}{2}\left|v(0) - u_0\right|^2. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Por (1.23), (1.24) e (1.26), deduzimos de (1.28) que:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left(\frac{d\tilde{v}_k}{dt}, v_k - u_k\right) + \int_0^T (Au_k, v_k - u_k)\, dt - k\left(Au^0, v^0 - u^0\right) \\
&+k\left(f^0, v^0 - u^0\right) + \frac{1}{2}\left|v(0) - u_0\right|^2 \geq 0.
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Quando $k \to 0$, $\frac{d\tilde{v}_k}{dt} \to v'$ em $L^2(0,T;V)$, $f_k \to f$ em $L^2(0,T;V')$, na medida que

$$\liminf \int_0^T (Au_k, u_k)\, dt \geq \int_0^T (Au, u)\, dt.$$

Finalmente como $kf \to 0$ em V' quando $k \to 0$, segue de (1.29) que

$$\int_0^T \left[(v', v - u) + (Au - f, v - u)\right] dt + \frac{1}{2}\left|v(0) - u_0\right|^2 \geq 0, \tag{1.30}$$

para todo v satisfazendo (1.22). Mais se v é dado como (1.7), existe v_j verificando as condições (1.21) e que $v_j \to v$ em $L^2(0,T;V)$ fraco, $v_j' \to v'$ em $L^2(0,T;V')$. Tomando $v = v_j$ em (1.30) e passando o limite, deduzimos (1.7).

Unicidade: Sejam u_1 e u_2 duas soluções quaisquer e $w = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$. Defina w_η $(\eta > 0)$ por

$$\eta w_\eta' + w_\eta = w, \;\; w_\eta(0) = u_0,$$

fazendo $v = w_\eta$ na desigualdade (1.30), temos

$$2\int_0^T \left(w_\eta', w_\eta - w\right) dt + \int_0^T \left[(Au_1, w_\eta - u_1) + (Au_2, w_\eta - u_2)\right] dt - 2\int_0^T (f, w_\eta - w)\, dt \geq 0.$$

Mas

$$\int_0^T \left(w_\eta', w_\eta - w\right) dt = -\eta \int_0^T \left|w_\eta'\right|^2 dt \leq 0.$$

Assim,

$$\int_0^T \left[(Au_1, w_\eta - u_1) + (Au_2, w_\eta - u_2)\right] dt - 2\int_0^T (f, w_\eta - w)\, dt \geq 0.$$

Fazendo $\eta \to 0$, segue que $w_\eta \rightharpoonup w$, daí

$$-\int_0^T (Au_1 - u_2, u_1 - u_2)\, dt \geq 0,$$

o que implica $u_1 = u_2$. ■

1.5 Teoria de Semigrupos de Operadores Lineares

Para teoria de semigrupos lineareas citamos como referências [20], [43] e [35].

Definição 1.6 *Seja X um espaço de Banach e $L(X)$ um operador linear e limitado de X. Diz-se que uma aplicação $S : \mathbb{R}^+ \rightarrow L(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de X se*

1. $S(0) = I$, *onde I é o operador identidade de $L(X)$;*

2. $S(t+s) = S(t)\,S(s)$, $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$.

   Diz-se que o semigrupo é de classe C^0 se

3. $\lim\limits_{t \to 0^+} \|(S(t) - I)\,x\| = 0$, $\forall x \in X$.

Proposição 1.1 *Todo semigrupo de classe C^0 é fortemente contínuo em $\mathbb{R}^+$, isto é, se $t \in \mathbb{R}^+$ então*

$$\lim_{s \to t} S(s)\,x = S(t)\,x, \ \forall x \in X.$$

Definição 1.7 *O operador $A : D(A) \longrightarrow X$ definido por*

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x \quad \textit{existe} \right\}$$

e

$$A(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x, \ \forall x \in D(A)$$

é dito gerador infinitesimal do semigrupo S.

Proposição 1.2 *O gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C^0 é um operador linear fechado e seu domínio é um espaço vetorial denso em X.*

Proposição 1.3 *Seja S um semigrupo de classe C^0 e A o gerador infinitesimal de S. Se $x \in D(A)$, então $S(t)\,x \in D(A)$, $\forall t \geq 0$ e*

$$\frac{d}{dt} S(t)\,x = AS(t)\,x = S(t)\,Ax.$$

Definição 1.8 *Seja S um semigrupo de classe C^0 e A seu gerador infinitesimal. Colocando $A_0 = I$, $A_1 = A$ e supondo que A_{k-1} esteja definido, vamos definir A_k por*

$$D(A_k) = \{x \in D(A_{k-1}) : A_{k-1}x \in D(A)\},$$

$$A_k x = A(A_{k-1}x), \forall x \in D(A_k).$$

Proposição 1.4 *Seja S um semigrupo de classe C^0 e A o gerador infinitesimal. Então*

1. *$D(A_k)$ é um subespaço de X e A_k é um operador linear de X;*

2. *Se $x \in D(A_k)$, então $S(t)x \in D(A_k)$, $t \geq 0$ e*
$$\frac{d^k}{dt^k} S(t)x = A_k S(t)x = S(t)A_k x, \forall k \in \mathbb{N};$$

3. *$\bigcap\limits_k D(A_k)$ é denso em X.*

Lema 1.13 *Seja A um operador linear fechado de X. Pondo, para cada $x \in D(A_k)$,*

$$|x|_k = \sum_{j=0}^{k} \|A_j x\|$$

o funcional $|\cdot|_k$ é uma norma em $D(A_k)$, e $D(A_k)$ munido dessa norma é um espaço de Banach.

Definição 1.9 *A norma acima é dita norma do gráfico. O espaço de Banach que se obtém munindo $D(A_k)$ da norma acima será representado por $[D(A_k)]$.*

Definição 1.10 *Seja A um operador linear de X. O conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais o operador linear $\lambda I - A$ é inversível, seu inverso é limitado e tem domínio denso em X, é dito conjunto resolvente de A e é representado por $\rho(A)$.*

Seja X um espaço de Banach, X^* o dual de X e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade entre X e X^*. Para cada $x \in X$, definimos

$$J(x) = \left\{x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\right\}.$$

Pelo Teorema de Hanh-Banach, $J(x) \neq \emptyset$, $\forall x \in X$.

Definição 1.11 *Uma aplicação dualidade é uma aplicação* $j : X \longrightarrow X^*$ *tal que* $j(x) \in J(x)$, $\forall x \in X$, *além disso*

$$\|j(x)\| = \|x\|.$$

Definição 1.12 *Diz-se que o operador linear* $A : X \longrightarrow X$ *é dissipativo se, para alguma aplicação dualidade,* j

$$\mathrm{Re}\,\langle Ax, j(x)\rangle \leq 0, \; \forall x \in D(A).$$

Teorema 1.7 (Lumer-Phillips) *Se* A *é um gerador infinitesimal de um semigrupo de contração de classe* C^0, *então*

1. A *é dissipativo;*

2. $R(\lambda I - A) = X$, $\lambda > 0$.

   Reciprocamente, se

1. $D(A)$ *é denso em* X;

2. A *é dissipativo;*

3. $R(\lambda_0 - A) = X$, *para algum* $\lambda_0 > 0$,

então A *é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe* C^0.

Corolário 1.1 *Seja* A *um operador linear fechado, densamente definido tal que* $D(A)$ *e* $R(A)$ *estão ambos num espaço de Banach* X. *Se* A *e seu operador dual* A^* *são ambos dissipativos, então* A *gera um semigrupo de contrações de classe* C^0.

Considere o seguinte problema semilinear de valor inicial

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t, u(t)), \;\; t > t_0, \\ u(t_0) = u_0, \end{array} \right. \tag{1.31}$$

onde A é um gerador infinitesimal de um semigrupo $S(t)$, $t \geq 0$, de classe C^0, com domínio X, Banach, e $f : [t_0, T] \times X \to X$ é contínua em t e satisfaz a condição de Lipschitz em u.

Teorema 1.8 *Seja* $f : [t_0, T] \times X \to X$ *contínua em* $t \in [t_0, T]$ *e uniformemente Lipschitz em* X. *Se* $-A$ *é um gerador infinitesimal de um semigrupo* $S(t)$, $t \geq 0$ *de classe* C^0, *em* X, *então para todo* $u_0 \in X$ *o problema de valor inicial (1.31) possui uma única solução* $u \in C([t_0, T]; X)$. *Além disso, a função* $u_0 \mapsto u$ *é Lipschitz contínua de* X *em* $C([t_0, T]; X)$.

Corolário 1.2 *Se* S *e* f *satisfazem as condições do Teorema 1.8, então para toda* $g \in C([t_0, T]; X)$ *a equação integral*

$$w(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t} T(t-s) f(s, w(s)) \, ds,$$

possui uma única solução $w \in C([t_0, T]; X)$.

Teorema 1.9 *Seja* $f : [t_0, \infty) \times X \to X$ *contínua em* t *para* $t \geq 0$, *localmente Lipschitz em* u *e uniformemente contínua em* t *em intervalos limitados. Se* $-A$ *é um gerador infinitesimal de um semigrupo* $S(t)$, $t \geq 0$ *de classe* C^0, *em* X, *então para todo* $u_0 \in X$ *existe* $t_{\max} \leq \infty$ *tal que o problema de valor inicial (1.31) possui uma única solução* $u \in [0, t_{\max})$. *Além disso, se* $t_{\max} < \infty$ *então*

$$\lim_{t \to t_{\max}} \|u(t)\|_X = \infty.$$

Capítulo 2

Equação de Kawahara com Não Linearidade do Tipo uu_x

Para um número real $T > 0$ denotemos $Q_T = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,L) \subset \mathbb{R},\, t \in (0,T)\}$. Em Q_T consideramos a equação unidimensional não linear de Kawahara

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} - u_{xxxxx} = 0, \tag{2.1}$$

sujeito as condições iniciais e de fronteira, respectivamente dadas por

$$u\,(x,0) = u_0(x), \;\; x \in (0,L)\,, \tag{2.2}$$

$$u\,(0,T) = u\,(L,t) = u_x\,(0,T) = u_x\,(L,t) = u_{xx}\,(L,t) = 0, \;\; t \in (0,T)\,. \tag{2.3}$$

Aqui $u : Q_T \to \mathbb{R}$ é a função desconhecida e os subscritos denotam as derivadas parciais. A partir de agora, $\|\cdot\|$ e $(\cdot,\cdot)$ denotam a norma e o produto interno em $L^2\,(0,L)$, respectivamente. Símbolos como c, c_0, c_i, C, C_0 e C_i, $i \in \mathbb{N}$, são constantes positivas que aparecem durante o texto.

2.1 Solução do Problema Linear

Neste capítulo, com as notações do capítulo anterior, consideramos o seguinte problema de valor inicial e de fronteira:

$$u_t + u_x + u_{xxx} - u_{xxxxx} = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{2.4}$$

$$u(0,t) = u(L,t) = u_x(0,t) = u_x(L,t) = u_{xx}(L,t) = 0, \;\; t \in (0,T), \tag{2.5}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \;\; x \in (0,L), \tag{2.6}$$

onde

$$u_0 \in H^5(0,L). \tag{2.7}$$

Consideramos o problema auxiliar estacionário

$$au + u_x + u_{xxx} - u_{xxxxx} = g, \quad x \in (0,L), \tag{2.8}$$

$$u(0) = u(L) = u_x(0) = u_x(L) = u_{xx}(L) = 0, \tag{2.9}$$

onde a é um número real positivo e $g = g(x)$ é uma função dada. No sistema (2.4)-(2.6) os subscritos denotam as derivadas parciais. Para o problema (2.8)-(2.9), temos o seguinte resultado:

Teorema 2.1 *Seja $g \in H^s(0,L)$, $s \geq 0$. Então para todo $a > 0$ existe única solução $u(x) \in H^{5+s}(0,L)$ de (2.8), (2.9) tais que*

$$\|u\|_{H^{5+s}(0,L)} \leq C(a)\, \|g\|_{H^s(0,L)}.$$

Prova: Ver [13].

Para resolver (2.4)-(2.6) exploramos o método da semi-discretização, ver [26] ou [30]. Definamos

$$h = \frac{T}{N} \;\; \forall N \in \mathbb{N} \text{ e}$$
$$u^n(x) = u(x, nh), \; n = 0, \ldots, N, \text{ com } u^0(x) = u_0(x).$$

Além disso,

$$\left| \begin{array}{l} u_h^n = \dfrac{u^n - u^{n-1}}{h}, \; n = 1, \ldots, N, \\ u_h^0 = u_t(x,0) = f(x,0) - Du_0(x) - D^3 u_0(x) + D^5 u_0(x), \\ f^n(x) = f(x, nh) \quad \text{e} \quad f^0(x) = f(x,0). \end{array} \right.$$

Aproximamos (2.4)-(2.6) pelo seguinte sistema,

$$\frac{u^n}{h} + u_x^n + u_{xxx}^n - u_{xxxxx}^n = f^{n-1} + \frac{u^{n-1}}{h} \quad \forall x \in (0,L), \tag{2.10}$$

$$u^n(0) = u^n(L) = u_x^n(0) = u_x^n(L) = u_{xx}(L) = 0, \tag{2.11}$$

$$u^0(x) = u_0(x), \; x \in (0,L). \tag{2.12}$$

Lema 2.1 *Sejam $u_0 \in L^2(0,L)$ e $f(x,t) \in C^2(Q_T)$. Então, para todo $n = 1, \ldots, N$, as soluções $u^n \in H^5(0,L)$ de (2.10)-(2.12) são unicamente definidas.*

Prova: De fato, como $\frac{1}{h} > 0$ e $f^{n-1} \in L^2(0,L)$ aplicamos o Teorema 2.1 sucessivamente para verificar que todo $u^n(x)$, $n = 1, \ldots, N$, são unicamente definidas e $u^n \in H^5(0,L)$ para todo $h > 0$ fixado. $\blacksquare$

Vamos enunciar o teorema principal desta seção.

Teorema 2.2 *Sejam $u_0 \in H^5(0,L)$ e $f \in H^1(Q_T) \cap L^2(0,T;H^2(0,L))$. Então existe uma única solução $u(x,t)$ de (2.4)-(2.6) tal que*

$$u \in L^\infty\left(0,T;H^5(0,L)\right) \cap L^2\left(0,T;H^7(0,L)\right),$$
$$u_t \in L^\infty\left(0,T;L^2(0,L)\right) \cap L^2\left(0,T;H^2(0,L)\right).$$

Prova:

Existência: Para provar a existência de solução de (2.4)-(2.6) é suficiente passar o limite em (2.10)-(2.12) quando $h \to 0$. Para isto precisamos das estimativas a priori independente de $h > 0$.

Estimativas I:

Multiplicando (2.10) por $2\,(1+x)\,u^n$ e integrando em $(0,L)$, temos

$$\begin{aligned}&\frac{2}{h}\int_0^L \left(u^n-u^{n-1},(1+x)\,u^n\right)dx+2\int_0^L \left((1+x)\,u^n,u_x^n\right)dx+2\int_0^L \left((1+x)\,u^n,u_{xxx}^n\right)dx\\&-2\int_0^L \left((1+x)\,u^n,u_{xxxxx}^n\right)dx=2\int_0^L \left((1+x)\,u^n,f^{n-1}\right)dx.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Analisaremos cada termo de (2.13).

- $I_1=\dfrac{2}{h}\displaystyle\int_0^L \left(u^n-u^{n-1},(1+x)\,u^n\right)dx.$

$$\begin{aligned}I_1&=\frac{2}{h}\int_0^L \left(u^n,(1+x)\,u^n\right)dx-\frac{2}{h}\int_0^L \Big((1+x)\,u^{n-1},u^n\Big)\,dx\\&>\frac{2}{h}\int_0^L (1+x)\,|u^n|^2\,dx-\frac{1}{h}\int_0^L (1+x)\left|u^{n-1}\right|^2dx-\frac{1}{h}\int_0^L (1+x)\,|u^n|^2\,dx\\&=\frac{1}{h}\int_0^L (1+x)\,|u^n|^2\,dx-\frac{1}{h}\int_0^L (1+x)\left|u^{n-1}\right|^2dx.\end{aligned}$$

- $I_2=2\displaystyle\int_0^L \left((1+x)\,u^n,u_x^n\right)dx=-\int_0^L |u^n|^2\,dx.$

- $I_3=2\displaystyle\int_0^L \left((1+x)\,u^n,u_{xxx}^n\right)dx.$

  Notemos que
$$\frac{d}{dx}\left(u^n,u_{xx}^n\right)=\left(u_x^n,u_{xx}^n\right)+\left(u^n,u_{xxx}^n\right).$$
  Assim, utilizando integração por partes e as condições iniciais,
$$\begin{aligned}I_3&=2\int_0^L \frac{d}{dx}\left(u^n,u_{xx}^n\right)(1+x)\,dx-\int_0^L \frac{d}{dx}\,|u_x^n|^2\,(1+x)\,dx\\&=\overbrace{2\,(1+x)\left(u^n,u_{xx}^n\right)\big|_0^L}^{=0}-2\int_0^L \left(u^n,u_{xx}^n\right)dx-\overbrace{(1+x)\,|u^n|^2\big|_0^L}^{=0}+\int_0^L |u_x^n|^2\,dx\\&=-2\int_0^L \left(u^n,u_{xx}^n\right)dx+\|u_x^n\|^2.\end{aligned}$$
  Além disso, temos que
$$\frac{d}{dx}\left(u^n,u_x^n\right)=|u_x^n|^2+\left(u^n,u_{xx}^n\right).$$

Portanto,

$$I_3 = 3 \left\| u_x^n \right\|^2 .$$

- $I_4 = 2\displaystyle\int_0^L \left((1+x)\, u^n, u_{xxxxx}^n \right) dx.$

Observemos que

$$\frac{d}{dx} \left(u^n, u_{xxxx}^n \right) = \left(u_x^n, u_{xxxx}^n \right) + \left(u^n, u_{xxxxx}^n \right).$$

Logo, integrando por partes e usando as condições de fronteira,

$$\begin{aligned} I_4 &= 2\int_0^L \frac{d}{dx} \left(u^n, u_{xxxx}^n \right) (1+x)\, dx - 2\int_0^L \left(u_x^n, u_{xxxx}^n \right) (1+x)\, dx \\ &= \overbrace{2 \left(u^n, u_{xxxx}^n \right) (1+x) \big|_0^L}^{=0} - 2\int_0^L \left(u^n, u_{xxxx}^n \right) dx - 2\int_0^L \left(u_x^n, u_{xxxx}^n \right) (1+x)\, dx \\ &= -2\int_0^L \left(u^n, u_{xxxx}^n \right) dx - 2\int_0^L \left(u_x^n, u_{xxxx}^n \right) (1+x)\, dx. \end{aligned}$$

Observemos que

$$\frac{d}{dx} \left(u^n, u_{xxx}^n \right) = \left(u_x^n, u_{xxx}^n \right) + \left(u^n, u_{xxxx}^n \right) \Rightarrow \left(u^n, u_{xxxx}^n \right) = \frac{d}{dx} \left(u^n, u_{xxx}^n \right) - \left(u_x^n, u_{xxx}^n \right)$$

e

$$\frac{d}{dx} \left(u_x^n, u_{xxx}^n \right) = \left(u_{xx}^n, u_{xxx}^n \right) + \left(u_x^n, u_{xxxx}^n \right) \Rightarrow \left(u_x^n, u_{xxxx}^n \right) = \frac{d}{dx} \left(u_x^n, u_{xxx}^n \right) - \left(u_{xx}^n, u_{xxx}^n \right).$$

Daí,

$$\begin{aligned} I_4 &= \overbrace{-2\int_0^L \frac{d}{dx} \left(u^n, u_{xxx}^n \right) dx}^{=0} + 2\int_0^L \left(u_x^n, u_{xxx}^n \right) dx - 2\int_0^L \frac{d}{dx} \left(u_x^n, u_{xxx}^n \right) (1+x)\, dx \\ &+ \int_0^L \frac{d}{dx} \left| u_{xx}^n \right|^2 (1+x)\, dx = 2\int_0^L \left(u_x^n, u_{xxx}^n \right) dx - \overbrace{2 \left(u_x^n, u_{xxx}^n \right) (1+x) \big|_0^L}^{=0} \\ &+ \int_0^L \left(u_x^n, u_{xxx}^n \right) dx + \left| u_{xx}^n \right|^2 (1+x) \Big|_0^L - \left\| u_{xx}^n \right\|^2 . \end{aligned}$$

Como

$$\frac{d}{dx} \left(u_x^n, u_{xx}^n \right) = \left(u_{xx}^n, u_{xx}^n \right) + \left(u_x^n, u_{xxx}^n \right),$$

segue que,

$$I_4 = -5 \left\| u_{xx}^n \right\|^2 - \left| u_{xx}^n (0) \right|^2 .$$

- $I_5 = 2\displaystyle\int_0^L (1+x)\left(u^n, f^{n-1}\right) dx \leq 2\int_0^L (1+x)\left|u^n\right|\left|f^{n-1}\right| dx \leq \int_0^L (1+x)\left|u^n\right|^2 dx$
$+\displaystyle\int_0^L (1+x)\left|f^{n-1}\right|^2 dx.$

Calculemos $I_1 - I_5$:

$$
\begin{aligned}
I_1 - I_5 &= \tfrac{2}{h}\left(u^n - u^{n-1}, (1+x)\, u^n\right) - 2\left((1+x)\, u^n, f^{n-1}\right) \\
&\geq \frac{\left((1+x), |u^n|^2\right) - \left((1+x), |u^{n-1}|^2\right)}{h} - 2\left(\left((1+x), |u^n|^2\right) + \left((1+x), \left|f^{n-1}\right|^2\right)\right).
\end{aligned}
$$

Substituindo a desigualdade acima em (2.13) segue que

$$
\begin{aligned}
& I_2 = I_1 - I_5 + I_3 + I_4 \geq I_3 + I_4 + \frac{\left((1+x), |u^n|^2\right) - \left((1+x), |u^{n-1}|^2\right)}{h} \\
& -2\left(\left((1+x), |u^n|^2\right) + \left((1+x), |f^{n-1}|^2\right)\right) - 2\left((1+x), |f^{n-1}|^2\right).
\end{aligned}
$$

Multiplicando por h a desigualdade acima temos

$$
\begin{aligned}
& 5h\left\|u^n_{xx}\right\|^2 + 3h\left\|u^n_x\right\|^2 + \left((1+x), |u^n|^2\right) \leq I_3 + I_4 + \left((1+x), |u^n|^2\right) \\
& \leq \left((1+x), |u^{n-1}|^2\right) + 2h\left((1+x), |u^n|^2\right) + 2h\left((1+x), |f^{n-1}|^2\right) + \left\|u^n\right\|^2.
\end{aligned}
$$

Agora, somemos a desigualdade acima de $n = 1$ até $n = l \leq N$,

$$
\begin{aligned}
& \left((1+x), \left|u^l\right|^2\right) + \sum_{n=1}^{l}\left(5\left\|u^n_{xx}\right\|^2 + 3\left\|u^n_x\right\|^2\right) h \leq \left((1+x), |u_0|^2\right) \\
& + \left((1+x), \left|u^l\right|^2\right) 3h + 3\sum_{n=0}^{l-1}\left((1+x), |u^n|^2\right) h + 2\sum_{n=0}^{l-1}\left\|f^n\right\|^2 h,
\end{aligned}
$$

onde $\|f^n\| = \sqrt{\int_0^l (1+x)\left|f^n\right|^2 dx}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
& \left((1+x), \left|u^l\right|^2\right)(1-h) + \sum_{n=1}^{l}\left(5\left\|u^n_{xx}\right\|^2 + 3\left\|u^n_x\right\|^2\right) h \leq \\
& \left\|u_0\right\|^2 + 3\sum_{n=0}^{l-1}\left((1+x), |u^n|^2\right) h + 2\sum_{n=0}^{l-1}\left\|f^n\right\|^2 h,
\end{aligned}
$$

onde $\|u_0\|^2 = \displaystyle\int_0^l (1+x)\,|u_0|^2\,dx$. Tomando $h \in \left(0, \frac{1}{3}\right]$, obtemos

$$\begin{aligned}&\left((1+x)\,,\left|u^l\right|^2\right) + 6\sum_{n=1}^{l}\left(\|u_{xx}^n\|^2 + \|u_x^n\|^2\right)h \leq \\ &4\,\|u_0\|^2 + 4\sum_{n=0}^{l-1}\|f^n\|^2\,h + 2\sum_{n=0}^{l-1}\left((1+x)\,,|u^n|^2\right)h.\end{aligned}$$

Usando o Lema 1.6, para $l = 1, \ldots, N$, segue

$$\left((1+x)\,,\left|u^l\right|^2\right) \leq 4\exp\left(\sum_{n=0}^{N}h\right)\left[\|u_0\|^2 + \sum_{n=0}^{l-1}\|f^n\|^2\,h\right].$$

Como funções escadas, $f^n(x)$, aproximam continuamente a função $f(x,t)$ em t, visto que $f \in C^2(Q_T)$. Por isto, para $h > 0$ suficientemente pequeno, existe uma constante $C(N)$ tal que

$$\lim_{N\to\infty} C(N) = 1 \text{ e } \sum_{n=0}^{N}\|f^n\|^2\,h \leq C(N)\int_0^T \|f\|^2(t)\,dt.$$

De fato,

$$\forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } n > n_0 \Rightarrow \|f^n(x,t) - f(x,t)\| < \epsilon,$$

para x fixo e t qualquer. Assim, temos que

$$\begin{aligned}&\|f^n(x)\| - \|f(x,t)\| \leq \|f^n(x,t) - f(x,t)\| < \epsilon \Rightarrow \\ &\|f^n(x)\| \leq \epsilon + \|f(x,t)\| \Rightarrow \\ &\int_0^T \|f^n(x)\|^2\,dt \leq \epsilon + \int_0^T \|f(x,t)\|^2\,dt \Rightarrow \\ &T\,\|f^n(x)\|^2 \leq \epsilon + \textstyle\int_0^T \|f(x,t)\|^2\,dt.\end{aligned}$$

Somando sobre 0 a N, obtemos

$$\sum_{n=0}^{N}\|f^n(x)\|^2\,h \leq \frac{\epsilon}{N} + \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}\int_0^T \|f(x,t)\|^2\,dt.$$

Daí

$$\sum_{n=0}^{N}\|f^n(x)\|^2\,h \leq \max\left\{\frac{\epsilon}{N}, 1\right\}\int_0^T \|f(x,t)\|^2\,dt.$$

Portanto

$$\sum_{n=0}^{N} \|f^n\|^2 h \leq C(N) \int_0^T \|f\|^2(t)\,dt,$$

onde $C(N) = \max\left\{\frac{\epsilon}{N}, 1\right\}$ e $\lim\limits_{N\to\infty} C(N) = 1.$

Agora, escolhendo $\bar{h} > 0$ de tal modo que a constante $C(N)$ não cresça, temos que para $h \in \left(0, \bar{h}\right)$,

$$\left\|u^l\right\|^2 \leq 4e^{2t} C_1 \left(\|u_0\|^2 + 2\int_0^T \|f(t)\|^2\,dt\right),$$

e, finalmente,

$$\left\|u^l\right\|^2 + \sum_{n=1}^{l} \left(\|u_{xx}^n\|^2 + \|u_x^n\|^2\right) h \leq C\left(\|u_0\|^2 + \int_0^T \|f(t)\|^2\,dt\right). \tag{2.14}$$

Estimativas II:

Definindo $f_h^n = \frac{f^n(x) - f^{n-1}(x)}{h}$, escrevemos (2.10)-(2.12) como

$$\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{h} + u_{x,h}^n + u_{xxx,h}^n - u_{xxxxx,h}^n = f_h^{n-1},\ x \in (0, L), \tag{2.15}$$

$$u_h^n(0) = u_h^n(L) = u_{x,h}^n(0) = u_{x,h}^n(L) = u_{xx,h}^n(L) = 0,\ n = 1, \ldots, N, \tag{2.16}$$

$$u_h^0(x) = u_t(x,0),\ f_h^0(x) = f_t(x,0),\ x \in (0, L). \tag{2.17}$$

Multipliquemos (2.15) por $2(1+x)\,u_h^n$ e integremos em $(0, L)$. Assim

$$\begin{aligned}&\frac{2}{h}\int_0^L \left(u_h^n - u_h^{n-1}, (1+x)\,u_h^n\right) dx + 2\int_0^L \left((1+x)\,u_h^n, u_{x,h}^n\right) + 2\int_0^L \left((1+x)\,u_h^n, u_{xxx,h}^n\right) dx \\ &-2\int_0^L \left((1+x)\,u_h^n, u_{xxxxx,h}^n\right) dx = 2\int_0^L \left((1+x)\,u_h^n, f_h^{n-1}\right) dx.\end{aligned} \tag{2.18}$$

Analisando (2.18) termo a termo, encontramos, como feito para (2.13), o seguinte:

$$I_1 = \frac{2}{h}\int_0^L \left(u_h^n - u_h^{n-1}, (1+x)\, u_h^n\right) > \frac{1}{h}\int_0^L (1+x)\left|u_h^n\right|^2 dx - \frac{1}{h}\int_0^L (1+x)\left|u_h^{n-1}\right|^2 dx,$$

$$I_2 = 2\int_0^L \left((1+x)\, u_h^n, u_{x,h}^n\right) dx = -\left\|u_h^n\right\|^2,$$

$$I_3 = 2\int_0^L \left((1+x)\, u_h^n, D^3 u_h^n\right) dx = 3\left\|Du_h^n\right\|^2,$$

$$I_4 = -2\int_0^L \left((1+x)\, u^n, D^5 u^n\right) = 5\left\|D^2 u_h^n\right\|^2 + \left|D^2 u_h^n(0)\right|^2,$$

$$I_5 = 2\int_0^L (1+x)\left(u^n, f^{n-1}\right) \leq \int_0^L (1+x)\left|u_h^n\right|^2 dx + \int_0^L (1+x)\left|f_h^{n-1}\right|^2 dx.$$

Assim, utilizando os mesmos artifícios que na estimativa I, ou seja, o Lema 1.6, e as aproximações das funções escadas f_h^n continuamente a função $f(x,t)$ em t, concluímos

$$\left\|u_h^l\right\|^2 + \sum_{n=1}^{l}\left(\left\|u_{xx,h}^n\right\|^2 + \left\|u_{x,h}^n\right\|^2\right) h \leq C\left(\left\|u_0\right\|^2 + \int_0^T \left\|f_t(t)\right\|^2 dt\right). \tag{2.19}$$

Como $H^5(0,L) \hookrightarrow L^2(0,T)$, pela desigualdade (2.19), obtemos

$$\left\|u_h^l\right\|^2 + \sum_{n=1}^{l}\left(\left\|u_{xx,h}^n\right\|^2 + \left\|u_{x,h}^n\right\|^2\right) h \leq C_2\left(\left\|u_0\right\|_{H^5(0,L)}^2 + \int_0^T \left\|f_t(t)\right\|^2 dt\right). \tag{2.20}$$

Agora vamos escrever (2.10) na forma:

$$u^n + u_x^n + u_{xxx}^n - u_{xxxxx}^n = -u_h^n + u^n,\ x \in (0,L). \tag{2.21}$$

O problema (2.21), (2.11) é exatamente o problema (2.8), (2.9) com $a = 1$ e $g(x) = (-u_h^n + u^n)(x) \in L^2(0,L)$. Observe que quando tomarmos o limite quando $h \to 0$ em $g(x)$, temos a convergência uniforme em n. Portanto, pelo Teorema 2.1, $u^n \in H^5(0,L)$, para todo $n = 1, \ldots, N$ e, devido as estimativas (2.14), (2.20) e o fato de que $H^5(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L)$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left\|u_h^n\right\|^2 + \left\|u^n\right\|_{H^5(0,L)}^2 + \sum_{k=1}^{n}\left\|u_{xx,h}^k\right\|^2 h \leq C\left\|g\right\|^2 \\
&\leq 2C\left(\left\|u_h^n\right\|^2 + \left\|u^n\right\|^2\right) \\
&\leq C_3\left(\left\|u_0\right\|_{H^5(0,L)}^2 + \int_0^T \left[\left\|f(t)\right\|^2 + \left\|f_t(t)\right\|^2\right] dt\right),
\end{aligned} \tag{2.22}$$

onde C_3 é uma constante positiva que não depende de $h > 0$.

Segue de (2.22) que, para todo $h > 0$ suficientemente pequeno, existe funções interpolações de $u^n(x)$ e $u_h^n(x)$ denotada por $U^n(x,t)$ e $\tilde{U}^n(x,t)$, respectivamente, tais que:

$$U^n(x,nh) = u^n(x) \quad \text{e} \quad \tilde{U}^n(x,nh) = u_h^n(x).$$

Variando $h > 0$, temos duas sequências $\{U^n\}$ e $\left\{\tilde{U}^n\right\}$ satisfazendo as estimativas (2.22). A Teoria das Diferenças Finitas (ver [26] ou [30]), juntamente com (2.22) garante que:

$$U^n \to u \quad fraco - * \ \text{ em } L^\infty\left(0,T;H^5(0,L)\right), \tag{2.23}$$

$$\tilde{U}^n \to u_t \quad fraco - * \ \text{ em } L^\infty\left(0,T;L^2(0,L)\right), \tag{2.24}$$

$$\tilde{U}^n \to u_t \quad fraco \ \text{ em } L^2\left(0,T;H^2(0,L)\right). \tag{2.25}$$

Isto significa que podemos passar ao limite, $h \to 0$, em (2.10) e (2.11), para obtermos uma solução de (2.4)-(2.6). Assim, multiplicando (2.10) por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando de 0 a T, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left(\tilde{U}^n, v\right)\theta(t)\,dt + \int_0^T \left(U_x^n, v\right)\theta(t)\,dt + \int_0^T \left(U_{xxx}^n, v\right)\theta(t)\,dt \\ &- \int_0^T \left(U_{xxxxx}^n, v\right)\theta(t)\,dt = \int_0^T \left(f^{n-1}, v\right)\theta(t)\,dt, \end{aligned} \tag{2.26}$$

para todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, $v \in L^2(0,T;H^2(0,L)) \cap H^1(Q_T)$. Agora, usando as convergências e fazendo $h \to 0$, concluímos,

$$\begin{aligned} &\int_0^T (u_t, v)\,\theta(t)\,dt + \int_0^T (u_x, v)\,\theta(t)\,dt + \int_0^T (u_{xxx}, v)\,\theta(t)\,dt \\ &- \int_0^T (u_{xxxxx}, v)\,\theta(t)\,dt = \int_0^T (f(t), v)\,\theta(t)\,dt. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Podemos ver (2.27) como

$$u_t + u_x + u_{xxx} - u_{xxxxx} = f \quad \text{em } \ \mathcal{D}'(Q_T).$$

Notemos que $f \in C^2(Q_T) \overset{d}{\hookrightarrow} H^1(Q_T) \cap L^2(0,T;H^2(0,L))$, onde $\overset{d}{\hookrightarrow}$ representa uma imersão densa. Daí, $f(t) \in H^2(0,L)$ e, portanto, segue do Teorema 2.1 que $u(t) \in H^7(0,L)$. Portanto temos a existência da função $u = u(x,t)$ solução de (2.4)-(2.6).

Unicidade: Agora, por (2.14), quando $h \to 0$, temos:

$$\|u(t)\|^2 \leq C\left(\|u_0\|^2 + \int_0^T \|f(t)\|^2\, dt\right). \tag{2.28}$$

Suponhamos $w = u_1 - u_2$, onde u_1 e u_2 são duas soluções do problema (2.4)-(2.6), temos que w satisfaz o seguinte sistema

$$\left|\begin{array}{l} w_t + w_x + w_{xxx} - w_{xxxxx} = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \\ w(0,t) = w(L,t) = w_x(0,t) = w_x(L,t) = w_{xx}(L,t) = 0, \;\; t \in (0,T), \\ w(x,0) = 0, \quad x \in (0,L). \end{array}\right.$$

Segue de (2.28) que,

$$\|w(t)\|^2 = \|u_1 - u_2\|^2 \leq 0,$$

Assim, $u_1 = u_2$, concluindo a demonstração do Teorema 2.2. ■

2.2 Problema Não Linear: Solução Local

Nesta seção provaremos a existência de solução local para o seguinte problema não linear:

$$u_t + u_x + u_{xxx} - u_{xxxxx} = -uu_x, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{2.29}$$

$$u(0,T) = u(L,t) = u_x(0,T) = u_x(L,t) = u_{xx}(L,t) = 0, \;\; t \in (0,T), \tag{2.30}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \; x \in (0,L). \tag{2.31}$$

O resultado central dessa seção será enunciado como:

Teorema 2.3 *Sejam $T_0 > 0$, $u_0(x) \in H^5(0,L)$ dados satisfazendo (2.3). Então existe um número real $T \in (0,T_0]$ tal que (2.29)-(2.31) possui única solução em Q_T na classe*

$$u \in L^\infty\left(0,T; H^5(0,L)\right) \cap L^2\left(0,T; H^7(0,L)\right),$$
$$u_t \in L^\infty\left(0,T; L^2(0,L)\right) \cap L^2\left(0,T; H^2(0,L)\right).$$

Prova: Esta prova basea-se no Teorema do Ponto Fixo de Banach. Seja V o espaço de Banach,

$$V = \left\{v : Q_T \to \mathbb{R},\ v \in L^\infty\left(0,T;H^5(0,L)\right),\ v_t \in L^\infty\left(0,T;L^2(0,L)\right) \cap L^2\left(0,T;H^2(0,L)\right),\right.$$
$$\left. v(0,t) = v(L,t) = v_x(0,t) = v_x(L,t) = v_{xx}(L,t) = 0 \text{ e } v(x,0) = u_0(x)\right\},$$

com a norma

$$\|v\|_V^2 = \sup_{t\in(0,T)} \left\{\|v\|^2(t) + \|v_t\|^2(t)\right\} + \sum_{i=1}^{2} \int_0^L \left[\left\|\frac{d^i}{dx^i}v\right\|^2(t) + \left\|\frac{d^i}{dx^i}v_t\right\|^2(t)\right] dt.$$

Defina $\mathcal{B}_R = \left\{v \in V; \|v\|_V^2 \le 8R^2\right\}$ e $R > 1$ tal que

$$2\left(\|u_0\|_{H^5(0,L)}^2 + \left\|u_0\frac{d}{dx}(u_0)\right\|^2\right) \le R^2.$$

Para qualquer $v \in \mathcal{B}_R$ consideramos a equação linear

$$u_t + u_x + u_{xxx} - u_{xxxxx} = -vv_x,\ (x,t) \in Q_T, \tag{2.32}$$

sujeita a (2.30) e (2.31).

Vamos mostrar que $f = -vv_x$ satisfaz as condições do Teorema 2.2. Notemos que

$$\begin{aligned}
\left|v^2(x,t)\right| &= \left|\overbrace{\lim_{x\to\infty} v^2(x,t)}^{=0} - v^2(x,t)\right| = \left|\int_x^\infty \frac{d}{dx}\left(v^2(x,t)\right)dx\right| \\
&= \int_x^\infty |2v(x,t)\,v_x(x,t)|\,dx \le 2\int_{Q_T} |v(x,t)\,v_x(x,t)| \\
&\le 2\,\|v(t)\|\,\|v_x(t)\| < \infty.
\end{aligned}$$

Logo existe o $\sup\limits_{x\in(0,L)} |v(x,t)|$. Portanto, pela definição da norma no espaço V, temos

$$\int_0^T\int_0^L |vv_x|^2\,dxdt \le \sup_{t\in(0,T)}\left(\sup_{x\in(0,L)} |v(x,t)|^2\right)\int_0^T\int_0^L |v_x(x,t)|^2\,dxdt < \infty.$$

Assim $f = -vv_x$ satisfaz as condições do Teorema 2.2. Portanto, para todo $v \in \mathcal{B}_R$, existe uma única função u_v à qual resolve (2.32) com as condições iniciais (2.30) e (2.31). Além disso, tal função satisfaz às seguintes condições

$$u_v(x,t) \in L^{\infty}\left(0,T;H^5(0,L)\right),$$
$$u_{vt}(x,t) \in L^{\infty}\left(0,T;L^2(0,L)\right) \cap L^2\left(0,T;H^2(0,L)\right).$$

Em outras palavras, podemos definir em V um operador P relacionado com (2.32) com as condições (2.30) e (2.31) tal que

$$u_v = Pv.$$

Lema 2.2 *Para $T = T(R) > 0$ suficientemente pequeno, P é uma função de $\mathcal{B}_R$ em $\mathcal{B}_R$.*

Prova: Para mostrarmos este lema é suficiente algumas estimativas à priori:

Estimativas I:

Multiplicando (2.32) por $2(1+x)u$ e integrando em $(0,L)$, obtemos

$$\overbrace{2\int_0^L u_t(1+x)\,udx}^{=I_1} + \overbrace{2\int_0^L u_x(1+x)\,udx}^{=I_2} + \overbrace{2\int_0^L (1+x)\,uu_{xxx}dx}^{=I_3}$$
$$\underbrace{-2\int_0^L (1+x)\,uu_{xxxxx}dx}_{}\!\!\!{}^{=I_4} = \overbrace{-2\int_0^L (1+x)\,uvv_xdx}^{=I_5}.$$

Analisaremos a igualdade acima termo a termo.

- $I_1 = \dfrac{d}{dt}\left((1+x), u^2(t)\right)$.

  Notemos que pelas **Estimativas I** da Seção 2.1 deste mesmo capítulo, fazendo $u = u^n$, obtemos

- $I_2 = -\|u\|^2$,

- $I_3 = 3\|u_x\|^2$,

- $I_4 = -5\|u_{xx}\|^2 - |u_{xx}(0,t)|^2$,

- $I_5 = 2(vv_x, (1+x)u)(t)$.

Assim, a igualdade acima é dada por

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\left(1+x\right),u^2\right)(t)+3\left\|u_x\right\|^2(t)+5\left\|u_{xx}\right\|^2(t)\\
&+\left|u_{xx}\left(0,t\right)\right|^2=-2\left(vv_x,\left(1+x\right)u\right)(t)+\left\|u\right\|^2(t)\,.
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

Vamos estimar o termo I_5. Utilizando as desigualdades de Cauchy-Schwartz e Young, temos

$$
\begin{aligned}
I_5 &\leq \int_0^L \left|vv_x\right|^2 dx+\int_0^L \left(1+x\right)^2\left|u\right|^2 dx\\
&\leq \left\|vv_x\right\|^2+\Big(\left(1+x\right),u^2\Big)(t)\,.
\end{aligned}
$$

Portanto, como, pela desigualdade de Poincaré, $\left\|v\right\|\leq L\left\|v_x\right\|$, segue que

$$
\begin{aligned}
I_4 &\leq \Big(\left(1+x\right),u^2\Big)(t)+2\left\|vv_x\right\|^2(t)\\
&\leq \Big(\left(1+x\right),u^2\Big)(t)+2L\left\|v_x\right\|^4(t)\\
&\leq \Big(\left(1+x\right),u^2\Big)(t)+2L\left[\underbrace{\left(\int_0^L \left|v_x\right|^2 dx\right)}_{=I_6}\right]^2.
\end{aligned}
$$

Notemos que, derivando o último termo da desigualdade acima em relação a t e integrando I_6 sobre $(0,T)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
I_6 &= \int_0^T\int_0^L \frac{d}{dt}\left|v_x\right|^2 dtdx=\int_0^T\int_0^L 2v_x\frac{d}{dt}v_x dt=2\int_0^L\left\{\left[\left(v_x\right)^2\right]_0^T-\int_0^T v_x\frac{d}{dx}\left(v_t\right)dt\right\}dx\\
&\leq 2\int_0^L\left|\frac{d}{dx}\left(u_0\right)\right|^2 dx+\int_0^L\int_0^T\left|v_x\right|^2 dxdt+\int_0^L\int_0^T\left|\frac{d}{dx}v_t\right|^2 dxdt\\
&= 2\left\|\frac{d}{dx}\left(u_0\right)\right\|^2+\int_0^T\left\|v_x\right\|^2 dt+\int_0^T\left\|\frac{d}{dx}\left(v_t\right)\right\|^2 dt.
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
2L\left\|v_x\right\|^4(t) &\leq 2L\left(\left\|\frac{d}{dx}\left(u_0\right)\right\|^2+\frac{1}{2}\int_0^T\left\|v_x\right\|^2 dt+\frac{1}{2}\int_0^T\left\|\frac{d}{dx}\left(v_t\right)\right\|^2 dt\right)^2\\
&\leq 2L\left(\frac{R^2}{2}+\frac{16R^2}{2}\right)=\frac{17^2}{2}LR^4,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
I_4 &\leq \left((1+x)\,,u^2\right)(t) + \frac{17^2}{2} L R^4 + I_2 \\
&\leq 2\left((1+x)\,,u^2\right)(t) + \frac{17^2}{2} L R^4.
\end{aligned}
$$

Substituindo I_4 em (2.33) e integrando sobre $(0,t)$, temos

$$
\begin{aligned}
&((1+x)\,,u^2)(t) + \int_0^t \left(\|u_x\|^2(\tau) + \|u_{xx}\|^2(\tau)\right) d\tau \leq \\
&\leq ((1+x)\,,u_0^2) + \frac{17^2}{2} L R^4 + 2\int_0^t ((1+x)\,,u^2)(\tau)\, d\tau.
\end{aligned} \tag{2.34}
$$

Daí, usando o Lema 1.5,

$$
\|u\|^2(t) \leq \left((1+x)\,,u^2\right)(t) \leq e^T \left(\|u_0\|^2 + \frac{17^2}{2} L T R^4\right).
$$

Escolhendo $T > 0$ tal que,

$$
0 < e^T \leq 2 \quad \text{e} \quad 1 + \frac{17^2}{2} L T R^2 \leq 2, \tag{2.35}
$$

e, como,

$$
\|u_0\|^2 \leq C \|u_0\|^2_{H^5(0,L)},
$$

obtemos, utilizando (2.35), que

$$
\|u\|(t) \leq \left((1+x)\,,u^2\right)(t) \leq 4R^2,\ t \in (0,T).
$$

Portanto, a inequação (2.34) implica,

$$
\|u\|^2(t) + \int_0^t \left(\|u_x\|^2(\tau) + \|u_{xx}\|^2(\tau)\right) d\tau \leq R^2 + 4TR^2 + \frac{17^2}{2} L T R^4 = R^2 + TR^2\left(4 + \frac{17^2}{2} L R^2\right).
$$

Tomando T satisfazendo (2.35) e tal que

$$
\left(4 + \frac{17^2}{2} L R^2\right) T \leq 3, \tag{2.36}
$$

temos,

$$
\|u\|^2(t) + \int_0^t \left(\|u_x\|^2(\tau) + \|u_{xx}\|^2(\tau)\right) d\tau \leq 4R^2,\ t \in (0,T). \tag{2.37}
$$

Estimativas II:

Diferenciando (2.32) com respeito a t,

$$u_{tt} + u_{tx} + u_{txxx} - u_{txxxxx} = -v_t v_x - v v_{tx}.$$

Multiplicando a igualdade acima por $2(1+x)u_t$ e integrando em $(0,L)$, obtemos

$$\begin{aligned}&2\int_0^L (1+x)\,u_{tt}u_t dx + 2\int_0^L u_{tx}(1+x)\,u_t dx + 2\int_0^L u_{txxx}(1+x)\,u_t dx \\ &-2\int_0^L u_{txxxxx}(1+x)\,u_t dx = 2\int_0^L (-v_t v_x)(1+x)\,u_t dx + 2\int_0^L (-v v_t)(1+x)\,u_t dx.\end{aligned}$$

Analisando a igualdade acima termo a termo, temos:

$$\begin{aligned}&I_1 = 2\int_0^L (1+x)\,u_{tt}u_t dx = \int_0^L \frac{d}{dt}(1+x)\,u_t^2 = \frac{d}{dt}\int_0^L (1+x)\,u_t^2 dx = \frac{d}{dt}\left((1+x)\,,u_t^2(t)\right), \\ &I_2 = 2\int_0^L u_{tx}(1+x)\,u_t dx = -\|u_t\|^2, \\ &I_3 = 2\int_0^L u_{txxx}(1+x)\,u_t dx = 3\|u_{tx}\|^2, \\ &I_4 = -2\int_0^L u_{txxxxx}(1+x)\,u_t dx = 5\|u_{txx}\|^2 - |u_{txx}(0,t)|^2.\end{aligned}$$

Analisaremos $I_5 = 2\int_0^L (-v_t v_x)(1+x)\,u_t dx + 2\int_0^L (-v v_t)(1+x)\,u_t dx$. Integrando por parte cada termo, segue que

$$-2\int_0^L v_t v_x (1+x)\,u_t dx = \overbrace{-2\,(1+x)\,v_t u_t v|_0^L}^{=0} + 2\int_0^L v v_t u_t dx = 2\int_0^L v v_t u_t dx$$

e

$$\begin{aligned}-2\int_0^L v\left(\frac{d}{dx}v_t\right)(1+x)\,u_t dx &= \overbrace{-2\,v\,(1+x)\,u_t v_t|_0^L}^{=0} + 2\int_0^L v_t(1+x)\,v u_{tx} dx \\ &= 2\int_0^L v v_t (1+x)\,u_{tx} dx.\end{aligned}$$

Portanto temos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left((1+x)\,,u_t^2\right) + 5\|u_{txx}(t)\|^2 + 3\|u_{tx}(t)\|^2 + |u_{txx}(0,t)|^2 \\ &= 2\int_0^L \left(v v_t u_t + v v_t (1+x)\,u_{tx}\right) dx + \|u_t(t)\|^2.\end{aligned} \tag{2.38}$$

Agora vamos estimar o lado direito da igualdade (2.38). Escrevendo em termos de produto interno, utilizando as desigualdades de Cauchy-Schwartz e Young, obtemos

$$
\begin{aligned}
&I_6 = 2\left(vv_t, (1+x)\,u_{tx} + u_t\right)(t) \le \left((1+x)\,, v^2 v_t^2\right)(t) + \left((1+x)\,, |u_{tx}|^2\right)(t) \\
&+ \|vv_t\|^2(t) + \|u_t\|^2(t) = \left((1+x)\,, (vv_t)(vv_t)\right)(t) + \left((1+x)\,, |u_{tx}|^2\right)(t) \\
&+ \|vv_t\|^2(t) + \|u_t\|^2(t) \le 3\,\|vv_t\|^2(t) + 2\,\|u_{tx}\|^2(t) + \left((1+x)\,, u_t^2\right)(t)\,.
\end{aligned}
$$

Assim, utilizando a desigualdade de Poincaré, $\|v\| \le L\,\|v_x\|$, segue,

$$
I_6 \le 3L\,\|v_x\|^2\,\|v_t\|^2 + 2\,\|u_{tx}\|^2 + \left((1+x)\,, u_t^2\right).
$$

Como foi visto nas **Estimativas I,**

$$
\|v_x\|^2 \le \left\|\frac{d}{dx}u_0\right\|^2 + \int_0^T \left(\|v_x\|^2 + \|v_{tx}\|^2\right) dt.
$$

Daí, integrando de 0 a T,

$$
\begin{aligned}
I_6 &\le 3L\left(\left\|\frac{d}{dx}u_0\right\|^2 + \int_0^T \left(\|v_x\|^2 + \|v_{tx}\|^2\right) dt\right)\|v_t\|^2 + 2\,\|u_{tx}\|^2 + \left((1+x)\,, u_t^2\right) \\
&\le 3L\left(\frac{R^2}{2} + 8R^2\right) 8R^2 + 2\,\|u_{tx}\|^2 + \left((1+x)\,, u_t^2\right).
\end{aligned}
$$

Então

$$
I_6 \le 204LR^4 + 2\,\|u_{tx}\|^2 + \left((1+x)\,, u_t^2\right) + I_2.
$$

Substituindo I_6 em (2.38) e integrando sobre $(0,t)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\left((1+x)\,, u_t^2\right)(t) + \int_0^t \left(\|u_{\tau x}\|^2 + \|u_{\tau xx}\|^2\right) d\tau \le \\
&3\int_0^t \left((1+x)\,, u_\tau^2\right) d\tau + 204LTR^4 + \left((1+x)\,, u_t^2(0)\right).
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

Pelo Lema 1.5,

$$
\|u_t\|^2(t) \le \left((1+x)\,, u_t^2\right)(t) \le e^T\left(2\,\|u_t\|^2(0) + 204LTR^4\right).
$$

Escolhendo $T > 0$ tal que,

$$
0 < e^T \le 2 \;\text{ e } 204LTR^2 < 1 \tag{2.40}
$$

assim,

$$\begin{aligned}
\|u_t\|^2(t) &\leq 2\left(2\|u_t\|^2(0)+204LTR^4\right)\\
&\leq 2\left[2\left(\|u_0\|^2_{H^5(0,L)}+\left\|u_0\frac{d}{dx}(u_0)\right\|^2\right)+204LTR^4\right]\\
&\leq 2\left(1+204LTR^2\right)R^2\\
&\leq 4R^2.
\end{aligned}$$

Retornando para (2.39), obtemos

$$\begin{aligned}
&\|u_t\|^2(t)+\int_0^t\left(\|u_{\tau x}\|^2+\|u_{\tau xx}\|^2\right)d\tau\\
&\leq 2\|u_t(0)\|^2+4TR^2+204LTR^4\leq R^2+4R^2\left(1+51R^2L\right)T,
\end{aligned}$$

onde $t\in(0,T)$. Tomando $T>0$ tal que

$$4\left(1+51R^2L\right)T\leq 3, \tag{2.41}$$

segue que

$$\|u_t\|^2(t)+\int_0^t\left(\|u_{\tau x}\|^2+\|u_{\tau xx}\|^2\right)d\tau\leq 4R^2, t\in(0,T).$$

Somando (2.37) com a desigualdade acima, temos

$$\|u\|^2(t)+\|u_t\|^2(t)+\sum_{i=1}^{2}\int_0^t\left[\left(\left\|\frac{d^i}{dx^i}u\right\|^2(\tau)+\left\|\frac{d^i}{dx^i}u_\tau\right\|^2(\tau)\right)d\tau\right]\leq 8R^2.$$

Assim, concluímos que

$$\sup_{t\in(0,T)}\left(\|u\|^2(t)+\|u_t\|^2(t)\right)+\sum_{i=1}^{2}\int_0^t\left[\left(\left\|\frac{d^i}{dx^i}u\right\|^2(\tau)+\left\|\frac{d^i}{dx^i}u_\tau\right\|^2(\tau)\right)d\tau\right]\leq 8R^2,$$

o que prova o Lema 2.2.

Lema 2.3 *Para $T>0$ suficientemente pequeno, P é uma contração.*

Prova: Para v_1, $v_2\in B_R$ arbitrários, denotaremos

$$u_i=Pv_i,\ \ i=1,2,\ \ s=v_1-v_2\ \text{ e }\ z=u_1-u_2.$$

Então z satisfaz o seguinte problema:

$$z_t + z_x + z_{xxx} - z_{xxxxx} = -\frac{1}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right)_x, \ (x,t) \in Q_T, \tag{2.42}$$

$$z(0,t) = z(L,t) = z_x(0,t) = z_x(L,t) = z_{xx}(L,t) = 0, \ t \in (0,T), \tag{2.43}$$

$$z(x,0) = 0, \ x \in (0,L). \tag{2.44}$$

Estimativas III:

Multiplicando (2.42) por $2(1+x)z$, e utilizando o mesmo procedimento feito nas **Etimativas I** desta seção, obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left((1+x), z^2\right)(t) + 5\|z_{xx}\|^2(t) + 3\|z_x\|^2(t) + |z_{xx}(0,t)|^2 \\ &= (s(v_1+v_2), (1+x)z_x + z)(t) + \|z\|^2(t). \end{aligned} \tag{2.45}$$

Vamos estimar $I = (s(v_1+v_2), (1+x)z_x + z)(t)$. Utilizando as desigualdades de Cauchy–Schwarz, Young e Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned} I &\leq \|s(v_1+v_2)\|^2 + \|z_x\|^2 + \left((1+x), z^2\right) \\ &\leq L\|(v_1+v_2)_x\|\|s\|(t) + \|z_z\|^2(t) + \left((1+x), z^2\right) \\ &\leq \underbrace{2L\left(\|(v_1)_x\|^2(t) + \|(v_2)_x\|^2(t)\right)}_{=\tilde{I}}\|s\|(t) + \|z_x\|^2(t) + \left((1+x), z^2\right)(t). \end{aligned}$$

Observemos que utilizando integração por partes e a desigualdade de Young, $\tilde{I}$ será dado por,

$$\begin{aligned} &2L\sum_{i=1}^{2}\left(\int_0^T\int_0^L \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dx}v_i\right)^2 dxdt\right) = 2L\sum_{1=1}^{2}\left(\int_0^L\int_0^T 2\frac{d}{dx}(v_i)\frac{d}{dx}(v_{it})\,dtdx\right) \\ &= 4L\sum_{i=1}^{2}\left(\left(\int_0^L \frac{d}{dx}(v_i)\frac{d}{dx}(v_i)\bigg|_0^T - \int_0^L\int_0^T \frac{d}{dx}(v_i)\frac{d}{dx}(v_{it})\,dt\right)dx\right) \\ &\leq 4L\sum_{i=1}^{2}\left(\left(\|v_{ix}\|^2(0)\right) - \int_0^T\left(\|v_{ix}\|^2(t) - \|v_{ixt}\|^2(t)\right)dt\right). \end{aligned}$$

Assim, substituindo $\tilde{I}$, obtemos

$$\begin{aligned} &I \leq L\sum_{i=1}^{2}4\left\{\|v_{ix}\|^2(0) + 2\int_0^T\left(\|v_{ix}\|^2(t) + \|v_{itx}\|^2(t)\right)dt\right\}\|s\|^2(t) + \ \|z_x\|^2(t) \\ &+ \left((1+x), z^2\right)(t) \leq \left[\left\{4L\left(\frac{R^2}{2}\right) + (8LR^2)\right\}\sup_{t\in(0,T)}\|s\|^2(t) + \|z_x\|^2(t) + \left((1+x), z^2(t)\right)\right]. \end{aligned}$$

Substituindo I em (2.45) e integrando em $(0,t)$, temos

$$\begin{aligned}&\left((1+x),z^2\right)(t)+\int_0^t\left(\|z_x\|^2(\tau)+\|z_{xx}\|^2(\tau)\right)d\tau\\&\leq\int_0^t\left((1+x),z^2\right)(\tau)\,d\tau+10LTR^2\sup_{t\in(0,T)}\|s\|^2(t)\,.\end{aligned}\tag{2.46}$$

Pelo Lema 1.5,

$$\|z\|^2(t)\leq\left((1+x),z^2\right)(t)\leq e^T10LTR^2\sup_{t\in(0,T)}\|s\|^2(t)\,.$$

Tomando $T>0$ tal que

$$10TR^2Le^T<\frac{1}{4},\tag{2.47}$$

segue que

$$\|z\|^2(t)\leq\left((1+x),z^2\right)(t)\leq\frac{1}{4}\sup_{t\in(0,T)}\|s\|^2(t)\,,\,t\in(0,T)\,.$$

Portanto temos de (2.46)

$$\begin{aligned}&\|z\|^2(t)+\int_0^t\left(\|z_x\|^2(\tau)+\|z_{xx}\|^2(\tau)\right)d\tau\\&\leq\frac{T}{4}\sup_{t\in(0,T)}\|s\|^2(t)+\frac{1}{4}\left(\|s\|^2(t)+\sum_{i=1}^2\int_0^T\left\|\frac{d^ix}{dx^i}(s)\right\|^2(t)\,dt\right)\end{aligned}$$

e, escolhendo $T<1$, obtemos

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in(0,T)}\|z\|^2(t)+\int_0^t\left(\|z_x\|^2(\tau)+\|z_{xx}\|^2(\tau)\right)d\tau\leq\\&\frac{1}{2}\left(\sup_{t\in(0,T)}\|s\|^2(t)+\sum_{i=1}^2\int_0^T\left\|\frac{d^ix}{dx^i}(s)\right\|^2(t)\,dt\right).\end{aligned}\tag{2.48}$$

Estimativas IV:

Diferenciando (2.42) com respeito a t, multiplicando por $2(1+x)z_t$ e utilizando o mesmo precesso das **Estimativas II**, obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left((1+x),z_t^2\right)(t)+5\|z_{txx}\|^2+3\|z_{tx}\|^2(t)+|z_{txx}(0,t)|^2\\&=\left([v_1s_t+v_{2t}s],z_t+(1+x)z_{tx}\right)(t)+\|z_t\|^2(t)\,.\end{aligned}\tag{2.49}$$

Vamos estimar o seguinte termo:

$$
\begin{aligned}
I + \|z_t\|^2(t) &= \left([v_1 s_t + v_{2t} s], z_t + (1+x) z_{tx}\right)(t) + \|z_t\|^2(t) \\
&\leq \|v_1 s_t + v_{2t} s\|^2(t) + \|z_{tx}\|^2(t) + \left((1+x), z_t^2\right)(t) + \|z_t\|^2(t) \\
&\leq \|z_{tx}\|^2(t) + \left((1+x), z_t^2\right)(t) + \|v_1 s_t\|^2(t) + \|v_{2t} s\|^2(t) + \|z_t\|^2(t) \\
&\leq \|z_{tx}\|^2(t) + 2\left((1+x), z_t^2\right)(t) + 2L\|v_{1x}\|^2(t)\|s_t\|(t) + 2L\|s_x\|^2(t)\|v_{2t}\|^2(t).
\end{aligned}
$$

Donde, usando integração por partes e a desigualdade de Young,

$$
\begin{aligned}
I &\leq \|z_{tx}\|^2(t) + 2\left((1+x), z_t^2\right)(t) + 16R^2L\int_0^T \left[\|s_x\|^2(t) + \|s_{tx}\|^2(t)\right] dt \\
&+ 2L\left(\left\|\frac{d}{dx}(u_0)\right\|^2 + \int_0^T \left[\|v_{1x}\|^2(t) + \|v_{1tx}\|^2(t)\right] dt\right) \sup_{t\in(0,T)} \|s_t\|^2(t) \\
&\leq \|z_{tx}\|^2(t) + 2\left((1+x), z_t^2\right)(t) + 16R^2L\int_0^T \left[\|s_x\|^2(t) + \|s_{tx}\|^2(t)\right] dt \\
&+ \left[2L\left(\frac{R^2}{2}\right) + (8R^2L)\right] \sup_{t\in(0,T)} \|s_t\|^2(t).
\end{aligned}
$$

Substituindo I em (2.49) e integrando sobre $(0,t)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\left((1+x), z_t^2\right)(t) + \int_0^t \left[\|z_{\tau x}^2\|(\tau) + \|z_{\tau xx}\|^2(\tau)\right] d\tau \leq 2\int_0^t \left((1+x), z_\tau^2\right)(\tau)\, d\tau \\
&+9TR^2L \sup_{t\in(0,T)} \|s_t\|^2(t) + 16R^2TL\int_0^T \left[\|s_x\|^2(t) + \|s_{tx}\|^2\right] dt.
\end{aligned}
\tag{2.50}
$$

De acordo com o Lema 1.5,

$$
\|z_t\|^2(t) \leq \left((1+x), z_t^2\right)(t) \leq e^T 16TLR^2\left(\sup_{t\in(0,T)} \|s_t\|^2(t) + \int_0^T \left[\|s_x\|^2(t) + \|s_{tx}\|^2\right] dt\right).
$$

Tomando $T > 0$, satisfazendo (2.35), (2.36), (2.40), (2.41), (2.47) e tal que

$$
16TR^2e^TL < \frac{1}{4}, \tag{2.51}
$$

temos

$$
\|z_t\|^2(t) \leq \frac{1}{4}\left(\sup_{t\in(0,T)} \|s_t\|^2(t) + \int_0^T \left[\|s_x\|^2(t) + \|s_{tx}\|^2\right] dt\right).
$$

Retornando para (2.50), obtemos

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in(0,T)} \|z_t\|^2(t) + \sum_{i=1}^{2}\int_0^t \left\|\frac{d^i}{dx^i} z_t\right\|^2 (\tau)\, d\tau \\ &\leq \left(16R^2 + \tfrac{1}{4}\right) TL \left(\sup_{t\in(0,T)} \|s_t\|^2(t) + \int_0^T \left[\|s_x\|^2(t) + \|s_{tx}\|^2\right] dt\right).\end{aligned} \tag{2.52}$$

Escolhendo $T > 0$ tal que

$$\left(16R^2 + \frac{1}{4}\right) TL < \frac{1}{8}$$

e, somando (2.48) com (2.52), temos

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in(0,T)} \left(\|z\|^2(t) + \|z_t\|^2(t)\right) + \sup_{t\in(0,T)} \sum_{i=1}^{2}\int_0^t \left[\left\|\frac{d^i}{dx^i} z\right\|^2(\tau) + \left\|\frac{d^i}{dx^i} z_\tau\right\|^2(\tau)\right] d\tau \\ &\leq \gamma \left[\sup_{t\in(0,T)} \left(\|s\|^2(t) + \|s_t\|^2(t)\right) + \sum_{i=1}^{2}\int_0^T \left[\left\|\frac{d^i}{dx^i} s\right\|^2(t) + \left\|\frac{d^i}{dx^i} s_t\right\|^2(t)\right] dt\right],\end{aligned}$$

com $0 < \gamma < 1$. Assim concluímos que

$$\|z\|_V^2 \leq \gamma \|s\|_V^2,$$

ou seja, P é uma contração. Portanto o Lema 2.3 está provado.

Observe que, pelos Lema 2.2 e Lema 2.3, temos que

$$P : \mathcal{B}_R \longrightarrow \mathcal{B}_R$$

é uma contração, isto é,

$$\|P(v-u)\|_{\mathcal{B}_R} \leq \gamma \|v-u\|_{\mathcal{B}_R}, \ \forall u, v \in \mathcal{B}_R \text{ e } 0 < \gamma < 1.$$

Portanto, usando o Teorema do Ponto Fixo de Banach, garantimos a existência e unicidade de uma solução $u \in \mathcal{B}_R$ de (2.29)-(2.31). Afirmamos agora que $uu_x \in L^\infty(0,T; H^2(0,L))$. Com efeito, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, encontramos solução $u \in \mathcal{B}_R$, tal que

$$\|u\|_{H^5(0,L)}^2 + \|uu_x\|^2 \leq \frac{R^2}{2} = C. \tag{2.53}$$

Como $H^5(0,L) \hookrightarrow H^2(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L)$, temos que

$$\|u\|_{H^2(0,L)}^2 + \|uu_x\|_{H^2(0,L)}^2 \leq \tilde{C}$$

onde $\tilde{C} = \tilde{C}(R)$ vem das imersões. Daí

$$uu_x \in L^\infty\left(0, T; H^2(0, L)\right) \hookrightarrow L^2\left(0, T; H^2(0, L)\right),$$

como queriamos mostrar.

Assim, tomando $f = uu_x$, o Teorema 2.1 garante que existe uma única u tal que

$$u(t) \in H^7(0, L). \tag{2.54}$$

Notemos que pelas **Estimativas II**,

$$u_t \in L^2\left(0, T, H^2(0, L)\right). \tag{2.55}$$

Assim (2.53), (2.54), (2.55) e o Teorema 2.2 garante que

$$u \in L^\infty\left(0, T; H^5(0, L)\right) \cap L^2\left(0, T; H^7(0, L)\right),$$

provando o Teorema 2.3. ■

2.3 Problema Não Linear: Solução Global

Nesta seção estamos preocupados com a extensão da solução obtida no Teorema 2.3. A fim de estender a solução local obtida, para todo o intervalo $(0, \infty)$, enunciamos o seguinte resultado:

Teorema 2.4 *Para qualquer $u_0(x) \in H^5(0, L)$ o problema (2.1)-(2.3) possui única solução $u(x,t)$ satisfazendo*

$$u \in L^\infty\left(0, \infty; H^5(0, L)\right) \cap L^2\left(0, \infty; H^7(0, L)\right),$$
$$u_t \in L^\infty\left(0, \infty; L^2(0, L)\right) \cap L^2\left(0, \infty; H^2(0, L)\right).$$

Prova:

Existência: Para provar a existência, precisamos de estimativas uniformes em $t \in (0, T)$.

Estimativas I:

Multiplicando (2.29) por $2u\,(x,t)$ e integrando em $(0,L)$ obtemos

$$2\int_0^L u_t u dx + 2\int_0^L u_x u dx + 2\int_0^L u_{xxx} u dx - 2\int_0^L u_{xxxxx} u dx = -2\int_0^L u u_x u dx.$$

Assim, utilizando integração por partes e as condições de fronteira, concluímos a seguinte igualdade

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2(t) + |u_{xx}(0,t)|^2 = 0.$$

Integrando a igualdade acima em $(0,t)$,

$$\|u\|^2(t) + \int_0^t |u_{xx}(0,\tau)|\, d\tau = \|u_0\|^2, \, \forall t \in (0,T). \tag{2.56}$$

Estimativas II:

Multiplicando (2.29) por $2(1+x)u$ e integrando sobre $(0,L)$, obtemos o seguinte resultado,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left((1+x),u^2\right)(t) + 5\|u_{xx}\|^2(t) + 3\|u_x\|^2(t) + |u_{xx}(0,t)|^2\\ &= -2\int_0^L (uu_x,(1+x)u)(t)\,dx + \|u\|^2(t).\end{aligned}$$

Analisando o último termo da igualdade acima, segue que

$$\begin{aligned}-2\int_0^L (uu_x,(1+x)u)\,dx &= -\frac{2}{3}\int_0^L \frac{d}{dx}(1+x)u^3 dx\\ &= \overbrace{-\frac{2}{3}(1+x)u^3\Big|_0^L}^{=0} + \frac{2}{3}\int_0^L u^3 dx\\ &= \frac{2}{3}\left(1,u^3\right)(t).\end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{d}{dt}\left((1+x),u^2\right)(t) + 5\|u_{xx}\|^2(t) + 3\|u_x\|^2(t) + |u_{xx}(0,t)|^2 = \frac{2}{3}\left(1,u^3\right)(t) + \|u\|^2(t).$$

Utilizando as Desigualdades de Poincaré, Hölder e Young, temos

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left((1+x),u^2\right)(t) + 5\|u_{xx}\|^2(t) + 3\|u_x\|^2(t) + |u_{xx}(0,t)|^2\\ &\le \frac{2L}{3}\|u_x\|(t)\|u\|^2(t) + \|u\|^2(t) \le \frac{1}{9}\|u_x\|^2 + 2L^2\|u\|^4(t) + \|u\|^2(t).\end{aligned}$$

Integrando sobre $(0,t)$, para todo $t \in (0,T)$, e usando (2.56), obtemos

$$\begin{aligned}
&\left((1+x), u^2\right)(t) + \int_0^t \left(\|u_{xx}\|^2(\tau) + \|u_x\|^2(\tau)\right) d\tau \leq \left((1+x), u_0^2\right)(t) \\
&+2L^2\int_0^t \|u\|^4(\tau)\, d\tau + \int_0^t \|u\|^2(\tau)\, d\tau \leq C\left(T; L; \|u_0\|\right)\|u_0\|^2, \quad \forall t \in (0,T).
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Estimativas III:

Diferenciando (2.29) com respeito a t, multiplicando por $2(1+x)\,u_t$ e integrando sobre $(0,L)$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left((1+x), u_t^2\right)(t) + 5\|u_{txx}\|^2(t) + 3\|u_{tx}\|^2(t) + |u_{txx}(0,t)|^2 \\
&= \underbrace{2\left(uu_t, (1+x)\,u_{tx} + u_t\right)(t)}_{=I} + \|u_t\|^2(t).
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Vamos estimar o termo I. Notemos que

$$2\int_0^L uu_t^2 dx \leq 2\int_0^L |u|\,|u_t|^2 dx \leq 2L\|u_x\|\,\|u_t\|^2$$

e

$$\begin{aligned}
2\int_0^L (1+x)\, uu_t u_{tx} dx &\leq \int_0^L (1+x)^2 (uu_t)^2(t)\, dx + \int_0^L |u_{tx}|^2(t)\, dx \\
&\leq \int_0^L (1+x)^2 (uu_t)^2(t)\, dx + \|u_{tx}\|^2(t) \\
&\leq (1+L)^2\|uu_t\|^2(t) + \|u_{tx}\|^2(t).
\end{aligned}$$

Como $I = 2\int_0^L uu_t^2 dx + 2\int_0^L (1+x)\, uu_t u_{tx} dx$, assim utilizando as desigualdades acima, temos

$$\begin{aligned}
I + \|u_t\|^2(t) &\leq 2L\|u_x\|(t)\|u_t\|^2(t) + (1+L)^2\|uu_t\|^2(t) + \|u_{tx}\|^2(t) + \left((1+x), u_t^2\right)(t) \\
&\leq 2L\|u_x\|(t)\left((1+x), u_t^2\right)(t) + (1+L)^2 L^2\|u_x\|^2(t)\left((1+x), u_t^2\right)(t) \\
&+ \left((1+x), u_t^2\right)(t) + L\left((1+x), u_t^2\right)(t) \\
&\leq \left[2L\|u_x\|(t) + (1+L)^2 L^2\|u_x\|^2(t) + (1+L)\right]\left((1+x), u_t^2\right)(t).
\end{aligned}$$

Substituindo a desigualdade acima em (2.58), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left((1+x), u_t^2\right)(t) + 5\|u_{txx}\|^2(t) + 3\|u_{tx}\|^2(t) \\
&\leq \left[2L\|u_x\|(t) + (1+L)^2 L^2\|u_x\|^2(t) + (1+L)\right]\left((1+x), u_t^2\right)(t).
\end{aligned}$$

Integrando sobre $(0,t)$, $\forall t \in (0,T)$, temos

$$\begin{aligned}
&\left((1+x), u_t^2\right)(t) + \sum_{i=1}^{2} \left\| \frac{d^i}{dx^i} u_\tau \right\| (\tau)\, d\tau \leq 2 \|u_t\|^2 (0) + \\
&\int_0^t \left[2L \|u_x\| (\tau) + (1+L)^2 L^2 \|u_x\|^2 (\tau) + (1+L)\right] \left((1+x), u_t^2\right)(\tau)\, d\tau.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Observemos que por (2.57) $u_x \in L^2(0,T;L^2(0,L))$. Então, pelo Lema 1.7,

$$\begin{aligned}
\|u_t\|^2 \leq \left((1+x), u_t^2\right)(t) &\leq e^{\int_0^T \left[2L\|u_x\|(\tau)+(1+L)^2L^2\|u_x\|^2(\tau)+(1+L)\right]dt} 2\|u_t\|^2(0) \\
&\leq C(T;L)\left(\|u_0\|^2_{H^5(0,L)} + \|u_0 u_{0x}\|^2\right) \\
&\leq C(T;L;\|u_0\|)\, \|u_0\|^2_{H^5(0,L)}.
\end{aligned}$$

Retornando para (2.59), obtemos

$$\|u_t\|^2(t) + \sum_{i=1}^{2} \int_0^t \left\| \frac{d^i}{dx^i} u_\tau \right\|^2 (\tau)\, d\tau \leq C(T;L;\|u_0\|)\, \|u_0\|^2_{H^5(0,L)}. \tag{2.60}$$

Estimativas IV:

Temos de (2.56)

$$\|u_{xxxxx}\|(t) \leq \|u_{xxx}\|(t) + \|u_t\|(t) + \|u_x\|(t) + \|uu_x\|(t).$$

Pelo Teorema 1.5,

$$\|u_{xxx}\|(t) \leq \delta \|u_{xxxxx}\|(t) + C(\delta)\|u\|(t), \tag{2.61}$$

onde δ é um número arbitrário positivo. Portanto,

$$\|u_{xxxxx}\|(t) - \delta\|u_{xxxxx}\|(t) \leq C(\delta)\|u\|(t) + \|u_t\|(t) + \|uu_x\|(t) + \|u_x\|(t).$$

Assim

$$\|u_{xxxxx}\|(t) \leq C\left(\|u\|(t) + \|u_t\|(t) + \|uu_x\|(t) + \|u_x\|(t)\right). \tag{2.62}$$

Usando (2.57), temos

$$\|u\|^2(t) \leq C(t, L, \|u_0\|)\, \|u_0\|^2 \leq C\left(T, L, \|u_0\|, \tilde{C}\right) \|u_0\|^2_{H^5(0,L)},$$

onde $\tilde{C}$ é uma constante de imersão. Temos por (2.57) e (2.60)

$$\|u_t\|^2(t) \leq C\|u_0\|^2_{H^5(0,L)}$$

e

$$u_x \in L^2\left(0,T;L^2(0,L)\right).$$

Como

$$uu_x \in L^2\left(0,T;H^2(0,L)\right),$$

segue de (2.62) que

$$\|u_{xxxxx}\|^2(t) \le C\|u_0\|^2_{H^5(0,L)},$$

onde $C\left(T,L,\|u_0\|,\tilde{C}\right)$. Daí,

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;H^5(0,L))} \le C\|u_0\|^2_{H^5(0,L)}, \tag{2.63}$$

onde $C\left(T,L,\|u_0\|,\tilde{C}\right)$.

Estimativas (2.57), (2.60) e (2.63) permitem estender a solução local garantida no Teorema 2.3 para todo $T > 0$ e prova, com ajuda do Teorema 2.1, a parte da existência do Teorema 2.4.

Unicidade: Notemos que pelo Teorema 2.3 temos a unicidade da solução local, garantida pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach. Agora mostraremos a unicidade do Teorema 2.4.

Suponhamos $w = u_1 - u_2$, onde u_1 e u_2 são soluções do problema (2.4)-(2.6). Assim w é solução do seguinte problema:

$$\left|\begin{array}{l} w_t + w_x + w_{xxx} - w_{xxxxx} = -u_1u_{1x} + u_2u_{2x} \ \text{ em } \ Q_T \\ w(0,t) = w(L,t) = w_x(0,t) = w_x(0,L) = w_{xx}(L,t) = 0, \ \ t \in (0,T) \\ w(x,0) = w_0(x) = 0, \ \ \forall x \in (0,L). \end{array}\right.$$

Segue de (2.56) que,

$$\|w(t)\|^2 = \|u_1 - u_2\|^2 \le 0, \ \ \forall t \in (0,T),$$

ou seja, $u_1 = u_2$, concluido assim a unicidade de solução global. $\blacksquare$

2.4 Estabilidade

Nesta seção estamos interessados na estabilidade exponencial (quando $t \to \infty$) para a energia associada às soluções do seguinte sistema:

$$\left| \begin{array}{l} u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} - u_{xxxxx} + a(x)\, u = 0 \quad \text{em} \quad Q_T, \\ u(0,t) = u(L,t) = u_x(0,t) = u_x(L,t) = u_{xx}(L,t) = 0, \quad t \in (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,L), \end{array} \right. \tag{2.64}$$

onde a função $a = a(x)$ é não negativa em $(0,L)$ e satisfaz

$$\begin{cases} a \in L^{\infty}(0,L) \ \text{ e } \ a(x) \geq a_0 > 0 \text{ q.s. em } \omega, \\ \text{com } \omega \text{ sendo um subconjunto não vazio de } (0,L). \end{cases} \tag{2.65}$$

Considerando o dado inicial $u_0 \in L^2(0,L)$, podemos ver que, analogamente ao que fizemos nas seções anteriores deste capítulo, o sistema (2.64) é bem posto, considerando (2.64) como uma pertubação do caso $a \equiv 0$.

A energia total associada ao sistema (2.64) é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L |u(x,t)|^2\, dx = \frac{1}{2}\|u\|^2(t). \tag{2.66}$$

Notemos que, multiplicando $(2.64)_1$ por u e integrando sobre $(0,L)$ obtemos:

$$\frac{d}{dt}E(t) + \frac{1}{2}|u_{xx}(0,t)|^2 + \int_0^L a(x)\,|u(x,t)|^2\, dx = 0. \tag{2.67}$$

Isto indica que o termo $a(x)\,u$ na equação desempenha um mecanismo de amortecimento localizado. Temos também que $E(t)$ é uma função não-crescente.

2.4.1 Estabilidade: Caso Linear

Consideremos o seguinte problema linearizado:

$$\left| \begin{array}{l} u_t + u_x + u_{xxx} - u_{xxxxx} + a(x)\, u = 0 \quad \text{em} \quad Q_T, \\ u(0,t) = u(L,t) = u_x(0,t) = u_x(L,t) = u_{xx}(L,t) = 0, \quad t \in (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,L). \end{array} \right. \tag{2.68}$$

No que diz respeito à estabilização, o seguinte resultado vale.

Teorema 2.5 *Seja a uma função não negativa nas condições de (2.65). Então, para qualquer $L > 0$, existe uma constante $c > 0$ e $\mu > 0$ tal que*

$$E\left(t\right) \leq c\left\Vert u_0\right\Vert^2 e^{-\mu t}, \quad \forall t \geq 0. \tag{2.69}$$

Prova: Multiplicando $(2.68)_1$ por ux e integrando em Q_T obtemos

$$\int_0^L\int_0^T \left[u_t xu + u_x xu + u_{xxx}xu - u_{xxxxx}xu + a\left(x\right)x\left|u\right|^2\right]dtdx = 0. \tag{2.70}$$

Agora utilizando integração por partes e as condições de fronteira de (2.68) em (2.70), concluímos que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^L x\left|u\left(x,T\right)\right|^2 dx + \frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L \left|u_x\left(x,t\right)\right|^2 dxdt + \frac{5}{2}\int_0^T\int_0^L \left|u_{xx}\left(x,t\right)\right|^2 dxdt\\ &+\int_0^T\int_0^L xa\left(x\right)\left|u\right|^2 dxdt = \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L \left|u\left(x,t\right)\right|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T x\left|u_0\right|^2 dxdt.\end{aligned}$$

Logo

$$\left\Vert u\right\Vert^2_{L^2(0,T;H^2(0,L))} \leq \left(\frac{2T+L}{2}\right)\left\Vert u_0\right\Vert^2. \tag{2.71}$$

Por outro lado, multiplicando a equação $(2.68)_1$ por $(T-t)\,u$ e integrando em Q_T, temos

$$\int_0^T\int_0^L \left(T-t\right)\left[uu_t + uu_x + uu_{xxx} - uu_{xxxxx} + a\left(x\right)\left|u\right|^2\right]dtdx = 0, \tag{2.72}$$

o que implica, após a utilização da integração por partes e as condições de fronteira de (2.68), que

$$\begin{aligned}T\left\Vert u_0\right\Vert^2 =& \int_0^T\int_0^L \left|u\left(x,t\right)\right|^2 dxdt + \int_0^T \left(T-t\right)\left|u_{xx}\left(0,t\right)\right|^2 dt\\ &+\int_0^T\int_0^L \left(T-t\right)a\left(x\right)\left|u\left(x,t\right)\right|^2 dxdt.\end{aligned} \tag{2.73}$$

De (2.73) deduzimos que

$$\left\Vert u_0\right\Vert^2 \leq \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^L \left|u\left(x,t\right)\right|^2 dxdt + \int_0^T \left|u_{xx}\left(0,t\right)\right|^2 dt + 2\int_0^T\int_0^L a\left(x\right)\left|u\left(x,t\right)\right|^2 dxdt. \tag{2.74}$$

Agora, provemos que

$$\int_0^T\int_0^L \left|u\left(x,t\right)\right|^2 dxdt \leq C_1\left\{\int_0^T \left|u_{xx}\left(0,t\right)\right|^2 dt + 2\int_0^T\int_0^L a\left(x\right)\left|u\left(x,t\right)\right|^2 dxdt\right\}, \tag{2.75}$$

para alguma constante positiva $C_1 = C_1(R,T)$ independente da solução u.

Vamos argumentar por contradição, seguindo o argumento de "compacidade-unicidade" (ver [45]). Suponha que (2.75) não é válido. Então, existe uma sequência de funções $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tais que

$$u_n \in L^\infty\left(0,T;L^2(0,L)\right) \cap L^2\left(0,T;H^2(0,L)\right)$$

que resolve (2.68), satisfazendo $\|u_n(\cdot,0)\| \le R$ e tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^T \int_0^L |u_n(x,t)|^2\, dxdt}{\int_0^T |u_{n,xx}(0,t)|^2\, dt + 2\int_0^T \int_0^L a(x)\,|u_n|^2\, dxdt} = +\infty. \tag{2.76}$$

Seja $\lambda_n = \sqrt{\int_0^T \int_0^L |u_n(x,t)|^2\, dxdt}$ e $v_n(x,t) = \frac{u_n(x,t)}{\lambda_n}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a função v_n satisfaz

$$\left|\begin{array}{l} (v_n)_t + (v_n)_x + (v_n)_{xxx} - (v_n)_{xxxxx} + a(x)\,v_n = 0 \quad \text{em} \quad Q_T, \\ v_n(0,t) = v_n(L,t) = (v_n)_x(0,t) = (v_n)_x(L,t) = (v_n)_{xx}(L,t) = 0, \quad t \in (0,T), \\ v_n(x,0) = v_{0,n} = \dfrac{u_n(x,0)}{\lambda_n}, \quad x \in (0,L). \end{array}\right. \tag{2.77}$$

Além disso,

$$\|v_n\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))} = 1 \tag{2.78}$$

e, por (2.76),

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \int_0^T |(v_n)_{xx}(0,t)|^2\, dt + 2\int_0^T \int_0^L a(x)\,|v_n(x,t)|^2\, dxdt \right\} = 0. \tag{2.79}$$

Usando (2.78) e (2.79) em (2.74), temos que $\{v_n(\cdot,0)\}$ é uma sequência limitada em $L^2(0,L)$. Por (2.71) segue que

$$\|v_n\|_{L^2(0,T;H^2(0,L))} \le C, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.80}$$

para alguma constante $C > 0$. Logo, segue de (2.77), (2.78), (2.80) que $\{(v_n)_t\}$ é limitada em $L^2(0,T;H^{-3}(0,L))$. De fato,

$$\|(v_n)_x\|_{L^2(0,T;H^{-3}(0,L))} \le C\,\|(v_n)_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))} = C\,\|v_n\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))} \le \tilde{C}\,\|v_n\|_{L^2(0,T;H^2(0,L))},$$

e de

$$\begin{aligned}
\left|\langle (v_n)_{xxx}\,, \varphi\rangle\right|_{H^{-3}(0,L)\times H_0^3(0,L)} &= \left|\langle (v_n)_{xx}\,, \varphi_x\rangle\right|_{H^{-3}(0,L)\times H_0^3(0,L)}\\
&\leq \left\|(v_n)_{xx}\right\|_{L^2(0,L)} \left\|\varphi_x\right\|_{L^2(0,L)}\\
&= \left\|v_n\right\|_{H^2(0,L)} \left\|\varphi\right\|_{H_0^1(0,L)},
\end{aligned}$$

segue que,

$$\begin{aligned}
\left\|(v_n)_{xxx}\right\|_{L^2(0,T;H^{-3}(0,L))} &= \left(\int_0^T \left\|(v_n)_{xxx}\right\|^2_{H^{-3}(0,L)}\,dt\right)^{1/2}\\
&\leq C\left(\int_0^T \left\|v_n\right\|^2_{H^2(0,L)}\,dt\right)^{1/2} = C\left\|v_n\right\|_{L^2(0,T;H^2(0,L))}.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\left|\langle (v_n)_{xxxxx}\,, \varphi\rangle\right|_{H^{-3}(0,L)\times H_0^3(0,L)} &= \left|\langle (v_n)_{xx}\,, \varphi_{xxx}\rangle\right|_{H^{-3}(0,L)\times H_0^3(0,L)}\\
&\leq \left\|(v_n)_{xx}\right\|_{L^2(0,L)} \left\|\varphi_{xxx}\right\|_{L^2(0,L)}\\
&= \left\|v_n\right\|_{H^2(0,L)} \left\|\varphi\right\|_{H_0^3(0,L)},
\end{aligned}$$

concluímos que

$$\begin{aligned}
\left\|(v_n)_{xxxxx}\right\|_{L^2(0,T;H^{-3}(0,L))} &= \left(\int_0^T \left\|(v_n)_{xxxxx}\right\|^2_{H^{-3}(0,L)}\,dt\right)^{1/2}\\
&\leq \tilde{C}\left(\int_0^T \left\|v_n\right\|^2_{H^2(0,L)}\,dt\right)^{1/2}\\
&= \tilde{C}\left\|v_n\right\|_{L^2(0,T;H^2(0,L))}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\{(v_n)_t\}$ é limitada em $L^2(0,T;H^{-3}(0,L))$. As limitações acima, junto com um resultado clássico de compacidade (ver [41, Corolário 4]), nos garantem que $\{v_n\}$ é relativamente compacto em $L^2(0,T;L^2(0,L))$. Assim podemos extrair uma subsequência de $\{v_n\}$, ainda denotada da mesma forma, tal que

$$v_n \to v \text{ forte em } L^2\left(0,T;L^2(0,L)\right), \tag{2.81}$$

$$v_n \to v \text{ fraco em } L^2\left(0,T;H^2(0,L)\right), \tag{2.82}$$

$$(v_n)_t \to v_t \text{ fraco em } L^2\left(0,T;H^{-3}(0,L)\right). \tag{2.83}$$

Por (2.78),

$$\|v\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))} = 1. \tag{2.84}$$

Além disso como a satisfaz (2.65), temos

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \inf\left\{\int_0^T \left|(v_n)_{xx}(0,t)\right|^2 dt + 2\int_0^T\int_0^L a(x)\left|v_n(x,t)\right|^2 dxdt\right\} \\ &\geq \left\{\int_0^T \left|v_{xx}(0,t)\right|^2 dt + \int_0^T\int_0^L a(x)\left|v(x,t)\right|^2 dxdt\right\} \end{aligned} \tag{2.85}$$

donde deduzimos que $a(x)v \equiv 0$ e, em particular, $v \equiv 0$ em $\omega \times (0,T)$. Por outro lado o limite v satisfaz

$$v_t + v_x + v_{xxx} - v_{xxxxx} = 0.$$

Dessa forma, de acordo com o Teorema de Unicidade de Holmgren (ver o Teorema 1.2), deduzimos que $v \equiv 0$ em Q_T. Isto contradiz (2.84) e, consequentemente, (2.75) é verificado.

Para provar o decaimento da energia, vamos substituir (2.75) em (2.74) e deduzimos que existe uma constante $C(T) = C > 0$ tal que

$$E(0) = \|u_0\|^2 \leq C\left\{\int_0^T \left|u_{xx}(0,t)\right|^2 dt + 2\int_0^T\int_0^L a(x)|u|^2 dxdt\right\}. \tag{2.86}$$

Por outro lado temos de (2.67) a seguinte expressão

$$E(T) = E(0) - \frac{1}{2}\int_0^T \left|u_{xx}(0,t)\right|^2 dt - \int_0^T\int_0^L a(x)\left|u(x,t)\right|^2 dx, \tag{2.87}$$

que, juntamente com (2.86), garante-nos

$$\begin{aligned} (1+C)E(T) &= (1+C)\left[E(0) - \int_0^T \left|u_{xx}(0,t)\right|^2 dt - 2\int_0^T\int_0^L a(x)\left|u(x,t)\right|^2 dxdt\right] \\ &\leq CE(0) - \left[\int_0^T \left|u_{xx}(0,t)\right|^2 dt + 2\int_0^T\int_0^L a(x)\left|u(x,t)\right|^2 dxdt\right] \\ &\leq CE(0). \end{aligned}$$

Consequentemente

$$E(T) \leq \gamma E(0),$$

onde $0 < \gamma < 1$. Assim,

$$\|u(\cdot, kT)\|^2 \leq \gamma^k \|u_0\|^2, \forall k \geq 0.$$

Como $\|u(\cdot, t)\| \leq \|u(\cdot, kT)\|$ para $kT \leq t \leq (k+1)T$, temos que

$$E(t) \leq c\|u_0\|^2 e^{-\mu t}, \quad \forall t \geq 0, \tag{2.88}$$

onde $c = \frac{1}{\gamma}$ e $\mu = \frac{\log \gamma}{T}$. Concluímos assim a prova do teorema. ■

Observação 2.1 *Observemos que na estimativa (2.73) aparece uma integral contendo o termo $u_{xx}(0,t)$. Como $u \in L^2(0,T; H^2(0,L))$, poderia argumentar-se que tal integral não faz sentido, ou seja, que o traço de u_{xx} não está definido, o que não ocorre. De fato, consideremos a sequência $\{(u_0)_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no espaço $D(A) = \{v \in H^5(0,L) : v(0) = v(L) = v'(0) = v'(L) = v''(L) = 0\}$, tal que $(u_0)_n \to u_0$ em $L^2(0,L)$. Sejam u_n e u soluções de (2.68) com os dados iniciais $(u_0)_n$ e u_0, respectivamente. Então, multiplicando a equação (2.68)$_1$ por u_n e integrando sobre $(0,L)$, obtemos*

$$\int_0^L u_n\left((u_n)_t + (u_n)_x + (u_n)_{xxx} - (u_n)_{xxxxx} + a(x)u_n\right)dx = 0.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}E(u_n)(t) + \frac{1}{2}(u_n)_{xx}^2(0,t) + \int_0^L a(x)u_n^2 dx = 0 \tag{2.89}$$

onde $E(u_n)(t) = \frac{1}{2}\|u_n(\cdot,t)\|^2$. Agora, integrando (2.89) em $(0,T)$, temos

$$E(u_n)(T) + \frac{1}{2}\int_0^T (u_n)_{xx}^2(0,t)\,dt + \int_0^T\int_0^L a(x)u_n^2 dxdt = E(u_n)(0). \tag{2.90}$$

Desde de que a sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, segue por (2.89) e (2.90) que

$$E(u_n)(T) - E(u_n)(0) \to E(u)(T) - E(u_0) \quad \text{em } \mathbb{R}. \tag{2.91}$$

Notemos que por (2.90) e (2.91) existe uma subsequência de $\{u_n\}$, denotada da mesma forma, tal que

$$(u_n)_{xx}(0,t) \to \chi \;\; \text{fraco em } L^2(0,T). \tag{2.92}$$

Usando as convergências antes obtidas para a solução forte u_n, podemos mostrar que $\chi = u_{xx}(0,t) \in L^2(0,T)$.

Observação 2.2 *Um interessante problema é obter uma taxa de decaimento para a energia associada à solução do sistema* (2.68) *com* $a \equiv 0$. *É esperado que o conjunto das soluções para a equação de Kawahara tenha um comportamento parecido com o que acontece com o caso da KdV, ou seja, queremos dizer que, no caso do sistema*

$$\left| \begin{array}{l} u_t + u_x + u_{xxx} = 0 \quad em \quad Q_T, \\ u(0,t) = u(L,t) = u_x(L,t) = 0, \quad t \in (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,L), \end{array} \right. \tag{2.93}$$

foi mostrado por Rosier em [36] que, quando o comprimento do intevalo $(0, L)$ *pertence ao subconjunto dos números reais*

$$\mathcal{N} = \left\{ 2\pi\sqrt{\frac{k^2 + kl + l^2}{3}};\ k, l \in \mathbb{N} \right\},$$

existem soluções de (2.93) *que não decaem quando* $t \to \infty$. *Precisamente, em [36] mostrou-se que, se* $L \in \mathcal{N}$, *existe um número complexo* λ *tal que o seguinte problema estacionário*

$$\left| \begin{array}{l} \lambda u_0 + \dfrac{du_0}{dx} + \dfrac{d^3 u_0}{dx^3} = 0, \quad x \in (0,L), \\ u_0(0) = \dfrac{du_0(0)}{dx} = u_0(L) = \dfrac{du_0(L)}{dx} = 0, \end{array} \right. \tag{2.94}$$

possui solução não-trivial. Podemos observar que, se u_0 *é solução de* (2.94), $u(x,t) = u_0(x)e^{\lambda t}$ *é solução de* (2.93) *e satisfaz*

$$\frac{d}{dt}\int_0^L |u(x,t)|^2\, dx = 0,$$

porque

$$u_x(0,t) = \frac{du_0(0)}{dx}e^{\lambda t} = 0.$$

Isto mostra que, quando $L \in \mathcal{N}$, *existem soluções de* (2.93) *que não decaem. Um fato também importante provado em [36, Lema 3.5] é que o subespaço formado pelas soluções que não decaem, quando* $t \to \infty$, *tem dimensão finita. Para o caso do sistema* (2.68), *com* $a \equiv 0$, *é natural esperar a existência de um subconjunto dos números reais tal que, sempre que o comprimento do intervalo esteja neste conjunto, o sistema* (2.68) *(com* $a \equiv 0$*) possua soluções* *que não decaiam. Porém a existência ou não e a caracterização deste subconjunto são problemas em aberto. Nestas circunstâncias, outro mecanismo de amortecimento, que atue em todas soluções, foi considerado para que pudéssemos obter um decaimento exponencial.*

2.4.2 Establidade: Caso Não Linear

Nesta seção, mostraremos que a solução de (2.64) decaem exponencialmente para zero, quando $t \to \infty$. O resultado obtido é utilizando as mesmas técnicas que em [34] junto com o resultado de continuação única enunciado no Teorema 2.7 que será provado no apêndice.

Enunciaremos agora o principal resultado desta seção.

Teorema 2.6 *Seja $a(x)$ uma função não negativa nas condições de* (2.65)*. Então, para qualquer $L > 0$, existem constantes positivas R, $c = c(R)$ e $\mu = \mu(R)$ tais que*

$$E(t) \leq c \|u_0\|^2 e^{-\mu t},$$

para todo $t \geq 0$ e qualquer solução de (2.64) com $u_0 \in L^2(0, L)$ tal que $\|u_0\| \leq R$.

Antes de provarmos o Teorema 2.6, vamos enunciar o seguinte resultado de continuação única.

Teorema 2.7 *Seja u solução do problema (2.68), com $a = a(x)$ e ω como em (2.65). Se*

$$\left| \begin{array}{l} u_{xx}(0, \cdot) = 0, \quad \forall t > 0, \\ u \equiv 0 \quad em \quad \omega \times (0, T), \end{array} \right.$$

então $u \equiv 0$ em Q_T.

O Teorema 2.7 nos dá uma importante informação para a solução do sistema (2.68), e sua demonstração faremos no apêndice.

Prova do Teorema 2.6: Multipliquemos $(2.64)_1$ por u e integrando sobre $(0, L)$ obtemos

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\frac{1}{2} |u_{xx}(0, t)|^2 - \int_0^L a(x) |u(x, t)|^2 \, dx \leq 0, \forall t > 0. \tag{2.95}$$

Integrando de 0 a t, temos

$$E\left(t\right)+\frac{1}{2}\int_{0}^{t}\left|u_{xx}\left(0,t\right)\right|^{2}+\int_{0}^{t}\int_{0}^{L}a\left(x\right)\left|u\left(x,t\right)\right|^{2}dx=E\left(0\right).$$

Daí,

$$E\left(t\right)\leq E\left(0\right)=\frac{1}{2}\left\|u_{0}\right\|^{2},\forall t\geq 0.$$

Afirmação: *Para qualquer* $T>0$, existe uma constante $C=C\left(T\right)>0$ tal que

$$\left\|u_{0}\right\|^{2}\leq C\int_{0}^{T}\left|u_{xx}\left(0,t\right)\right|^{2}dt+\int_{0}^{T}\int_{0}^{L}a\left(x\right)\left|u\left(x,t\right)\right|^{2}dxdt. \tag{2.96}$$

De fato, multiplicando $(2.64)_1$ por ux e integrando em Q_T obtemos

$$\int_{0}^{L}\int_{0}^{T}\left[u_{t}xu+u_{x}xu+u_{xxx}xu-u_{xxxxx}xu+u_{x}xu^{2}+a\left(x\right)x\left|u\right|^{2}\right]dtdx=0. \tag{2.97}$$

Utilizando integração por partes e as condições de fronteira de (2.64) em (2.97), concluímos que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_{0}^{L}x\left|u\left(x,T\right)\right|^{2}dx+\frac{3}{2}\int_{0}^{T}\int_{0}^{L}\left|u_{x}\left(x,t\right)\right|^{2}dxdt+\frac{5}{2}\int_{0}^{T}\int_{0}^{L}\left|u_{xx}\left(x,t\right)\right|^{2}dxdt\\&+\int_{0}^{T}\int_{0}^{L}a\left(x\right)\left|u\left(x,t\right)\right|^{2}dxdt=\frac{1}{2}\int_{0}^{T}\int_{0}^{L}\left|u\left(x,t\right)\right|^{2}dxdt\\&+\frac{1}{3}\int_{0}^{T}\int_{0}^{L}u^{3}\left(x,t\right)dxdt+\frac{1}{2}\int_{0}^{L}x\left|u_{0}\left(x\right)\right|^{2}dx.\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}&\int_{0}^{T}\int_{0}^{L}\left|u_{x}\left(x,t\right)\right|^{2}dxdt+\frac{1}{3}\int_{0}^{L}x\left|u\left(x,T\right)\right|^{2}dx+\frac{5}{3}\int_{0}^{T}\int_{0}^{L}\left|u_{xx}\left(x,t\right)\right|^{2}dxdt\\&+2\int_{0}^{T}\int_{0}^{L}a\left(x\right)\left|u\left(x,t\right)\right|^{2}dxdt=\frac{1}{3}\int_{0}^{T}\int_{0}^{L}\left|u\left(x,t\right)\right|^{2}dxdt\\&+\frac{1}{3}\int_{0}^{L}x\left|u_{0}\left(x\right)\right|^{2}dx+\frac{2}{9}\int_{0}^{T}\int_{0}^{L}u^{3}\left(x,t\right)dxdt.\end{aligned}$$

Daí

$$\left\|u\right\|_{L^{2}(0,T;H^{2}(0,L))}^{2}\leq\left(\frac{4T+L}{3}\right)\left\|u_{0}\right\|^{2}+\frac{2}{9}\int_{0}^{T}\int_{0}^{L}u^{3}\left(x,t\right)dxdt. \tag{2.98}$$

Por outro lado, segue da identidade (2.95) e das desigualdades de Sobolev que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L u^3(x,t)\,dxdt &\le \int_0^T \left(\|u\|_{L^\infty(0,L)} \int_0^L u^2 dx \right) dt \\
&\le \int_0^T \|u\|_{L^\infty(0,L)} \|u_0\|^2 \, dt \\
&\le \|u_0\|^2 \int_0^T C \|u\|_{H^2(0,L)} \\
&\le \|u_0\|^2 \left(\int_0^T C^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \|u\|^2_{H^2(0,L)} \right)^{1/2} \\
&\le C\sqrt{T} \|u_0\|^2 \|u\|_{L^2(0,T;H^2(0,L))},
\end{aligned}$$

para alguma constante C positiva. Logo para $\delta > 0$, suficientemente pequeno, obtemos, usando a desigualdade de Young, que

$$\int_0^T \int_0^L u^3(x,t)\,dxdt \le \frac{C^2 T}{18\delta} \|u_0\|^4 + \frac{9\delta}{2} \|u\|^2_{L^2(0,T;H^2(0,L))}.$$

Voltando para inequação (2.98) e tomando $\delta < \frac{1}{2}$, obtemos

$$\|u\|^2_{L^2(0,T;H^2(0,L))} \le (4T + L) \|u_0\|^2 + \frac{2C^2 T}{81} \|u_0\|^4. \tag{2.99}$$

Por outro lado, multiplicando a equação $(2.64)_1$ por $(T-t)\,u$ e integrando em Q_T, temos

$$\int_0^T \int_0^L (T-t) \left[uu_t + uu_x + uu_{xxx} - uu_{xxxxx} + u^2 u_x + a(x) |u|^2 \right] dtdx = 0.$$

Utilizando integração por partes e as condições de fronteira de (2.64), obtemos

$$\begin{aligned}
T\|u_0\|^2 &= \int_0^T \int_0^L |u(x,t)|^2 \, dxdt + \int_0^T (T-t) |u_{xx}(0,t)|^2 \, dt \\
&+2 \int_0^T \int_0^L a(x) |u(x,t)|^2 \, dxdt.
\end{aligned} \tag{2.100}$$

De (2.100) deduzimos que

$$\|u_0\|^2 \le \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^L |u(x,t)|^2 \, dxdt + \int_0^T |u_{xx}(0,t)|^2 \, dt + 2 \int_0^T \int_0^L a(x) |u(x,t)|^2 \, dxdt. \tag{2.101}$$

Agora, para provarmos (2.96), é suficiente mostrar que para quaisquer $T > 0$ e $R > 0$, existe uma constante positiva $C_1 = C_1(R,T)$ tal que

$$\int_0^T \int_0^L |u(x,t)|^2 \, dxdt \le C_1 \left\{ \int_0^T |u_{xx}(0,t)|^2 \, dt + 2 \int_0^T \int_0^L a(x) |u(x,t)|^2 \, dxdt \right\}, \tag{2.102}$$

para qualquer solução de (2.64) com $\|u_0\| \leq R$.

Vamos argumentar por contadição. Suponha que (2.102) não é válido. Então, existe uma sequência de funções u_n tais que

$$u_n \in L^\infty\left(0,T;L^2\left(0,L\right)\right) \cap L^2\left(0,T;H^2\left(0,L\right)\right)$$

que resolve (2.64), satisfazendo $\|u_n\left(\cdot,0\right)\| \leq R$ e tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^T \int_0^L |u_n\left(x,t\right)|^2 \, dxdt}{\int_0^T |u_{n,xx}\left(0,t\right)|^2 \, dt + 2\int_0^T \int_0^L a\left(x\right)|u_n\left(x,t\right)|^2 \, dxdt} = +\infty. \tag{2.103}$$

Seja $\lambda_n = \sqrt{\int_0^T \int_0^L |u_n\left(x,t\right)|^2 \, dxdt}$ e $w_n\left(x,t\right) = \frac{u_n(x,t)}{\lambda_n}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a função w_n satisfaz

$$\left| \begin{array}{l} \left(w_n\right)_t + \left(w_n\right)_x + \left(w_n\right)_{xxx} - \left(w_n\right)_{xxxxx} + \lambda_n w_n \left(w_n\right)_x + a\left(x\right) w_n = 0 \ \text{ em } Q_T, \\ w_n\left(0,t\right) = w_n\left(L,t\right) = \left(w_n\right)_x\left(0,t\right) = \left(w_n\right)_x\left(L,t\right) = \left(w_n\right)_{xx}\left(L,t\right) = 0, \ \ t \in \left(0,T\right), \\ w_n\left(x,0\right) = w_{0,n} = \dfrac{u_n\left(x,0\right)}{\lambda_n}, \quad x \in \left(0,L\right). \end{array} \right. \tag{2.104}$$

Além disso,

$$\|w_n\|_{L^2\left(0,T;L^2\left(0,L\right)\right)} = 1 \tag{2.105}$$

e, por (2.103),

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \int_0^T |\left(w_n\right)_{xx}\left(0,t\right)|^2 \, dt + 2\int_0^T \int_0^L a\left(x\right)|w_n\left(x,t\right)|^2 \, dxdt \right\} = 0. \tag{2.106}$$

Usando (2.101), temos que $\{w_n\left(\cdot,0\right)\}$ é uma sequência limitada em $L^2\left(0,L\right)$. Por (2.99) segue que

$$\|w_n\|_{L^2\left(0,T;H^2\left(0,L\right)\right)} \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.107}$$

para alguma constante $C > 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|w_n\left(w_n\right)_x\|_{L^2\left(0,T;L^1\left(0,L\right)\right)} &= \left(\int_0^T \|w_n\left(w_n\right)_x\|^2_{L^1\left(0,L\right)} \, dt\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_0^T \|w_n\|^2 \, dt\right)^{1/2} \left(\int_0^T \|\left(w_n\right)_x\|^2 \, dt\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sup_{0<t\leq T} \|w_n\|^2\right)^{1/2} \left(\int_0^T \|\left(w_n\right)_x\|^2 \, dt\right)^{1/2} \\ &= \|w_n\|_{L^\infty\left(0,T,L^2\left(0,L\right)\right)} \|w_n\|_{L^2\left(0,T;H^1\left(0,L\right)\right)}. \end{aligned}$$

Assim, por (2.107), temos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|w_n\,(w_n)_x\|_{L^2(0,T;L^1(0,L))} \leq C. \tag{2.108}$$

Observemos que $\{\lambda_n\}$ é limitada. De fato, como $\{w_n\,(x,0)\}$ é limitada em $L^2\,(0,L)$ e $\|u_n\,(x,0)\| \leq R$ segue de

$$\frac{1}{|\lambda_n|}\,\|u_n\,(x,0)\| = \|w_n\,(x,0)\|$$

que $\{\lambda_n\}$ é limitada. Logo, segue de (2.104), (2.105), (2.107) e (2.108) que $\{(w_n)_t\}$ é limitada em $L^2\,(0,T;H^{-3}\,(0,L))$. De fato,

$$\begin{aligned}
&\|(w_n)_x\|_{L^2(0,T;H^{-3}(0,L))} \leq C\,\|(w_n)_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))} = C\,\|w_n\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))} \leq \tilde{C}\,\|w_n\|_{L^2(0,T;H^2(0,L))}\,,\\
&\|w_n\,(w_n)_x\|_{L^2(0,T;H^{-3}(0,L))} \leq C_1\,\|w_n\,(w_n)_x\|_{L^2(0,T;L^1(0,L))} = C_2,
\end{aligned}$$

e de

$$\begin{aligned}
|\langle (w_n)_{xxx}\,,\varphi\rangle|_{H^{-3}(0,L)\times H_0^3(0,L)} &= |\langle (w_n)_{xx}\,,\varphi_x\rangle|_{H^{-3}(0,L)\times H_0^3(0,L)}\\
&\leq \|(w_n)_{xx}\|_{L^2(0,L)}\,\|\varphi_x\|_{L^2(0,L)}\\
&= \|w_n\|_{H^2(0,L)}\,\|\varphi\|_{H_0^1(0,L).}
\end{aligned}$$

segue que,

$$\begin{aligned}
\|(w_n)_{xxx}\|_{L^2(0,T;H^{-3}(0,L))} &= \left(\int_0^T \|(w_n)_{xxx}\|^2_{H^{-3}(0,L)}\,dt\right)^{1/2}\\
&\leq C\left(\int_0^T \|w_n\|^2_{H^2(0,L)}\,dt\right)^{1/2} = C\,\|w_n\|_{L^2(0,T;H^2(0,L))}\,.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
|\langle (w_n)_{xxxxx}\,,\varphi\rangle|_{H^{-3}(0,L)\times H_0^3(0,L)} &= |\langle (w_n)_{xx}\,,\varphi_{xxx}\rangle|_{H^{-3}(0,L)\times H_0^3(0,L)}\\
&\leq \|(w_n)_{xx}\|_{L^2(0,L)}\,\|\varphi_{xxx}\|_{L^2(0,L)}\\
&= \|w_n\|_{H^2(0,L)}\,\|\varphi\|_{H_0^3(0,L)}\,,
\end{aligned}$$

concluímos que

$$\left\| (w_n)_{xxxxx} \right\|_{L^2(0,T;H^{-3}(0,L))} = \left(\int_0^T \left\| (w_n)_{xxxxx} \right\|_{H^{-3}(0,L)}^2 dt \right)^{1/2}$$
$$\leq \tilde{C} \left(\int_0^T \left\| w_n \right\|_{H^2(0,L)}^2 dt \right)^{1/2}$$
$$= \tilde{C} \left\| w_n \right\|_{L^2(0,T;H^2(0,L))}.$$

Portanto, $\{(w_n)_t\}$ é limitada em $L^2(0,T;H^{-3}(0,L))$. Como $H^2(0,L)$ possui imersão compacta em $L^2(0,L)$, pelo resultado clássico de compacidade (ver [41, Corolário 4]) e de (2.107), $\{w_n\}$ é relativamente compacto em $L^2(0,T;L^2(0,L))$. Podemos extrair uma subsequência $\{w_k\}$ de $\{w_n\}$ tal que

$$w_k \to w \text{ forte em } L^2\left(0,T;L^2(0,L)\right), \tag{2.109}$$

$$w_k \to w \text{ fraco em } L^2\left(0,T;H^2(0,L)\right), \tag{2.110}$$

$$(w_k)_t \to w_t \text{ fraco em } L^2\left(0,T;H^{-3}(0,L)\right). \tag{2.111}$$

Segue de (2.105),

$$\|w\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))} = 1. \tag{2.112}$$

Temos ainda

$$\begin{aligned} 0 &= \liminf_{n\to\infty} \left\{ \int_0^T \left| (w_n)_{xx}(0,t) \right|^2 dt + 2\int_0^T \int_0^L a(x) \left| w_n(x,t) \right|^2 dxdt \right\} \\ &\geq \int_0^T \left| w_{xx}(0,t) \right|^2 dt + 2\int_0^T \int_0^L a(x) \left| w(x,t) \right|^2 dxdt, \end{aligned} \tag{2.113}$$

o que implica

$$\left| \begin{array}{l} w_{xx}(0,t) = 0, \quad t \in (0,T), \\ w \equiv 0 \quad \text{em} \quad \omega \times (0,T). \end{array} \right. \tag{2.114}$$

Temos ainda a existência de uma subsequência de $\{\lambda_n\}$, denotada ainda por $\{\lambda_n\}$, e $\lambda \geq 0$ tal que

$$\lambda_n \to \lambda.$$

Agora analisaremos as seguintes situações:

a) Se $\lambda = 0$, temos que w é solução do problema linear (2.68) e satisfaz a condição (2.114). Assim utilizando o mesmo processo feito na seção 2.4.1, estabilidade no caso linear, concluímos que $w = 0$ em Q_T, o que contradiz (2.112).

b) Se $\lambda > 0$, temos que w é solução do seguinte problema não linear

$$\left| \begin{array}{l} w_t + w_x + w_{xxx} - w_{xxxxx} + \lambda w w_x + a(x) w = 0 \ \text{ em } \ Q_T, \\ w(0,t) = w(L,t) = w_x(0,t) = w_x(0,L) = w_{xx}(L,t) = 0, \ \ t \in (0,T), \\ w(x,0) = w_0(x) = 0, \ \ x \in (0,L), \end{array} \right.$$

satisfazendo (2.114). Então, de acordo com o Teorema 2.7, podemos afirmar que $w \equiv 0$ em Q_T, contradizendo (2.112). Consequentemente, (2.102) é válida.

Substituindo (2.102) em (2.101), existe uma constante $C(T) = C > 0$ tal que

$$E(0) = \|u_0\|^2 \leq C \left\{ \int_0^T |u_{xx}(0,t)|^2 dt + 2 \int_0^T \int_0^L a(x) |u(x,t)|^2 dxdt \right\}. \tag{2.115}$$

Por outro lado, temos de (2.95) a seguinte igualdade

$$E(T) = E(0) - \frac{1}{2} \int_0^T |u_{xx}(0,t)|^2 dt - \int_0^T \int_0^L a(x) |u(x,t)|^2 dx. \tag{2.116}$$

De (2.115) e (2.116), obtemos

$$\begin{aligned} (1+C) E(T) &= (1+C) \left[E(0) - \int_0^T |u_{xx}(0,t)|^2 dt - 2 \int_0^T \int_0^L a(x) |u(x,t)|^2 dxdt \right] \\ &\leq CE(0) - \left[\int_0^T |u_{xx}(0,t)|^2 dt + 2 \int_0^T \int_0^L a(x) |u(x,t)|^2 dxdt \right] \\ &\leq CE(0). \end{aligned}$$

Portanto, pelas propriedades de semigrupos utilizadas em (2.88) da seção anterior, segue o resultado. ■

Capítulo 3

Equação de Kawahara com Não Linearidade do Tipo u^2u_x

Estudaremos a existência, unicidade e o decaimento da energia associada à soluçã$C^0\left([0,T];L^2(0,L)\right)\ \cap\ L^2\left(0,T;H^2(0,L)\right)$o da equação de Kawahara com não linearidade do tipo u^2u_x. Precisamente consideremos o seguinte sistema:

$$\left|\begin{array}{l} u_t+u_x+u_{xxx}-u_{xxxxx}+u^2u_x=0 \ \text{ em } \ Q_T, \\ u(0,t)=u(L,t)=u_x(0,t)=u_x(L,t)=u_{xx}(L,t)=0, \ \ t\in(0,T), \\ u(x,0)=u_0(x), \ \ x\in(0,L). \end{array}\right. \tag{3.1}$$

3.1 Solução do Problema Linear

Estudaremos aqui a existência e unicidade do problema linear:

$$\left|\begin{array}{l} u_t+u_x+u_{xxx}-u_{xxxxx}=0 \quad \text{em} \quad Q_T, \\ u(0,t)=u(L,t)=u_x(0,t)=u_x(L,t)=u_{xx}(L,t)=0, \ \ t\in(0,T), \\ u(x,0)=u_0(x), \quad x\in(0,L). \end{array}\right. \tag{3.2}$$

Observação 3.1 *Vale ressaltar que os resultados enunciados no Teorema 3.1 já foram conseguidos no Capítulo 2 através do método da Semi-discretização. Iremos aqui fazer uma nova demonstração, agora usando a teoria de semigrupos, com o intuito de tratarmos o* *problema com uma técnica diferente que, sem dúvidas, facilitará à obtenção de solução para o caso da equação de Kawahara não linear.*

Teorema 3.1 *Seja $u_0 \in L^2(0,L)$. Então o problema (3.2) possui única solução*

$$u \in \tag{3.3}$$

satisfazendo $u_{xx}(0,t) \in L^2(0,T)$. Além disso, existe uma constante $C = C(T,L) > 0$ tal que

$$\|u\|_{C^0([0,T];L^2(0,L))} + \|u\|_{L^2(0,T;H^2(0,L))} \leq C\|u_0\| \tag{3.4}$$

e

$$\|u_{xx}(0,t)\|_{L^2(0,T)} \leq \|u_0\|. \tag{3.5}$$

Prova: Vamos explorar a teoria de semigrupos (ver [35]). Consideremos o espaço

$$D(A) = \left\{v \in H^5(0,L) : v(0) = v(L) = v'(0) = v'(L) = v''(L) = 0\right\}$$

e o operador linear fechado $A : D(A) \subset L^2(0,L) \to L^2(0,L)$ definido por

$$Av = -v' - v''' + v'''''.$$

Seja $v \in D(A)$, então usando integração por partes e a definição de $D(A)$, obtemos

$$\begin{aligned}
(v, Av) &= \int_0^L v(-v' - v''' + v''''')\,dx = \int_0^L vv'''''dx - \int_0^L vv'''dx - \int_0^L vv'dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^L \left[(v')^2\right]' dx + \frac{1}{2}\int_0^L \left[(v'')^2\right]' dx \\
&= -\frac{1}{2}(v'')^2(0) \leq 0,
\end{aligned}$$

isto é, A é dissipativo.

Agora, observe que se $u \in D(A)$ e $\tilde{u} \in L^2(0,L)$ é um elemento a ser determinado, temos

$$\begin{aligned}
(\tilde{u}, Au) &= \int_0^L \tilde{u}\left(-u' - u''' + u'''''\right) dx = \int_0^L \tilde{u}u''''' dx - \int_0^L \tilde{u}u''' dx - \int_0^L \tilde{u}u' dx \\
&= \int_0^L \tilde{u}'u'' dx - \left[\tilde{u}u''\right]_0^L + \left[\tilde{u}u''''\right]_0^L - \int_0^L \tilde{u}'u'''' dx + \int_0^L \tilde{u}'u dx \\
&= -\int_0^L \tilde{u}''u' dx + \left[\tilde{u}'u'\right]_0^L - \left[\tilde{u}'u'''\right]_0^L + \int_0^L \tilde{u}''u''' dx + \int_0^L \tilde{u}'u dx \\
&= \int_0^L \tilde{u}'u dx + \int_0^L \tilde{u}'''u dx - \int_0^L \tilde{u}'''''u dx = \int_0^L \left(\tilde{u}' + \tilde{u}''' - \tilde{u}'''''\right) u dx,
\end{aligned}$$

se assumirmos que $\tilde{u}(0) = \tilde{u}(L) = \tilde{u}'(0) = \tilde{u}'(L) = \tilde{u}''(0) = 0$. Portanto, o adjunto de A é definido por

$$\left|\begin{array}{l}
A^* : D(A^*) \subset L^2(0,L) \longrightarrow L^2(0,L), \\
A^*\tilde{u} = \tilde{u}' + \tilde{u}''' - \tilde{u}''''', \\
D(A^*) = \left\{\tilde{u} \in H^5(0,L) : \tilde{u}(0) = \tilde{u}(L) = \tilde{u}'(0) = \tilde{u}'(L) = \tilde{u}''(0) = 0\right\}.
\end{array}\right.$$

Seja $\tilde{u} \in D(A^*)$, portanto

$$(\tilde{u}, A^*\tilde{u}) = \int_0^L \tilde{u}\left(\tilde{u}' + \tilde{u}''' - \tilde{u}'''''\right) dx = -\frac{1}{2}\left(\tilde{u}''\right)^2(0) \leq 0,$$

assim, A^* é dissipativo.

Note que, como $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $L^2(0,L)$ e $\mathcal{D}(\Omega) \subset D(A) \subset L^2(0,L)$, segue que $D(A)$ é denso em $L^2(0,L)$. Portanto, por resultados clássicos da teoria de semigrupos (ver [35, Cap. 1 - Teorema 4.3]), temos que A gera um semigrupo de contração fortemente contínuo em $L^2(0,L)$. Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ este semigrupo. Asssim existe uma única solução $u(\cdot,t) = S(t)u_0$ de (3.2) satisfazendo $u \in C^0([0,T]; L^2(0,L))$ e

$$\|u\|_{C^0([0,T];L^2(0,L))} \leq \|u_0\|. \tag{3.6}$$

Provemos que $u \in L^2(0,T; H^2(0,L))$. Primeiro consideremos $u_0 \in D(A)$. Multiplicando $(3.2)_1$ por xu e integrando por partes sobre Q_T, temos que

$$\int_0^T \int_0^L \left(u_t xu + u_x xu + u_{xxx} xu - u_{xxxxx} xu\right) dxdt = 0. \tag{3.7}$$

Analisando termo a termo:

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^L u_t x u dxdt &= \int_0^T\int_0^L x\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(u(x,t)^2\right)dxdt\\ &= \frac{1}{2}\int_0^L x\left|u(x,T)\right|^2 dx-\frac{1}{2}\int_0^L x\left|u(x,0)\right|^2 dx,\end{aligned}\tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^L u_x x u dxdt &= \int_0^T\int_0^L x\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(u(x,t)\right)^2 dxdt\\ &= \overbrace{\frac{1}{2}\int_0^T x\left|u(x,t)\right|^2\Big|_0^L dt}^{=0}-\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L\left|u(x,t)\right|^2 dxdt\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L\left|u(x,t)\right|^2 dxdt,\end{aligned}\tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^L xuu_{xxx}dxdt &= -\int_0^T\int_0^L u_{xx}\left(u+xu_x\right)dxdt\\ &= \frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L\left|u_x(x,t)\right|^2 dxdt,\end{aligned}\tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^L xuu_{xxxxx}dxdt &= -\int_0^T\int_0^L u_{xxx}\left(u+xu_x\right)dxdt\\ &= 2\int_0^T\int_0^L u_{xxx}u_x dxdt+\int_0^T\int_0^L u_{xxx}xu_x dxdt\\ &= -\frac{5}{2}\int_0^T\int_0^L\left|u_{xx}(x,t)\right|^2 dxdt.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Substituindo (3.8)-(3.11) em (3.7) obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^L x\left|u(x,T)\right|^2 dx+\frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L\left|u_x(x,t)\right|^2 dxdt+\frac{5}{2}\int_0^T\int_0^L\left|u_{xx}(x,t)\right|^2 dxdt\\ &=\frac{1}{2}\int_0^L x\left|u_0(x)\right|^2 dx+\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L\left|u(x,t)\right|^2 dxdt,\end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_0^L\left\{\left|u(x,t)\right|^2+\left|u_x(x,t)\right|^2+\left|u_{xx}(x,t)\right|^2\right\}dxdt\\ &\leq L\int_0^L\left|u_0(x)\right|^2 dx+2\int_0^T\int_0^L\left|u(x,t)\right|^2 dxdt.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Combinando (3.6) e (3.12) obtemos que $u\in L^2\left(0,T;H^2\left(0,L\right)\right)$ e

$$\left\|u\right\|^2_{L^2(0,T;H^2(0,L))}\leq\left(L+2T\right)^{1/2}\left\|u_0\right\|^2.\tag{3.13}$$

Multiplicando $(3.2)_1$ por u e integrando sobre Q_T, temos

$$\int_0^T \int_0^L (u_t u + u_x u + u_{xxx} u - u_{xxxxx} u)\, dxdt = 0. \tag{3.14}$$

Integrando por partes e utilizando as condições de fronteira segue que

$$\int_0^L |u(x,T)|^2\, dx + \int_0^T |u_{xx}(0,t)|^2\, dt = \int_0^L |u_0(x)|^2\, dx, \tag{3.15}$$

isto é, $u_{xx}(0,T) \in L^2(0,T)$ e

$$\|u_{xx}(0,t)\|_{L^2(0,T)} \leq \|u_0\|\,. \tag{3.16}$$

Como $D(A)$ é denso em $L^2(0,L)$ segue que (3.12)-(3.16) valem para qualquer $u_0 \in L^2(0,L)$. Provando assim o resultado para o modelo linear. ■

Observação 3.2 *Sabemos que para obtermos uma solução regularizada, basta tomarmos dados mais regulares. Precisamente, sendo A gerador de um semigrupo de contração, temos que se $u_0 \in D(A)$, a solução $u = u(x,t)$ do problema (3.2) pertence à classe $u \in C^0([0,T]; D(A))$.*

3.2 Problema Não Linear: Solução Local

Nesta seção iremos analisar a existência e unicidade de solução local para o sistema (3.1). Para isto consideremos o seguinte resultado:

Teorema 3.2 *Sejam $T_0 > 0$, $u_0 \in L^2(0,L)$ dados. Então existe $T \in (0,T_0]$ tal que o problema (3.1) possui uma única solução u de classe*

$$u \in C^0\left([0,T]; L^2(0,L)\right) \cap L^2\left(0,T; H^2(0,L)\right). \tag{3.17}$$

Prova: Notemos que a solução de (3.1) pode ser escrito da seguinte forma

$$u = u_1 + u_2, \tag{3.18}$$

onde u_1 e u_2 resolvem, respectivamente, os seguintes problemas em Q_T,

$$\left| \begin{array}{l} u_{1t} + u_{1x} + u_{1xxx} - u_{1xxxxx} = 0 \;\; \text{em} \;\; Q_T, \\ u_1(0,t) = u_1(L,t) = u_{1x}(0,t) = u_{1x}(L,t) = u_{1xx}(L,t) = 0, \;\; t \in (0,T), \\ u_1(x,0) = u_0(x), \;\; x \in (0,L) \end{array} \right. \tag{3.19}$$

e

$$\left| \begin{array}{l} u_{2t} + u_{2x} + u_{2xxx} - u_{2xxxxx} = f, \\ u_2(0,t) = u_2(L,t) = u_{2x}(0,t) = u_{2x}(L,t) = u_{2xx}(L,t) = 0, \;\; t \in (0,T), \\ u_2(x,0) = 0, \;\; x \in (0,L), \end{array} \right. \tag{3.20}$$

onde $f = -u^2 u_x$.

Para $u_0 \in L^2(0,L)$, o Teorema 3.1 assegura que (3.19) possui única solução

$$u_1 \in C^0\left([0,T]; L^2(0,L)\right) \cap L^2\left(0,T; H^2(0,L)\right). \tag{3.21}$$

Além disso,

$$\begin{array}{rcccc} \Psi_1 & : & L^2(0,L) & \rightarrow & C^0([0,T]; L^2(0,L)) \cap L^2(0,T; H^2(0,L)) \\ & & u_0 & \mapsto & u_1 \end{array}$$

é linear e contínua.

Para resolver (3.20) perceba que sua parte linear corresponde ao semigrupo de contração $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ em $L^2(0,L)$ mostrado no Teorema 3.1. A função $f = u^2 u_x$ é localmente Lipschitz de $H^2(0,L)$ em $L^2(0,L)$, visto que

$$\begin{aligned} \|u^2 u_x - z^2 z_x\| &= \|u^2 u_x - u^2 z_x + u^2 z_x - z^2 z_x\| \\ &= \|u^2(u_x - z_x) + z_x(u^2 - z^2)\| \\ &\leq \|u^2(u_x - z_x)\| + \|z_x(u^2 - z^2)\| \\ &\leq \|u^2(u_x - z_x)\| + \|z_x(u-z)(u+z)\| \\ &\leq \|u^2\|_{L^\infty(0,L)} \|u_x - z_x\| + \|z_x\|_{L^\infty(0,L)} \|(u-z)(u+z)\| \\ &\leq \|u^2\|_{L^\infty(0,L)} \|u_x - z_x\| + \|z_x\|_{L^\infty(0,L)} \|u-z\| \|u+z\|_{L^\infty(0,L)} \\ &\leq C_L\left(\|u\|^2_{H^2(0,L)} + \|z\|_{H^2(0,L)} \|u+z\|_{H^2(0,L)}\right) \|u-z\|_{H^2(0,L)}, \end{aligned} \tag{3.22}$$

onde C_L é uma constante tal que $\|\cdot\|_{L^\infty(0,L)} \leq C_L \|\cdot\|_{H^2(0,L)}$. Portanto, dado $u_0 \in L^2(0,L)$ existe $T_0 > 0$ e uma única função definida por

$$u_2(\cdot,t) = \int_0^t S(t-s) f(\cdot.,s)\, ds, \ \ t \in [0,T] \subset [0,T_0),$$

que é solução de (3.20) e satisfaz (3.17) (ver Teorema 1.8). ■

3.3 Problema Não Linear: Solução Global

Nesta seção, estamos interessados em garantir a existência de solução global para o sistema (3.1), com o intuito de podermos analisar o comportamento assintótico, quando $t \to \infty$, ver próxima seção. De acordo com o Teorema 1.9, para garantirmos a existência de solução global, vamos considerar o seguinte resultado:

Proposição 3.1 *Seja u solução do problema (3.1) obtida no Teorema 3.2. Se $\|u_0\| \ll 1$, então*

$$\|u\|^2_{L^2(0,T;H^2(0,L))} \leq c_1 \left(\frac{\|u_0\|^2}{1 - c_2 \|u_0\|^2} \right),$$

onde $c_1 = c_1(T,L)$ e c_2 são constantes positivas. Além disso, $u_t \in L^{\frac{4}{3}}(0,T;H^{-3}(0,L))$.

Prova: Vamos dividir a prova em alguns passos.

Primeira Estimativa: Multiplicando a equação $(3.1)_1$ por u, integrando sobre $(0,L)$ e utilizando as condições de fronteira $(3.1)_2$, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \frac{1}{2}|u_{xx}(0,t)|^2 = 0.$$

Consequentemente,

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} \leq \|u_0\|. \tag{3.23}$$

Segunda Estimativa: Multiplicando a equação $(3.1)_1$ por xu, obtemos, após integrar por partes sobre Q_T e utilizar as condições de fronteira $(3.1)_2$, que

$$\int_0^T \int_0^L |u_x|^2 \, dxdt + \frac{1}{3}\int_0^L x\,|u(x,T)|^2 \, dx + \frac{5}{2}\int_0^T \int_0^L |u_{xx}|^2 \, dxdt$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^T \int_0^L |u|^2 \, dxdt + \frac{1}{3}\int_0^L x\,|u_0|^2 \, dx + \frac{1}{6}\int_0^T \int_0^L |u|^4 \, dxdt.$$

Assim, utilizando (3.23), temos a seguinte inequação:

$$\|u\|^2_{L^2(0,T;H^2(0,L))} \leq \left(\frac{4T+L}{3}\right)\|u_0\|^2 + \frac{1}{6}\int_0^T\int_0^L u^4 dxdt. \tag{3.24}$$

Por outro lado, a desigualdade de Gagliardo-Niremberg (ver Lema 1.11) juntamente com (3.23) implica

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^L u^4 dxdt &\leq C\int_0^T \|u(x,t)\|^2 \|u_x(x,t)\|^2 dt \\ &\leq C\|u_0\|^2\int_0^T \|u_x(x,t)\|^2 dt \\ &\leq C\|u_0\|^2 \|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))} \\ &\leq C_1\|u_0\|^2 \|u\|_{L^2(0,T;H^2(0,L))},\end{aligned} \tag{3.25}$$

para alguma constante positiva C_1.

Substituindo (3.23) e (3.25) em (3.24) segue que

$$\|u\|^2_{L^2(0,T;H^2(0,L))} \leq \left[\frac{2(4T+L)}{6 - C\|u_0\|^2}\right]\|u_0\|^2. \tag{3.26}$$

Terceira Estimativa: Para obtermos limitação para u_t devemos observar o termo não linear.

Primeiro, notemos que o argumento usado em (3.25) nos dá

$$\int_0^T\int_0^L \left|u^3\right|^{4/3} dxdt \leq c\|u_0\|^2 \|u\|^2_{L^2(0,T;H^2(0,L))}.$$

Por (3.26) obtemos que

$$u^3 \text{ é limitada em } L^{\frac{4}{3}}(Q_T).$$

Por outro lado, como $L^{\frac{4}{3}}(0,L) \hookrightarrow H^{-1}(0,L)$, concluímos

$$u^2u_x = \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(u^3\right) \quad \text{é limitada em } L^{\frac{4}{3}}\left(0,T;H^{-2}(0,L)\right). \tag{3.27}$$

Quarta Estimativa: Vamos obter limitação para u_t.

Observemos que

$$u_t = -u_x - u_{xxx} - u^2u_x + u_{xxxxx} \text{ em } \mathcal{D}'\left(0,T;H^{-2}(0,L)\right).$$

Utilizando (3.23), (3.26) e (3.27) concluimos que

$$u_t \text{ é limitado em } L^{\frac{4}{3}}\left(0,T;H^{-2}\left(0,L\right)\right).$$

Isto completa a demonstração do resultado. ■

Notemos que a Proposição 3.1 nos dá uma estimativa suficiente para usarmos o Teorema 1.9 e garantirmos a existência de solução global no tempo. Dessa forma, podemos estudar o comportamento assintótico da solução $u = u\left(x,t\right)$ de (3.1), quando $t \to \infty$. Isto será feito na próxima seção.

3.4 Estabilidade

Nesta seção analizaremos o comportamento assintótico das soluções do sistema (3.1) quando adicionamos uma dissipação localizada, ou seja, queremos estabelecer uma taxa de decaimento para energia associada às soluções do seguinte sistema:

$$\left| \begin{array}{l} u_t + u_x + u_{xxx} - u_{xxxxx} + u^2 u_x + a\left(x\right)u = 0 \ \text{ em } Q_T, \\ u\left(0,t\right) = u\left(L,t\right) = u_x\left(0,t\right) = u_x\left(L,t\right) = u_{xx}\left(L,t\right) = 0, \quad t \in \left(0,T\right), \\ u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right), \quad x \in \left(0,L\right), \end{array} \right. \tag{3.28}$$

com $a = a\left(x\right)$ nas condições de (2.65). A energia total de (3.28) é dada por

$$E\left(t\right) = \frac{1}{2}\left\|u\left(x,t\right)\right\|^2,$$

e, como podemos ver, ela satisfaz a seguinte lei de dissipação:

$$\frac{d}{dt}E\left(t\right) = -\frac{1}{2}\left|u_{xx}\left(0,t\right)\right|^2 - \int_0^L a\left(x\right)\left|u\left(x,t\right)\right|^2 dx \leq 0, \, \forall t > 0. \tag{3.29}$$

Temos, portanto, o seguinte resultado:

Teorema 3.3 *Seja $a\left(x\right)$ uma função não negativa nas condições de* (2.65)*. Então, para qualquer $L > 0$, existem constantes positivas R, $c = c\left(R\right)$ e $\mu = \mu\left(R\right) > 0$ tais que*

$$E\left(t\right) \leq c\left\|u_0\right\|^2 e^{-\mu t}, \quad \forall t \geq 0, \tag{3.30}$$

e qualquer solução de (3.28) com $u_0 \in L^2\left(0,L\right)$ tal que $\left\|u_0\right\| \leq R$.

Prova: Integrando (3.29) sobre $(0,t)$, com $t \in (0,T)$, obtemos

$$E(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t |u_{xx}(0,t)|^2 - \int_0^t \int_0^L a(x)\,|u(x,t)|^2\,dx + E(0).$$

Daí

$$E(t) \le E(0) = \frac{1}{2}\|u_0\|^2, \ \ \forall t \ge 0. \tag{3.31}$$

Afirmação: Para cada $T > 0$, existe uma constante $C = C(T) > 0$ tal que

$$\|u_0\|^2 \le C\left\{\int_0^T |u_{xx}(0,t)|^2\,dt + \int_0^T \int_0^L a(x)\,|u(x,t)|^2\,dxdt\right\}. \tag{3.32}$$

De fato, multiplicando $(3.28)_1$ por xu e integrando sobre Q_T temos

$$\int_0^T \int_0^L \left[u_t xu + u_x xu + u_{xxx} xu - u_{xxxxx} xu + u^3 x u_x + a(x)\,x\,|u|^2\right] dxdt = 0. \tag{3.33}$$

Utilizando integração por partes e as condições de fronteira de (3.28) em (3.33), segue que

$$\int_0^T \int_0^L u_t xudxdt = \frac{1}{2}\int_0^L x\,|u(x,T)|^2\,dx - \frac{1}{2}\int_0^L x\,|u(x,0)|^2\,dx, \tag{3.34}$$

$$\int_0^T \int_0^L u_x xudxdt = -\frac{1}{2}\int_0^T \int_0^L |u(x,t)|^2\,dxdt, \tag{3.35}$$

$$\int_0^T \int_0^L u_{xxx} xudxdt = \frac{3}{2}\int_0^T \int_0^L |u_x(x,t)|^2\,dxdt, \tag{3.36}$$

$$\int_0^T \int_0^L u_{xxxxx} xudxdt = -\frac{5}{2}\int_0^T \int_0^L |u_{xx}(x,t)|^2\,dxdt, \tag{3.37}$$

$$\int_0^T \int_0^L u_x xu^3 dxdt = -\frac{1}{4}\int_0^T \int_0^L u^4 dxdt. \tag{3.38}$$

Substituindo (3.34)-(3.38) em (3.33), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^L x\,|u(x,T)|^2\,dx + \frac{3}{2}\int_0^T \int_0^L |u_x(x,t)|^2\,dxdt + \frac{5}{2}\int_0^T \int_0^L |u_{xx}(x,t)|^2\,dxdt \\
&+\int_0^T \int_0^L a(x)\,x\,|u(x,t)|^2\,dxdt = \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^L |u(x,t)|^2\,dxdt + \frac{1}{4}\int_0^T \int_0^L u^4 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^L xu_0^2 dx.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|u\|^2_{L^2(0,T;H^2(0,L))} \le (2T + L)\,\|u_0\|^2 + \frac{1}{6}\int_0^T \int_0^L u^4 dxdt. \tag{3.39}$$

A desigualdade de Gagliardo-Niremberg (ver Lema 1.11) juntamente com (3.31) implica

$$
\begin{aligned}
\int_0^T\int_0^L u^4 dxdt &\leq c\int_0^T \|u(x,t)\|^2\|u_x(x,t)\|^2 dt \\
&\leq c\|u_0\|^2\int_0^T \|u_x(x,t)\|^2 dt \\
&\leq c\|u_0\|^2\|u\|^2_{L^2\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)} \\
&\leq C\|u_0\|^2\|u\|^2_{L^2(0,T;H^2(0,L))},
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

para alguma constante positiva C. Voltando a (3.39) temos

$$
\|u\|^2_{L^2(0,T;H^2(0,L))} \leq \left[\frac{2(4T+L)}{6-C\|u_0\|^2}\right]\|u_0\|^2. \tag{3.41}
$$

Por outro lado, multiplicando $(3.28)_1$ por $(T-t)u$ e integrando em Q_T, obtemos

$$
\int_0^T\int_0^L (T-t)\left[uu_t + uu_x + uu_{xxx} - uu_{xxxxx} + u^3u_x + a(x)|u|^2\right] dxdt = 0. \tag{3.42}
$$

Usando integração por partes e as condições de fronteira de (3.28), temos

$$
\int_0^T\int_0^L (T-t)uu_t dxdt = -\frac{T}{2}\|u_0\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L |u(x,t)|^2 dxdt, \tag{3.43}
$$

$$
\int_0^T\int_0^L u_{xxx}(T-t)udxdt = 0, \tag{3.44}
$$

$$
\int_0^T\int_0^L u_x(T-t)udxdt = 0, \tag{3.45}
$$

$$
\int_0^T\int_0^L u_{xxxxx}(T-t)udxdt = \frac{1}{2}\int_0^T (T-t)|u_{xx}(0,t)|^2 dt, \tag{3.46}
$$

$$
\int_0^T\int_0^L (T-t)u^3u_x dxdt = 0. \tag{3.47}
$$

Substituindo (3.43)-(3.47) em (3.42) segue

$$
\begin{aligned}
&T\|u_0\|^2 = \int_0^T\int_0^L |u(x,t)|^2 dxdt + \int_0^T (T-t)|u_{xx}(0,t)|^2 dt \\
&+2\int_0^T\int_0^L (T-t)a(x)|u(x,t)|^2 dxdt,
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

à qual implica em

$$
\|u_0\|^2 \leq \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^L |u(x,t)|^2 dxdt + \int_0^T |u_{xx}(0,t)|^2 dt + 2\int_0^T\int_0^L a(x)|u(x,t)|^2 dxdt. \tag{3.49}
$$

Dessa forma, segue de (3.49) que, para provar (3.32), é suficiente mostrar que, para qualquer $T > 0$, existe $C = C(T) > 0$ tal que

$$\int_0^T \int_0^L |u(x,t)|^2 \, dxdt \leq C \left\{ \int_0^T |u_{xx}(0,t)|^2 \, dt + 2\int_0^T \int_0^L a(x) |u(x,t)|^2 \, dxdt \right\}. \tag{3.50}$$

Vamos argumentar por contradição, como já foi feito no capítulo anterior. Suponha que (3.50) não seja válida. Então podemos encontrar uma sequência de funções $\{u_n\} \in C^0([0,T]; L^2(0,L)) \cap L^2(0,T; H^2(0,L))$ que resolve (3.28) e tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^T \int_0^L |u_n(x,t)|^2 \, dxdt}{\int_0^T |(u_n)_{xx}(0,t)|^2 \, dt + \int_0^T \int_0^L a(x) |u_n(x,t)|^2 \, dxdt} = \infty. \tag{3.51}$$

Seja $\lambda_n = \sqrt{\int_0^T \int_0^L |u_n(x,t)|^2 \, dxdt}$ e definamos $w_n(x,t) = \frac{u_n(x,t)}{\lambda_n}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a função w_n resolve

$$\left| \begin{array}{l} (w_n)_t + (w_n)_x + (w_n)_{xxx} + w_n^2 (w_n)_x - (w_n)_{xxxxx} + a(x)\omega_n = 0 \quad \text{em} \quad Q_T, \\ w_n(0,t) = w_n(0,L) = (w_n)_x(0,t) = (w_n)_x(L,t) = (w_n)_{xx}(L,t) = 0, \ \ t \in (0,T), \\ w_n(x,0) = w_{0,n} = \dfrac{u_n(x,0)}{\lambda_n}, \ \ x \in (0,L). \end{array} \right. \tag{3.52}$$

Além disso,

$$\int_0^T \int_0^L |w_n(x,t)|^2 \, dxdt = 1 \tag{3.53}$$

e

$$\int_0^T |(w_n)_{xx}(0,t)|^2 \, dt + \int_0^T \int_0^L a(x) |w_n(x,t)|^2 \, dxdt \to 0, \text{ quando } n \to \infty. \tag{3.54}$$

Usando (3.53) e (3.54) em (3.49) temos que $\{v_n(\cdot,0)\}$ é uma sequência limitada em $L^2(0,L)$. Então, por (3.39) segue que

$$\|w_n\|_{L^2(0,T;H^2(0,L))} \leq c, \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.55}$$

para alguma constante c positiva. Pelo argumento usado em (3.40), garantimos a existência de uma constante $\tilde{C} > 0$ tal que

$$\int_0^T \int_0^L |w_n^3|^{4/3} \, dxdt \leq \tilde{C} \|w_{0,n}\|^2 \|w_n\|_{L^2(0,T;H^2(0,L))}.$$

A última desigualdade e (3.55) nos garante que

$$\left\{w_n^3\right\} \text{ é limitada em } L^{4/3}\left(Q_T\right).$$

Além disso, como $L^{4/3}(0,L) \hookrightarrow H^{-1}(0,L)$, concluimos que

$$\left\{w_n^2\left(w_n\right)_x\right\} = \left\{\frac{1}{3}\frac{d}{dx}\left\{w_n^3\right\}\right\} \text{ é limitada em } L^{4/3}\left(0,T;H^{-2}(0,L)\right). \tag{3.56}$$

Podemos ver que

$$\left(w_n\right)_t = -\left(w_n\right)_x - \left(w_n\right)_{xxx} - w_n^2\left(w_n\right)_x + \left(w_n\right)_{xxxxx} - a(x)\, w_n \text{ em } \mathcal{D}'\left(0,T;H^{-2}(0,L)\right). \tag{3.57}$$

Assim de (3.41), (3.56) e (3.57) deduzimos que

$$\left\{\left(w_n\right)_t\right\} \text{ é limitada em } L^{4/3}\left(0,T;H^{-2}(0,L)\right). \tag{3.58}$$

Como $H^2(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L)$ compactamente, temos por (3.55), (3.58) e o Teorema de compacidade de Aubin-Lions (Ver [41, Corolário 4]) que $\{w_n\}$ é relativamente compacta em $L^2(0,T;L^2(0,L))$. Assim, podemos extrair uma subsequência de $\{w_n\}$ tal que

$$w_n \to w \text{ forte em } L^2\left(0,T;L^2(0,L)\right) \tag{3.59}$$

e, por (3.53),

$$\|w\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))} = 1. \tag{3.60}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty}\inf\left\{\int_0^T \left|\left(w_n\right)_{xx}(0,t)\right|^2 dt + \int_0^T\int_0^L a(x)\left|w_n(x,t)\right|^2 dxdt\right\} \\ &\geq \int_0^T \left|w_{xx}(0,t)\right|^2 dt + \int_0^T\int_0^L a(x)\left|w(x,t)\right|^2 dxdt, \end{aligned} \tag{3.61}$$

onde w é única solução do problema

$$\left|\begin{array}{l} w_t + w_x + w_{xxx} - w_{xxxxx} + w^2 w_x + a(x)\, w = 0 \quad \text{em} \quad Q_T, \\ w(0,t) = w(L,t) = w_x(0,t) = w_x(L,t) = w_{xx}(L,t) = 0, \;\; t \in (0,T), \\ w(x,0) = w_0(x), \quad x \in (0,L), \end{array}\right.$$

satisfazendo

$$\left| \begin{array}{l} w_{xx}\left(0,t\right)=0, \quad t\in\left(0,T\right), \\ w\equiv 0 \;\; \text{em} \;\; \omega\times\left(0,T\right). \end{array} \right.$$

Logo, pelo Teorema A.2 (ver apêndice), podemos concluir que $w=0$ em ω, o que é uma contradição. Logo (3.32) é verdadeira e, utilizando os mesmos procedimentos como na prova Teorema 2.6, concluímos o resultado. ■

Apêndice A

Continuação Única

O nosso objetivo neste apêndice é provar resultados de continuação única que utilizamos para provar a estabilidade da solução para equação de Kawahara nos capítulos 2 e 3.

O primeiro resultado que provaremos é relacionado à equação de Kawahara com a não linearidade do tipo uu_x. Para isto, consideremos o seguinte

Teorema A.1 (Continuação Única) *Seja u solução do problema (2.64), com $a = a(x)$ e ω como em (2.65). Se*

$$\left| \begin{array}{l} u_{xx}(0, \cdot) = 0, \quad \forall t > 0, \\ u \equiv 0 \quad em \quad \omega \times (0, T), \end{array} \right.$$

então $u \equiv 0$ em Q_T.

Observemos que, derivando (2.64) com respeito a t e fazendo $w = u_t$, temos o seguinte sistema

$$\left| \begin{array}{l} w_t + w_x + w_{xxx} - w_{xxxxx} + (uw)_x + a(x) w = 0 \text{ em } Q_T, \\ w(0, t) = w(L, t) = w_x(0, t) = w_x(L, t) = w_{xx}(L, t) = 0, \quad t \in (0, T), \\ w(x, 0) = w_0(x), \quad x \in (0, L), \end{array} \right. \tag{A.1}$$

onde u é solução (2.64). Com isto, antes de provarmos o Teorema A.1, consideremos o seguinte resultado auxiliar:

Lema A.1 *Existe uma constante positiva* $C = C\left(T; \|u_0\|_{L^2(0,L)}\right) > 0$ *tal que*

$$\|v_0\|^2_{L^2(0,L)} \leq C\left\{\int_0^T v_{xx}^2(0,t)\,dt + \int_0^T\int_0^L a(x)\,v^2(x,t)\,dxdt + \|v_0\|_{H^{-5}(0,L)}\right\}, \tag{A.2}$$

para qualquer solução v *de (A.1).*

Prova: Para provar (A.2) combinamos técnicas de multiplicação e argumento de "compacidade-unicidade". Multiplicando a equação $(A.1)_1$ por $(T-t)\,v$ e integrando sobre Q_T, obtemos

$$\begin{aligned} T\|v_0\|^2_{L^2(0,L)} &= \int_0^T\int_0^L v^2 dxdt + \int_0^T (T-t)\,v_{xx}^2(0,t)\,dt \\ &+2\int_0^T\int_0^L a(x)\,v^2 dxdt + \int_0^T\int_0^L (T-t)\,u_x v^2 dxdt. \end{aligned} \tag{A.3}$$

De (A.3) concluimos que

$$\begin{aligned} \|v_0\|^2_{L^2(0,L)} &\leq \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^L v^2 dxdt + 2\int_0^T\int_0^L a(x)\,v^2 dxdt \\ &+\int_0^T v_{xx}^2(0,t)\,dt + \int_0^T\int_0^L |u_x|\,v^2 dxdt. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Temos ainda

$$\begin{aligned} \int_0^T\int_0^L |u_x|\,v^2 dxdt &\leq \int_0^T \|u_x\|_{L^2(0,L)}\|v\|^2_{L^4(0,L)}\,dt \\ &\leq \|u\|_{L^2(0,T;H^2(0,L))}\|v\|^2_{L^4(0,T;L^4(0,L))}. \end{aligned} \tag{A.5}$$

Segue por (2.99), (A.4) e (A.5) que

$$\|v_0\|^2_{L^2(0,L)} \leq C\|v\|^2_{L^4(0,T;L^4(0,L))} + \int_0^T v_{xx}^2(0,t)\,dt + 2\int_0^T\int_0^L a(x)\,v^2 dxdt, \tag{A.6}$$

onde $C > 0$ é uma constante que depende de T e $\|u_0\|$. Portanto, provar (A.2) é suficiente mostrar que, para qualquer $T > 0$ existe uma contante $C = C(T) > 0$ tal que

$$\|v\|^2_{L^4(0,T;L^4(0,L))} \leq C\left\{\int_0^T v_{xx}^2(0,t)\,dt + 2\int_0^T\int_0^L a(x)\,v^2(x,t)\,dxdt + \|v_0\|^2_{H^{-5}(0,L)}\right\} \tag{A.7}$$

para qualquer solução de (2.64). Para isto, iremos argumentar por contradição. Deste modo, suponhamos a existência de uma sequência de funções v_n solução de (2.64), satisfazendo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|v_n\|^2_{L^4(0,T;L^4(0,L))}}{\int_0^T |v_{n,x}(0,t)|^2 dt + 2\int_0^T\int_0^L a(x)\,v_n^2(x,t)\,dxdt + \|v_{0,n}\|^2_{H^{-5}(0,L)}} = \infty. \tag{A.8}$$

Seja $\lambda_n = \|v_n\|_{L^4(0,T;L^4(0,L))}$ e defina $w_n(x,t) = \frac{v_n(x,t)}{\lambda_n}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a função w_n satisfaz

$$\left| \begin{array}{l} w_{n,t} + w_{n,x} + w_{n,xxx} - w_{n,xxxxx} + \left(u(x,t)\, w_n\right)_x + a(x)\, w_n = 0 \quad \text{em} \quad Q_T, \\ w_n(0,t) = w_n(L,t) = w_{n,x}(0,t) = w_{n,x}(L,t) = w_{n,xx}(L,t) = 0, \;\; t \in (0,T), \\ w_n(x,0) = \dfrac{v_n(x,0)}{\lambda_n}, \quad x \in (0,L). \end{array} \right. \tag{A.9}$$

Além disso,

$$\|w_n\|_{L^4(0,T;L^4(0,L))} = 1 \tag{A.10}$$

e

$$\int_0^T |w_{n,xx}(0,t)|^2\, dt + 2\int_0^T \int_0^L a(x)\, w_n^2(x,t)\, dxdt + \|w_n(\cdot,0)\|_{H^{-5}(0,L)}^2 \to 0, \tag{A.11}$$

quando $n \to \infty$.

Usando (A.6), (A.10) e (A.11) segue que $\{w_n(x,0)\}$ é limitado em $L^2(0,L)$ e, portanto, de acordo com (2.80),

$$\|w_n\|_{L^2(0,T;H^2(0,L))} \leq C, \tag{A.12}$$

para alguma constante $C > 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} &\|(uw_n)_x\|_{L^2(0,T;L^1(0,L))} \leq \|w_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}\, \|u\|_{L^2(0,T;H^2(0,L))} \\ &+ \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}\, \|w_n\|_{L^2(0,T;H^2(0,L))}. \end{aligned} \tag{A.13}$$

Assim, utilizando (A.13) obtemos uma constante $C > 0$ tal que

$$\|(uw_n)_x\|_{L^2(0,T;L^1(0,L))} \leq C. \tag{A.14}$$

Provemos que

$$\{(w_n)_t\} \text{ é limitada em } L^2\left(0,T;H^{-3}(0,L)\right). \tag{A.15}$$

De fato, de acordo com (A.9), $w_{n,t}$ satisfaz

$$w_{n,t} = -w_{n,x} - w_{n,xxx} - (uw_n)_x + w_{n,xxxxx} + a(x)\, w_n \;\; \text{em} \;\; \mathcal{D}'\left(0,T;H^{-3}(0,L)\right), \tag{A.16}$$

e (A.12)-(A.14) garantem a limitação (em $L^2(0,T;H^{-3}(0,L))$) dos termos que estão do lado direito da igualdade.

Afirmação: Existe uma constante $s > 0$ tal que $\{w_n\}$ é limitado em $L^4(0,T;H^s(0,L))$, e a imersão $H^s(0,L) \hookrightarrow L^4(0,L)$ é compacta.

De fato, como $\{w_n\}$ é limitada em $L^\infty(0,T;L^2(0,L)) \cap L^2(0,T;H^2(0,L))$, por interpolação podemos deduzir que $\{w_n\}$ é limitada em

$$\left[L^q\left(0,T;L^2(0,L)\right), L^2\left(0,T;H^2(0,L)\right)\right]_\theta = L^p\left(0,T;\left[L^2(0,L);H^2(0,L)\right]_\theta\right),$$

onde $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{2}$ e $0 < \theta < 1$. Então, escolhendo $p = 4$, $q = \infty$ e $\theta = \frac{1}{2}$, garantimos que $s = \frac{1}{2}$, isto é,

$$\left[L^2(0,T), H^2(0,L)\right]_{\frac{1}{2}} = H^{\frac{1}{2}}(0,L).$$

Além disso, a imersão $H^{\frac{1}{2}}(0,L) \hookrightarrow L^4(0,L)$ é compacta.

Então, usando a afirmação anterior, (A.15) e o resultado clássico de compacidade (ver [41, Corolário 4]), podemos extrair uma subsequência de $\{w_n\}$, que denotaremos também por $\{w_n\}$, tal que

$$w_n \to w \text{ forte em } L^4\left(0,T;L^4(0,L)\right) \tag{A.17}$$

e, por (A.10),

$$\|w_n\|_{L^4(0,T;L^4(0,L))} = 1. \tag{A.18}$$

Agora notemos que,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \inf \left\{ \int_0^T |w_{n,xx}(0,t)|^2 dt + \int_0^T \int_0^L a(x) w_n^2(x,t)\, dxdt + \|w_n(\cdot,0)\|^2_{H^{-5}(0,L)} \right\} \\ &\geq \int_0^T |w_{xx}(0,t)|^2 dt + 2\int_0^T \int_0^L a(x) w^2(x,t)\, dxdt + \|v(\cdot,0)\|^2_{H^{-5}(0,L)}, \end{aligned} \tag{A.19}$$

que implica, em particular, que $w(x,0) = 0$. Consequentemente, o limite w, que resolve o sistema

$$\left|\begin{array}{l} w_t + w_x + v_{xxx} + (u(x,t)\,w)_x - w_{xxxxx} + a(x)\,w = 0 \;\text{ em }\; Q_T, \\ w(0,t) = w(L,t) = w_x(0,t) = w_x(L,t) = w_{xx}(L,t) = 0, \quad t \in (0,T), \\ w(x,0) = 0, \quad x \in (0,L), \end{array}\right.$$

é identicamente nula, isto é, $w \equiv 0$. Isto contradiz (A.18) e, necessariamente, (A.7) é válida. Isto completa a prova do Lema A.1. ■

Agora provemos o resultado de continuação única.

Prova do Teorema A.1. Seja $u_0 \in L^2(0,L)$. Diferenciando a equação (2.64) com respeito a t, obtemos o sistema (A.1) com

$$v_0(x) = v(x,0) = u_t(x,0) = -u_{0,x} - u_{0,xxx} + u_{0,xxxxx} - u_0 u_{0,x} - a(x)\,u_0 \in H^{-5}(0,L).$$

Por outro lado, se $u_{xx}(0,t)$ e $a(x)\,u$ são nulos, então $v_{xx}(0,t) = 0$ e $a(x)\,v \equiv 0$. Consequentemente, a hipótese (2.65) e o Lema A.1, garantimos que $v_0 \in L^2(0,L)$. Agora, combinando o Teorema 2.3 e o sistema (2.64) obtemos

$$u_t = v \in L^\infty\left(0,T;L^2(0,L)\right) \cap L^2\left(0,T;H^2(0,L)\right) \tag{A.20}$$

e

$$\left|\begin{array}{l} u_{xxxxx} = -u_t - u_x - uu_x - u_{xxx} - a(x)\,u \quad \text{em} \quad Q_T, \\ u(0,t) = u(L,t) = u_x(0,t) = u_x(L,t) = u_{xx}(L,t) = 0,\ t \in (0,T). \end{array}\right. \tag{A.21}$$

Deste modo, de (A.20) e (A.21) segue que $u_{xxxxx} \in L^2(0,T;H^{-1}(0,L))$ e, portanto, $u_{xxxx} \in L^2(0,T;L^2(0,L))$. Consequentemente $u_{xxx} \in L^2(0,T;L^2(0,L))$. Assim, usando $(\text{A.21})_1$ concluímos que $u_{xxxxx} \in L^2(0,T;L^2(0,L))$. Daí, deduzimos que $u \in L^2(0,T;H^5(0,L)) \cap H^1(0,T;L^2(0,L))$. Finalmente, usando o Princípio de Continuação Única provado em [38, Cor. 1.2 e Th. 4.2], podemos garantir que $u \equiv 0$ em Q_T. ■

Agora vamos considerar o resultado de continuação única para a equação de Kawahara para o caso onde a não linearidade é do tipo u^2u_x. Nesse intuito, consideremos o seguinte

Teorema A.2 (Continuação Única) *Seja u solução do problema (3.1), com $a = a(x)$ e ω como em (2.65). Se*

$$\left|\begin{array}{l} u_{xx}(0,\cdot) = 0, \quad \forall t > 0, \\ u \equiv 0 \quad \text{em} \quad \omega \times (0,T), \end{array}\right.$$

então $u \equiv 0$ em Q_T.

Como fizemos anteriormente, observemos que derivando (3.28) com respeito a t e fazendo

$v = u_t$, obtemos o seguinte sistema:

$$\left| \begin{array}{l} v_t + v_x + v_{xxx} - v_{xxxxx} + \left(u^2 (x,t)\, v\right)_x + a(x)\, v = 0 \quad \text{em} \quad Q_T, \\ v(0,t) = v(L,t) = v_x(0,t) = v_x(L,t) = v_{xx}(L,t) = 0, \quad t \in (0,T), \\ v(x,0) = v_0(x), \quad x \in (0,L), \end{array} \right. \tag{A.22}$$

onde $v = u_t$ e u é solução de (3.28). Com isto, para provarmos o Teorema A.2, precisaremos do seguinte resultado auxiliar:

Lema A.2 *Existe uma constante positiva* $C = C\left(T; \|u_0\|_{L^2(0,L)}\right) > 0$ *tal que*

$$\|v_0\|^2_{L^2(0,L)} \leq C \left\{ \int_0^T v_{xx}^2 (0,t)\, dt + \int_0^T \int_0^L a(x)\, v^2 (x,t)\, dxdt + \|v_0\|^2_{H^{-5}(0,L)} + 1 \right\}, \tag{A.23}$$

para qualquer solução v *de (A.22).*

A prova do Lema A.2, bem como do Terorema A.2 serão omitidas, pois são análogas às provas do Lema A.1 e do Teorema A.1.

Referências Bibliográficas

[1] R. A. Adams, *Sobolev Space*, Academic Press, London, 1975.

[2] T. B. Benjamim, *Lectures on Nonlinear Wave Motion*, Lectures Notes in Applied Mathematics 15 (1974), 3-47.

[3] H. A. Biagioni and F. Linares, *On the Benney-Lin and Kawahara equations*, J. Math. Anal. Appl., 211 (1997), 131–152.

[4] J. L. Bona, *Nonlinear Wave Phenomena*, 51^o Seminário Brasileiro de Análise, Florianópolis, 2000.

[5] J. L. Bona, S. M. Sun, B. Y. Zhang, *A Non-Homogeneous Boundary-Value Problem for the Korteweg-de Vries Equation in a Quarter Plane*, Trans. Amer. Math. Soc. 354 (2002), no. 2, 427-490 (electronic).

[6] J. L. Bona, S. M. Sun and B.-Y. Zhang, *Boundary smoothing properties of the Korteweg-de Vries equation in a quarter plane and applications*, Dyn. Partial Differ. Equ., 3 (2006), 1–69.

[7] J. L. Bona, V. A. Dougalis, *An Initial and Boundary-Value Problem for a Model Equation for Propagation of Long Waves*, J. Math. Anal. Appl. 75 (1980), 503-502.

[8] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications,* Dunod, Paris, (1999).

[9] E. Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGrall-Hill, New York, (1955).

[10] T. Colin and M. Gisclon, *An initial-boundary-value problem that approximate the quarter-plane problem for the Korteweg-de Vries equation*, Nonlinear Anal., 46 (2001), 869–892.

[11] S. B. Cui, D. G. Deng and S. P. Tao, *Global existence of solutions for the Cauchy problemof the Kawahara equation with L_2 initial data*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), 22 (2006), 1457–1466.

[12] Sh. Cui and Sh. Tao, *Strichartz estimates for dispersive equations and solvability of the Kawahara equation*, J. Math. Anal. Appl., 304 (2005), 683–702.

[13] G. G. Doronin and N. A. Larkin, *Boundary value problems for the stationary Kawahara equation*, Nonlinear Analysis, 69 (2008), 1655-1665.

[14] G. G. Doronin, N. A. Larkin, *KdV Equation in Domains with Moving Boundaries*, J. Math. Anal. Appl. 328 (2007), 503-515.

[15] G. G. Doronin and N. A. Larkin, *Kawahara equation in a bounded domain*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 10 (2008), no. 4, 783-799.

[16] E. Emmrich, *Discrete versions of Gronwall's Lemma and their Applications to the Numerical Analysis of Parabolic Problems,* Preprinto No 637, Jully 1999, Preprint Reihe Mathematik Techniche Universität Berlin, Fachbereich Mathematik.

[17] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1997.

[18] A. V. Faminskii, *An initial boundary-value problem in a half-strip for the Korteweg-de Vries equation in fractional-order Sobolev spaces*, Comm. Partial Differential Equations, 29 (2004), 1653–1695.

[19] A. V. Faminskii, *On an initial boundary value problem in a bounded domain for the Generalized Korteweg-de Vries Equation*, Funct. Diff. Eq. 8 (2001) 1-2, 183-194.

[20] A. M. Gomes, *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução*, Instituto de Matemática-UFRJ, Rio de Janeiro, (1985).

[21] L. Hörmander, *Linear Partial Differential Equations*, Springer Verlag, 1969.

[22] T. Iguchi, *A long wave approximation for capillary-gravity waves and the Kawahara Equations*, Academia Sinica (New Series). Vol. 2 (2007), No. 2, pp. 179-220.

[23] T. Kawahara, *Oscillatory solitary waves in dispersive media*, J. Phys. Soc. Japan, 33 (1972), 260–264.

[24] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle*, Comm. Pure Appl. Math., 46 (1993), 527-620.

[25] V. V. Khablov, *Some Well-Posed Boundary Value Problems for the Korteweg-De Vries Equation*, Preprint, Inst. Mat. Sibirsk. Otdel. Acad. Nauk SSSR, Novosibirsk, *1979.*

[26] O. A. Ladyzhenkaja, *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics,* Applied Mathematical Sciences, 49, Springer-Verlag, New York , (1985).

[27] N. A. Larkin, *Korteweg-de Vries and Kuramoto-Sivashinsky Equations in Bounded Domains*, J. Math. Anal. Appl. 297(1) (2004), 169-185.

[28] F. Linares, G. Ponce, *Introduction to nonlinear Dispersive Equations,* Editora IMPA, 2006.

[29] J. L. Lions et E. Magenes, *Problèmes aux Limites Non Homogenes et Applications*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, vol. 1, (1968) .

[30] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites Non-Linéaires*, Dunod, Paris, (1969).

[31] L. A. Medeiros e M. Milla Miranda, *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, Textos de Métodos Matemáticos, vol. 25, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1989.

[32] L. A. Medeiros e P. H. Rivera, *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais*, Textos de Métodos Matemáticos, vol. 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1977.

[33] G. P. Menzala, C. F. Vasconcellos and E. Zuazua, *Stabilization of the Korteweg-de Vries equation with localized damping*, Quarterly of Appl. Math., LX (1) (2002), 111-129.

[34] A. F. Pazoto, *Unique continuation and decay for the Korteweg-de Vries equations with localized damping*, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations July (2005), Vol. 11, 473–486.

[35] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differencial Equations*, Spronger-Verlag, New York, (1983).

[36] L. Rosier, *Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 2 (1997), 33-55.

[37] L. Rosier, B. Y. Zhang, *Global stabilization of the generalized Korteweg-de Vries equation posed on a finite domain*, Preprint 2000.

[38] J. C. Saut and B. Scheurer, *Unique continuation for some evolutions equations,* J. Diff. Equations 66 (1987) 118-139.

[39] G. Schneider and C. E. Wayne, *The Rigorous Approximation of Long-Wavelength Capillary-Gravity Waves*, Arch. Rational Mech. Anal. 162 (2002) 247–285.

[40] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Hermann, 1966.

[41] S. Simon, *Compact sets in the space* $L^p(0,T;B)$. Annali di Matematica Pura ed Appicata CXLXVI (IV), (1987) 65-96.

[42] B. A. Ton, *Initial boundary value problems for the Korteweg-de Vries equation*, J. Differential Equations, 25 (1977), 288–309.

[43] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer Verlag, Berlin (1969).

[44] B. Y. Zhang, *Exact Boundary Controllability of the Korteweg-de Vries Equation*, SIAM J. Control Opt. 37 (1999) 55-71.

[45] E. Zuazua, *Exponencial decay for the semilinear wave equation with locally distrubuted damping,* Comm. Partial Differential Equations 152 (1990), 205-235.