Controlabilidade Exata e Aproximada da Equação da Onda Linear

por

Kelly Patricia Murillo

sob orientação de

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna (UFPB)

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-CCEN-UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Julho/2008

João Pessoa - PB

Controlabilidade Exata e Aproximada da Equação da Onda Linear

por

Kelly Patricia Murillo

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna (Orientador)

(Universidade Federal da Paraíba - UFPB)

Prof. Dr. Gladson Octaviano Antunes

(Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ)

Prof. Dr. Milton de Lacerda Oliveira

(Universidade Federal da Paraíba - UFPB)

Universidade Federal da Paraíba

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Ficha Catalográfica

MURILLO, Kelly Patricia.

Controlabilidade Exata e Aproximada da Equação da Onda.Linear.

Kelly Patricia Murillo.

João Pessoa: UFPB/DM, 2008.

108 p. 29cm

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Paraíba, DM.

1. Equação da onda. 2. Observabilidade.

3. Controlabilidade. 4. HUM.

I. Análise II. Título

Agradecimentos

A Deus por me permitir acordar cada manhã debaixo de Seu olhar misericordioso.

À Virgem por cuidar de mim a cada segundo da minha vida, brindando-me com Seu doce sorriso.

Ao Prof. Dr. Fágner Dias Araruna, por compartilhar comigo seus conhecimentos, pela excelente orientação, dedicação, paciência, compreensão e apoio desde o início do curso.

Aos Professores: Dr. Gladson Antunes, Dr. Milton de Lacerda Oliveira e Dr. Marivaldo Pereira Matos, por ter aceitado colaborar, de forma gentil, com nosso trabalho e pela contribuição à dissertação.

A todos os professores do departamento de Matemática da UFPB que contribuíram para meu engrandecimento acadêmico, em particular ao professor Dr. Everaldo Medeiros, pelo incondicional apoio, os conhecimentos adquiridos e sua admirável nobreza.

À minha mãe Maria Winnies, por me rodear sempre com seu doce amor, mostrando-me um mundo cheio de cores e fazendo de mim a mulher que hoje sou.

Ao meu amado esposo Bertolt Camilo, por brindar-me todo seu amor, cada segundo destes 10 anos juntos, acompanhando-me na conquista dos meus sonhos e fazendo-me a esposa mais feliz do mundo.

À toda minha família pelo constante incentivo, em particular aos meus irmãos Miguel Àngel e Pablo Cesar e as minhas sobrinhas Mitchel, Winnies Daniela e Maria Camila, por cantar e dançar para mim em cada encontro, lembrando-me que a distância não separa, une as pessoas que se amam.

Aos meus sogros Myriam e Eudoxio e a meus cunhados Johana e Edwin, pelo apoio, carinho e a proteção para com meu matrimônio.

Aos meus colegas de mestrado e amigos, particularmente a Luis Jonatha, Osvaldo e Fabiola pela agradável convivência, fazendo-me rir e acompanhando-me nos momentos difíceis.

À ”Turma de Compatriotas”: Alejandro Diego, Alexander, Luisa, Luz Marina e Luis, pelo incentivo em todo momento e estar presente sempre que precisei.

À ”Turma Internacional”, pela companhia e os momentos inesquecíveis desfrutando da cultura brasileira.

Ao Brasil, por abrir-me as portas, permitindo-me cumprir este sonho.

Ao CNPQ, pelo apoio financeiro.

.

Aos meus dois anjos: Maria Winnies, minha adorável mãe e Bertolt Camilo, meu amado esposo.

Resumo

Estudamos os problemas de controlabilidade exata e aproximada na fronteira e interna para um sistema associado à equação da onda linear com condição de contorno tipo Dirichlet. Com este fim, analisamos detalhadamente a existência, unicidade e regularidade de solução para o sistema. No estudo da controlabilidade exata, usamos, essencialmente, o Método de Unicidade Hilbertiana (HUM) e, por meio de métodos variacionais, mostramos que a controlabilidade pode ser reduzida a um problema de minimização. No caso da controlabilidade aproximada, abordamos o problema de minimização, fazendo uso do método de dualidade no sentido de Fenchel, encontrando, de forma natural, o funcional que nos fornece o controle de norma mínima.

Abstract

We studied exact (boundary and internal) and approximate (boundary and internal) controllability for the system associated to linear wave equation with Dirichlet boundary condition. For this purpose, we carry out a detailed analysis on existence, uniqueness and regularity of the solution for the system. To study exact controllability, we use the Hilbert Uniqueness Method (HUM). Through variational methods we show how the exact controllability can be reduced to a minimization problem. For the approximate controllability, we study a minimization problem via the duality method in the sense of Fenchel, where we find, in a natural way, a functional which give us control of the minimum norm.

Sumário

Notações e Simbologias

- $(\cdot,\cdot)$ designa o produto interno em L^2.
- $|\cdot|$ designa a norma em L^2.
- $((\cdot,\cdot))$ designa o produto interno em H_0^1.
- $\|\cdot\|$ designa a norma em H_0^1.
- $\langle\cdot,\cdot\rangle$, quando não especificado, designa diferentes pares de dualidades.
- $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ designa o operador laplaciano.
- q. s. - quase sempre.
- $\hookrightarrow$ designa a imersão contínua.
- $\overset{c}{\hookrightarrow}$ designa a imersão compacta.
- C, quando não especificada, é uma constante positiva e arbitrária.
- $' = \dfrac{\partial}{\partial t}$.
- $\underline{\lim}$ designa o limite inferior.
- $\mathcal{L}(X,Y)$ designa o espaço dos operadores lineares e contínuos de X em Y.
- $D(f)$ designa o domínio da função.f.

.

Introdução

A palavra controle pode ser entendida de várias formas. Controlar um sistema pode ser simplesmente testar se o comportamento do sistema é satisfatório. Num sentido mais profundo, o controle é também a ação para colocar coisas em ordem que garantem que o sistema se comporta como é desejado. Os problemas de controle se caracterizam porque além da incógnita natural, o estado, que queremos controlar, possuem uma variável a nossa disposição, o controle, que atua sobre o estado com a finalidade de alcançar ou aproximar os objetivos desejados.

A teoria de controle possui uma vasta literatura cuja origem se remota na Revolução Industrial, pois foi naquela época que surgiu a automatização dos processos de produção e, com ela, a necessidade de garantir que o objetivo buscado se cumprisse. No final dos anos 30, já se pensava em dois modos de abordar os problemas de controle: a utilização das equações diferenciais e, portanto, os desenvolvimentos matemáticos notáveis que haviam-se produzido neste campo nos séculos XVIII e XIX, e o a utilização das técnicas em análise freqüencial, desenvolvidas pelo matemático francês Joseph Fourier.

R. Kalman, um dos grandes protagonistas da teoria de controle moderna, em seu artigo [11] de 1974 sinalizava que, no futuro, os avanços na teoria de controle e a otimização de sistemas complexos vinham da mão de grandes progressos matemáticos mais que dos tecnológicos e, embora hoje não seja tão forte essa afirmação, o papel da matemática tem crescido bastante nas últimas décadas na teoria de controle. A partir dos anos 60 é reconhecida a necessidade de entrar no mundo do não-linear e do não determinístico. Isso explica essa imperiosa necessidade de utilizar cada vez mais a matemática para descobrir os mistérios do controle de sistemas.

A controlabilidade de Equações Diferenciais Parciais (EDP) tem sido objeto de um estudo intenso durante as duas últimas décadas, porém o tema já fora antes abordado. Em 1965 Markus [22] introduziu o conceito de controlabilidade de sistemas descritos por Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). Neste mesmo contexto, podemos ainda citar o clássico livro de Lee e Markus [14]. A controlabilidade de EDP, objetivo da nossa dissertação, teve um grande impulso com os trabalhos de Russel [29] e [30], publicando em 1978 um artigo onde apresentava uma boa perspectiva sobre os resultados mais relevantes que até esse momento haviam sido desenvolvidos. Esses freqüentemente estavam relacionados com outras áreas de EDP: multiplicadores, análise de Fourier não-harmônica, etc. Desde então, diversos autores tem contribuído com resultados muito significativos para o estudo da controlabilidade. Por exemplo, Lions [21] em 1986 introduziu um método sistemático e construtivo conhecido como Método de Unicidade Hilbertiana (HUM). O HUM consiste em reduzir a controlabilidade exata de sistemas lineares em um resultado de continuação única, que é equivalente à obtenção de uma desigualdade inversa, também denominada por Ho [10], desigualdade de observabilidade. A partir do HUM muitas descobertas importantes foram feitas neste campo.

Indicaremos brevemente, em termos matemáticos, o que entendemos por problemas de controle. Para fixar as idéias, assumiremos que desejamos obter um bom comportamento de um sistema físico representado pela equação

$$A(y) = f(v), \tag{1}$$

onde y é o estado, a incógnita do sistema que desejamos controlar e pertence ao espaço vetorial Y. Por outra parte v é o controle que pertence ao conjunto de controles admissíveis R. Esta é a variável que podemos escolher livremente em R, para atuar no sistema. Consideremos

$$A : D(A) \subset Y \to Y \quad \text{e} \quad f : R \to Y$$

duas aplicações (lineares ou não lineares). O operador A determina a equação que deve ser satisfeita pela variável estado y, de acordo com as leis da física. A função f indica a forma como o controle v atua sobre o sistema. Por simplicidade, assumamos que, para cada $v \in R$, a equação (1) possua exatamente uma solução $y = y(v)$ em Y. Então, aproximadamente falando, controlar (1) é achar $v \in R$ tal que a solução para (1) obtida se dirige ao estado prescrito desejado. Veremos que, quando o sistema é controlável, o controle pode ser construído por minimização de um funcional (funcional custo). Entre todos os controles admissíveis, o controle obtido pela minimização do funcional é de norma mínima, e é freqüentemente chamado de "melhor controle".

Matematicamente, os problemas de controle podem se distinguir entre: problemas não lineares/lineares, equações estacionárias/de evolução, sistemas em dimensão finita/infinita, etc. Grande parte da investigação matemática que se desenvolve atualmente na Teoria de Controle está centrada nos modelos em dimensão infinita. A equação da onda desde o ponto de vista das aplicações, tem sido das mais estudadas, pois modela muitos fenômenos físicos tais como: pequenas vibrações de corpos elásticos, propagação do som, e modelos fundamentais da mecânica quântica. Além de ser a mais representativa EDP do tipo hiperbólica, é de grande interesse no estudo de questões relacionadas à controlabilidade. Os primeiros estudos sobre esta equação, realizam-se no final do século XVIII, época em que estavam-se estabelecendo os pilares fundamentais da Análise Matemático tal qual entendemos hoje. Em 1747 d'Alembert em [3] e [2], propor uma expresão para a solução da equação sem condições de contorno. Posteriormente Bernoulli, em seu artigo [5] de 1753, obteve soluções da equação da corda vibrante. Os desenvolvimentos posteriores que tem se produzido estão freqüentemente ligados a avanços importantes em análise de Fourier, óptica geométrica, análise numérica, etc. Dessa maneira pode-se afirmar que a equação da onda é uma das protagonistas mais destacadas da Matemática destes dois últimos séculos.

Nesta dissertação estudamos algumas propriedades (existência, unicidade, regularidade e controlabilidade) da equação da onda linear com condições de contorno tipo Dirichlet.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, limitado e com fronteira Γ suficientemente regular e para $T > 0$ um número real, seja $Q = \Omega \times (0,T) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o cilindro com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$. Seja Γ_0 uma parte de Γ, com medida positiva tal que $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{(\Gamma - \Gamma_0)} = \emptyset$.

Consideremos o sistema

$$\left\{\begin{array}{l} u'' - \Delta u = 0 \text{ em } \quad Q, \\ u = \left\{\begin{array}{ll} v & \text{sobre} \quad \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0,T)\,, \\ 0 & \text{sobre} \quad \Sigma - \Sigma_0, \end{array}\right. \\ u(\cdot,0) = u^0, \quad u'(\cdot,0) = u^1 \text{ em } \quad \Omega, \end{array}\right. \tag{2}$$

onde $u = u\,(x,t)$ é o estado e $v = v\,(x,t)$ a função controle. O problema de controle consiste em encontrar uma maneira de v atuar em Σ_0 de tal forma que a solução u do sistema (2) alcance o equilíbrio no instante T.

No sistema (2) o controle encontra-se localizado na fronteira. O controle pode atuar também no interior do domínio.

Seja ω um subconjunto aberto de Ω e 1_ω sua função característica. Consideremos o sistema

$$\left\{\begin{array}{lll} u'' - \Delta u = h 1_\omega & \text{em} & Q, \\ u = 0 & \text{em} & \Sigma, \\ u\,(0) = u^0,\ u'\,(0) = u^1 & \text{em} & \Omega, \end{array}\right. \tag{3}$$

onde $u = u\,(x,t)$ é o estado e $h = h\,(t,x)$ a função controle.

O problema de controlabilidade pode ser considerado em vários graus de precisão de acordo o objetivo proposto. De maneira mais precisa, o problema de controlabilidade pode ser formulado da seguinte forma:

Considere um sistema de evolução (descrito por EDO ou EDP). Dados um intervalo de tempo $(0,T)$ e estados inicial e final, devemos encontrar um controle tal que a solução do sistema seja igual ao estado inicial no tempo $t = 0$ e alcance o estado final no tempo $t = T$.

Contudo, a condição de dirigir a solução ao estado final no tempo $t = T$, pode ser interpretada de diferentes formas, dando lugar a diversas noções de controlabilidade de um sistema. Muitos problemas de diferentes naturezas se adequam neste amplo contexto e, suas resoluções, dependem de diversos aspectos do sistema: linearidade ou não-linearidade, reversibilidade, estrutura do conjunto de controles admissíveis, entre outros.

Nosso trabalho está direcionado ao estudo de dos tipos de controlabilidade: quando o conjunto de estados alcançáveis coincide com o espaço dos dados iniciais (controlabilidade exata) e quando o conjunto de estados alcançáveis é simplesmente um subconjunto denso do espaço dos dados iniciais (controlabilidade aproximada).

Esta dissertação está baseada em resultados que aparecem nos trabalhos de Lions ([16], [17], [20]), Medeiros [23], Micu e Zuazua [27] e Zuazua ([33], [34]).

Passemos agora a descrever o conteúdo desta dissertação, que está dividida em três capítulos.

No Capítulo 1, temos alguns resultados básicos e algumas notações essenciais para o entendimento do trabalho.

No Capítulo 2, provamos a existência, unicidade e regularidade de soluções forte, fraca e ultra fraca da equação da onda linear. Usamos o Método de Faedo-Galerkin para provar a existência de solução forte. A solução fraca é obtida como limite de uma seqüência de soluções fortes. O Método de Transposição é usado para definir a solução ultra fraca.

No Capítulo 3, estudamos a controlabilidade exata e aproximada da equação linear da onda, considerando, para os dois casos, o controle localizado na fronteira do domínio Ω e no seu interior. Vimos, por meio do HUM, que o problema de controlabilidade exata é equivalente a provar uma desigualdade de observabilidade associada ao sistema adjunto. Além disso, mostramos como o problema de controlabilidade se reduz a um problema de minimização. Na controlabilidade aproximada formulamos um problema de minimização e, em seguida, fizemos uso de um método de dualidade no sentido de Fenchel para encontrarmos um funcional custo e, a partir do mínimo desse funcional, construir o controle desejado.

Para finalizar o trabalho, escrevemos dois apêndices. No primeiro é apresentado o resultado que nos garante a existência e prolongamento de soluções aproximadas, e é parte essencial à obtenção da solução forte da equação linear da onda. O segundo apêndice está destinado às provas das desigualdades inversas (ou desigualdades de observabilidade), essenciais para obtermos a controlabilidade na fronteira e interna da equação de onda linear.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo daremos algumas definições e resultados essenciais à continuidade do trabalho.

1.1 Espaços Funcionais

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e uma função contínua $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, define-se suporte de f, e denota-se por supp(f), o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega;\ f(x) \neq 0\}$. Assim, supp$(f)$ é um subconjunto fechado de Ω.

Uma n-upla de inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ é denominada de multi-índice e sua ordem é definida por $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Representa-se por D^α o operador de derivação de ordem $|\alpha|$, isto é,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, 0, ..., 0)$, define-se $D^0 u = u$, para toda função u.

Por $C_0^\infty(\Omega)$ denota-se o espaço vetorial, com as operações usuais, das funções infinitamente diferenciáveis definidas e com suporte compacto em Ω.

Um exemplo clássico de uma função de $C_0^\infty(\Omega)$ é dado por

Exemplo 1.1 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto tal que* $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| < 1\} \subset \Omega$.

Consideremos $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, *tal que*

$$f(x) = \left| \begin{array}{ll} e^{\frac{1}{\|x\|^2 - 1}} & se \ \ \|x\| < 1, \\ 0 & se \ \ \|x\| \geq 1, \end{array} \right.$$

onde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *e* $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ *é a norma euclidiana de* x. *Temos que* $f \in C^{\infty}(\Omega)$ *e* $supp(f) = \overline{B_1(0)}$ *é compacto, isto é* $f \in C_0^{\infty}(\Omega)$.

Definição 1.1 *Diz-se que uma sequência* $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *em* $C_0^{\infty}(\Omega)$ *converge para* φ *em* $C_0^{\infty}(\Omega)$, *quando forem satisfeitas as seguintes condições:*

(i) Existe um compacto K de Ω tal que $\text{supp}(\varphi) \subset K$ e $\text{supp}(\varphi_n) \subset K$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

(ii) $D^{\alpha}\varphi_n \to D^{\alpha}\varphi$ uniformemente em K, para todo multi-índice α.

Observação 1.1 *É possível (ver [31]) dotar* $C_0^{\infty}(\Omega)$ *com uma topologia de forma que a noção de convergência nessa topologia coincida com a dada pela Definição 1.1.*

O espaço $C_0^{\infty}(\Omega)$, munido da noção de convergência acima definida será denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado de Espaço das Funções Testes sobre Ω.

Uma distribuição (escalar) sobre Ω é um funcional linear contínuo sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. Mais precisamente, uma distribuição sobre Ω é um funcional $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall\, \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

(ii) T é contínua, isto é, se $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $(T(\varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$.

É comum denotar o valor da distribuição T em φ por $\langle T, \varphi \rangle$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω, com as operações usuais, é um espaço vetorial, o qual representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Os seguintes exemplos de distribuições escalares desempenham um papel fundamental na teoria.

Exemplo 1.2 *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. *O funcional* $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, *definido por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\, \varphi(x)\, dx,$$

é uma distribuição sobre Ω *univocamente determinada por* u (*ver* [25]). *Por esta razão, identifica-se* u *à distribuição* T_u *por ela definida e, desta forma,* $L^1_{loc}(\Omega)$ *será identificado a uma parte (própria) de* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemplo 1.3 *Consideremos* $0 \in \Omega$ *e o funcional* $\delta_0 : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, *definido por*

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

δ_0 *é uma distribuição sobre* Ω (*ver* [25]). *Além disso, mostra-se que* δ_0 *não é definido por uma função de* $L^1_{loc}(\Omega)$, *isto é, não existe* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que* $\langle \delta_0, \varphi \rangle = \int f\varphi$.

Definição 1.2 *Diz-se que uma sequência* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *converge para* T *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$, *quando a sequência numérica* $(\langle T_n, \varphi \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergir para* $\langle T, \varphi \rangle$ *em* $\mathbb{R}$, *para toda* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 1.3 *Sejam* T *uma distribuição sobre* Ω *e* α *um multi-índice. A derivada* $D^\alpha T$ *(no sentido das distribuições) de ordem* $|\alpha|$ *de* T *é o funcional definido em* $\mathcal{D}(\Omega)$ *por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observação 1.2 *Decorre da Definição 1.3 que cada distribuição* T *sobre* Ω *possui derivadas de todas as ordens.*

Observação 1.3 $D^\alpha T$ *é uma distribuição sobre* Ω, *onde* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. *De fato, vê-se facilmente que* $D^\alpha T$ *é linear. Agora, para a continuidade, consideremos* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergindo para* φ *em* $\mathcal{D}(\Omega)$. *Assim,* $|\langle D^\alpha T, \varphi_n \rangle - \langle D^\alpha T, \varphi \rangle| \leq |\langle T, D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi \rangle| \to 0$, *quando* $n \to \infty$.

Observação 1.4 *A aplicação* $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ *tal que* $T \mapsto D^\alpha T$ *é linear e contínua no sentido da convergência definida em* $\mathcal{D}'(\Omega)$ (*ver* [26]).

Dado um número inteiro $m > 0$, por $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, representa-se o espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω, isto é, o espaço vetorial das (classes de) funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α, com $|\alpha| \leq m$.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ quando } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} ess \, |D^\alpha u(x)|, \text{ quando } p = \infty,$$

é um espaço de Banach (vide [26]).

Dado um espaço de Banach X, denotaremos por $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço de Banach das (classes de) funções u, definidas em $(0,T)$ com valores em X, que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X^p$ é integrável a Lebesgue em $(0,T)$, com a norma

$$\|u(t)\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por $L^\infty(0,T;X)$ representa-se o espaço de Banach das (classes de) funções u, definidas em $(0,T)$ com valores em X, que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X$ possui supremo essencial finito em $(0,T)$, com a norma

$$\|u(t)\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t \in (0,T)} ess \, \|u(t)\|_X.$$

Observação 1.5 *Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por*

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X \, dt.$$

Se X é separável, então podemos identificar

$$[L^p(0,T;X)]' \approx L^q(0,T;X'),$$

onde $(1/p)+(1/q)=1$. Quando $p=1$, faremos a identificação

$$\left[L^1(0,T;X)\right]' \approx L^\infty(0,T;X').$$

Essas identificações encontram-se detalhadas em [21].

O espaço vetorial das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X é denominado de Espaço das Distribuições Vetoriais sobre $(0,T)$ com valores em X e denotado por $\mathcal{D}'(0,T;X)$.

Definição 1.4 *Dada $S \in \mathcal{D}'(0,T;X)$, define-se a derivada de ordem n como sendo a distribuição vetorial sobre $(0,T)$ com valores em X dada por*

$$\left\langle \frac{d^n S}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle S, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Exemplo 1.4 *Dadas $u \in L^p(0,T;X)$, $1 \le p < \infty$, e $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$ a aplicação $T_u : \mathcal{D}(0,T) \to X$, definida por*

$$T_u(\varphi) = \int_0^T u(t)\,\varphi(t)\,dt,$$

integral de Bochner em X, é linear e contínua no sentido da convergência de $\mathcal{D}(0,T)$, logo uma distribuição vetorial. A aplicação $u \mapsto T_u$ é injetiva, de modo que podemos identificar u com T_u e, neste sentido, temos $L^p(0,T;X) \subset \mathcal{D}'(0,T;X)$.

Para $1 \le p \le \infty$, consideremos o espaço

$$W^{m,p}(0,T;X) = \left\{u \in L^p(0,T;X);\ u^{(j)} \in L^p(0,T;X),\ j=1,...,m\right\},$$

onde $u^{(j)}$ representa a j-ésima derivada de u no sentido das distribuições vetoriais. Equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(0,T;X)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{j=0}^m \left\|u^{(j)}(t)\right\|_{L^p(0,T;X)}\right), & 1 \le p < \infty, \\ \displaystyle\sup_{t\in(0,T)} ess \left(\sum_{j=0}^m \left\|u^{(j)}(t)\right\|_X\right), & p = \infty, \end{cases}$$

$W^{m,p}(0,T;X)$ é um espaço de Banach (vide [1]).

O espaço

$$W_0^{m,p}(0,T;X) = \{u \in W^{m,p}(0,T;X);\ u(0) = u(T) = 0\},$$

representa o fecho de $\mathcal{D}(0,T;X)$ com a norma de $W^{m,p}(0,T;X)$.

Observação 1.6 *Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $W^{m,p}(0,T;X)$ será denotado por $H^m(0,T;X)$, que munido do produto interno*

$$(u,v)_{H^m(0,T;X)} = \sum_{j=0}^{m} \left(u^{(j)}, v^{(j)}\right)_{L^2(0,T;X)}$$

é um espaço de Hilbert. Denota-se por $H_0^m(0,T;X)$ o fecho, em $H^m(0,T;X)$, de $\mathcal{D}(0,T;X)$ e por $H^{-m}(0,T;X)$ o dual topológico de $H_0^m(0,T;X)$.

1.2 Principais Resultados Utilizados

Teorema 1.1 (Teorema da Aplicação Aberta) *Sejam E e F dois espaços de Banach e seja T um operador linear contínuo e bijetivo de E em F. Então existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$B_F(0,c) \subset T(B_E(0,1)).$$

Prova: Ver [6]. ■

Lema 1.1 (Imersão de Sobolev) *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular.*

(i) Se $n > pm$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, onde $q \in \left[1, \dfrac{np}{n-mp}\right]$.

(ii) Se $n = pm$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, onde $q \in [1, +\infty)$.

(iii) Se $n = 1$ e $m \geq 1$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Prova: Ver [6]. ■

Lema 1.2 (Rellich-Kondrachov) *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular.*

(i) Se $n > pm$, então $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, onde $q \in \left[1, \dfrac{2n}{n-2m}\right)$.

(ii) Se $n = pm$, então $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, onde $q \in [1, +\infty)$.

(iii) Se $pm > n$ então $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^k\left(\overline{\Omega}\right)$, onde k é um inteiro não negativo tal que $k < m - (n/p) \leq k + 1$

Prova: Ver [6]. ■

Teorema 1.2 (Teorema do Traço) *A aplicação linear*

$$u \mapsto (\gamma_0 u, \gamma_1 u, ..., \gamma_{m-1} u) = \left(u|_{\Gamma}, \left.\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\right|_{\Gamma}, ..., \left.\frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu_A^{m-1}}\right|_{\Gamma} \right)$$

de $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$ em $\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$, prolonga-se, por continuidade, a uma aplicação linear, contínua e sobrejetiva de $W^{m,p}(\Omega)$ em $\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$.

Prova: Ver [21]. ■

Observação 1.7 *Note que para o caso unidimensional, isto é, $\Omega = (\alpha, \beta)$, se $u \in H^m(\alpha, \beta)$, então pelo Lema 1.2, $u \in C^{m-1}([\alpha, \beta])$. Logo faz sentido definir a função u e suas derivadas suas derivadas na fronteira, que no caso será $\Gamma = \{\alpha, \beta\}$.*

Teorema 1.3 (Banach-Alaoglu-Bourbaki) *Seja E um espaço de Banach. O conjunto $\boldsymbol{B}_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\}$ é compacto com respeito a topologia fraca $-*$ $\sigma(E', E)$.*

Prova: Ver [6]. ■

Lema 1.3 (Gronwall) *Sejam $m \in L^1(0,T;R)$, $m \geqslant 0$ q.s em $(0,T)$, $a \geqslant 0$ real constante e $g \in L^\infty(0,T)$, $g \geqslant 0$ em $(0,T)$, tal que:*

$$\frac{1}{2} g(t)^2 \leq 2a^2 + 2\int_0^t m(s) g(s) ds \;\; \forall t \in (0,T).$$

Então

$$g(t) \leq 2(a + \int_0^t m(s)ds) \ \ em\ [0, T].$$

Prova: Ver [23]. ■

Lema 1.4 (Du Bois Raymond) *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Então*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

se,e somente se, $u = 0$ *quase sempre em* Ω.

Prova: Ver [26]. ■

Lema 1.5 (Lax-Milgram) *Seja* H *um espaço de Banach e* $a\,(u,\ v)$ *uma forma bilinear, contínua e coerciva. Para toda* $\varphi \in H'$ *existe um único* $u \in H$ *tal que*

$$a\,(u,\ v) = \langle \varphi,\ v\rangle\,,\ \forall\ v \in H.$$

Além disso, se a *é simétrica,* u *se caracteriza pela propriedade*

$$u \in H \quad e \quad \frac{1}{2}a\,(u,\ u) - \langle \varphi,\ u\rangle = \underset{v\in H}{Min}\left\{\frac{1}{2}a\,(v,\ v) - \langle \varphi,\ v\rangle\right\}.$$

Prova: Ver [6]. ■

Teorema 1.4 *Sejam* X *e* Y *espaços de Hilbert tal que* $X \hookrightarrow Y$ *e* $\mu \in L^p(0, T, X)$, $\mu' \in L^p(0, T; Y)$, $1 \leq p \leq \infty$, *então* $\mu \in C^0([0, T]\,; Y)$.

Prova: Ver [6]. ■

Teorema 1.5 *Sejam* E *um espaço de Banach,* E' *seu dual e* (f_n) *uma sucessão de* E'. *Se* $f_n \to f$ *fraco* $-*$ *em* $\sigma(E', E)$, *então* $\|f_n\| \leq C$ *e* $\|f\| \leq \underline{\lim}\,\|f_n\|$.

Prova: Ver [6]. ■

Teorema 1.6 *Seja* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Sejam* $u \in L^q(0, T, X') = E'$ *e* $v \in L^p(0, T, X) = E$, *então* $\langle u, v\rangle_{E',E} = \int_0^T \langle u(t), v(t)\rangle_{X',X}\, dt$.

Prova: Ver [6]. ■

Teorema 1.7 (Banach-Steinhaus) *Sejam E e F dois espaços de Banach. Seja (T_n) uma sucessão de operadores lineares contínuos de E em F tais que para cada $x \in E$, $T_n x$ converge quando $n \to \infty$ a um limite que denotamos por T_x. Então tem-se:*

(i) $\sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$,

(ii) $T \in \mathcal{L}(E,F)$,

(iii) $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \varliminf \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Prova: Ver [6]. ■

Teorema 1.8 (Gauss-Green) *Se $u \in C^1(\overline{\Omega})$, então $\int_\Omega u_{x_i} dx = \int_\Gamma u\nu^i d\Gamma \quad (i = 1, 2, ..., n)$.*

Prova: Ver [6]. ■

Teorema 1.9 (Fórmulas de Green) *(i) Se $\gamma \in H^2(\Omega)$, então $\int_\Omega \nabla\gamma \cdot \nabla u dx = -\int_\Omega u\Delta\gamma dx + \int_\Gamma \frac{\partial\gamma}{\partial\nu} u ds$, $\forall u \in H^1(\Omega)$.*

(ii) Se $u, \gamma \in H^2(\Omega)$, então $\int\limits_\Omega u\Delta\gamma - \gamma\Delta u dx = \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial\gamma}{\partial\nu} - \gamma\frac{\partial u}{\partial\nu} ds$.

Prova: Ver [6]. ■

Teorema 1.10 (Representação de Riesz) *Sejam $1 < p < \infty$ e $\varphi \in (L^p)'$. Então existe um único $u \in L^q$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int uf, \quad \forall f \in L^p.$$

Além disso se verifica

$$\|u\|_{L^q} = \|\varphi\|_{(L^p)'}.$$

Prova: Ver [6]. ■

Teorema 1.11 *Sejam H um espaço de Bananch reflexivo, K um subconjunto convexo fechado de H e $\phi : K \to \mathbb{R}$ uma função com as seguintes propriedades:*

(i) ϕ é convexa,

(ii) ϕ semi-continua inferiormente,

(iii) Se K é ilimitado, então ϕ é coercivo, ou seja,

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \phi(x) = \infty.$$

Então ϕ atinje um mínimo em K, ou seja, exite $x_0 \in K$ tal que

$$\phi(x_0) = \min_{x \in K} \phi(x).$$

Prova: Ver [6]. ■

Teorema 1.12 (Fenchel) *Sejam X e Y espaços de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $g : Y \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ funções semicontinuas inferiormente e convexas. Seja*

$$v = \inf_{x \in X} [f(x) + g(Ax)] \quad e \quad v^* = \inf_{q \in Y^*} [f^*(-A^*q) + g^*(q)],$$

onde f^* é a conjugada de f e é dada por $f^*(p) = \sup_{x \in X} [\langle p, x \rangle - f(x)]$. Se $0 \in int[A(D(f))) - D(g)]$, então:

(i) $v + v^* = 0$,

(ii) Existe $q' \in Y^*$ tal que $f^*(-A^*q') + g^*(q') = v^*$.

Prova: Ver [4]. ■

Teorema 1.13 (Regularidade) *Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto limitado com fronteira Γ de classe C^2. Sejam $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Então $u \in H^2(\Omega)$ e $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C|f|_{L^2(\Omega)}$, onde C é uma constante que só depende de Ω.

Prova: Ver [6]. ■

Capítulo 2

Soluções da Equação Linear da Onda

Neste capítulo, temos como objetivo estudar a existência, unicidade e regularidade da solução para um problema misto associado à equação da onda linear.

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto limitado com fronteira Γ suficientemente regular. Denotaremos por ν o vetor normal exterior a Γ e para $T > 0$ um número real, seja $Q = \Omega \times (0,T) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o cilindro com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$.

Problema: Dados ϕ^0, ϕ^1 e f, achar uma função numérica $\phi : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ que satisfaça:

$$\begin{cases} \phi'' - \triangle\phi = f & \text{em} \quad Q, \\ \phi = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ \phi(\cdot,0) = \phi^0, \quad \phi'(\cdot,0) = \phi^1 & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

2.1 Solução Forte

O objetivo nesta seção é provar a existência e unicidade de solução para o problema (2.1), quando ϕ^0, ϕ^1 e f são dados bastante regulares.

Definição 2.1 *Dizemos que uma função $\phi : Q \to \mathbb{R}$ é solução forte do problema* (2.1) *quando:*

$$\phi \in L^\infty\left(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right), \tag{2.2}$$

$$\phi' \in L^\infty\left(0,T; H_0^1(\Omega)\right), \tag{2.3}$$

$$\phi'' \in L^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \tag{2.4}$$

$$\phi'' - \triangle\phi = f,\ q.\ s.\ em\, Q, \tag{2.5}$$

$$\phi(\cdot,0) = \phi^0, \quad \phi'(\cdot,0) = \phi^1. \tag{2.6}$$

Enunciaremos agora o resultado que nos garante a existência e unicidade da solução forte para o problema (2.1).

Teorema 2.1 (Solução Forte) *Sejam* $\phi^0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $\phi^1 \in H_0^1(\Omega)$, $f \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$*, então existe uma única solução forte para o problema* (2.1).

Prova: Para provar a existência de solução, usaremos o método de Faedo-Galerkin que consiste em três etapas:

1. Construção de soluções aproximadas em um espaço de dimensão finita;

2. Obtenção de estimativas a priori para as soluções aproximadas;

3. Passagem ao limite das soluções aproximadas.

Para provar a unicidade, usaremos o método da energía.

- **Existência**

Soluções Aproximadas.

Consideremos $\{w_j\}_j$ uma base ortonormal em $L^2(\Omega)$, formada pelos autovetores do operador $-\Delta$, ou seja, cada vetor w_j é solução do problema espectral:

$$((w_j,v)) = \lambda_j (w_j,v),\ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

A existência desta base é garantida pelo Teorema Espectral (ver, por exemplo, [6] ou [28]). Seja $V_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$ o subespaço m-dimensional do $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, gerado pelos m-primeiros vetores da base $\{w_j\}_j$. O problema aproximado consiste em determinar funções $\phi_m(t) \in V_m$ tais que

$$\phi_m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j(x),$$

onde os $g_{jm}(t)$ são soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} (\phi_m''(t), v) + ((\phi_m(t), v)) = (f(t), v)\,, \ \forall v \in V_m, \\ \phi_m(0) = \phi_m^0(x) \to \phi^0 \quad \text{forte em} \quad H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\,, \\ \phi_m'(0) = \phi_m^1(x) \to \phi^1 \quad \text{forte em} \quad H_0^1(\Omega)\,. \end{cases} \tag{2.7}$$

As convergências anteriores têm sentido, pois o conjunto formado pelas combinações lineares de elementos de V_m é denso em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Pelo Teorema de Caratheodory, o sistema (2.7) tem solução no intervalo $[0, t_m]$, com $t_m < T$ (ver Apêndice A) e, essa solução, pode ser estendida a todo o intervalo $[0, T]$ como consequência das estimativas a priori que faremos a seguir.

Estimativas I. Fazendo $v = 2\phi_m'(t) \in V_m$ em $(2.7)_1$, temos:

$$(\phi_m''(t), 2\phi_m'(t)) + ((\phi_m(t), 2\phi_m'(t))) = (f(t), 2\phi_m'(t))\,,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\left|\phi_m'(t)\right|^2 + \frac{d}{dt}\left\|\phi_m(t)\right\|^2 = (f(t), 2\phi_m'(t))\,. \tag{2.8}$$

Integrando (2.8) de 0 a t, obtemos

$$\left|\phi_m'(t)\right|^2 + \left\|\phi_m(t)\right\|^2 = \left|\phi_m^1\right|^2 + \left\|\phi_m^0\right\|^2 + \int_0^t (f(s), 2\phi_m'(s))\,ds. \tag{2.9}$$

Utilizando as desigualdades de Cauchy-Schwartz, Hölder e Young, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^t (f(s), 2\phi_m'(s))\,ds &\leq \int_0^t \left|(f(s), 2\phi_m'(s))\right| ds \leq 2\int_0^t |f(s)|\,|\phi_m'(s)|\,ds \\ &\leq 2\left(\int_0^t |f(s)|\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t |f(s)|\,|\phi_m'(s)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \int_0^t |f(s)|\,ds + \int_0^t |f(s)|\,|\phi_m'(s)|^2\,ds. \end{aligned}$$

Substituindo a última desigualdade em (2.9) segue que

$$\left|\phi_m'(t)\right|^2 + \left\|\phi_m(t)\right\|^2 \leq \left|\phi_m^1\right|^2 + \left\|\phi_m^0\right\|^2 + \int_0^T |f(s)|\,ds + \int_0^t |f(s)|\,|\phi_m'(s)|^2\,ds. \tag{2.10}$$

Assim, pela hipótese sobre f e pelas convergências $(2.7)_2$ e $(2.7)_3$ obtemos de (2.10) que

$$\left|\phi_m'(t)\right|^2 + \left\|\phi_m(t)\right\|^2 \leq C + \int_0^t |f(s)| \left(\left|\phi_m'(s)\right|^2 + \left\|\phi_m(s)\right\|^2\right) ds, \tag{2.11}$$

onde C independe de m e t. Aplicando o Lema de Gronwall em (2.11), obtemos

$$\left|\phi_m'(t)\right|^2 + \left\|\phi_m(t)\right\|^2 \leq C, \tag{2.12}$$

onde C independe de m e t. Logo podemos estender a solução para todo o intervalo $[0, T]$ (ver Apêndice A, Corolário A.2).

Estimativas II. Fazendo em $(2.7)_1$, $v = -2\Delta\phi_m'(t) \in V_m$, temos

$$\left(\phi_m''(t), -2\Delta\phi_m'(t)\right) + \left(\left(\phi_m(t), -2\Delta\phi_m'(t)\right)\right) = \left(f(t), -2\Delta\phi_m'(t)\right),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\left\|\phi_m'(t)\right\|^2 + \frac{d}{dt}\left|\Delta\phi_m(t)\right|^2 = 2\left(\left(f(t), \phi_m'(t)\right)\right). \tag{2.13}$$

Integrando de 0 a $t \leq T$, segue que

$$\left\|\phi_m'(t)\right\|^2 + \left|\Delta\phi_m(t)\right|^2 = \left\|\phi_m^1\right\|^2 + \left|\Delta\phi_m^0\right|^2 + 2\int_0^t \left(\left(f(s), \phi_m'(s)\right)\right) ds. \tag{2.14}$$

Utilizando as desigualdades de Cauchy-Schwartz, Hölder e Young, temos:

$$\begin{aligned}
2\int_0^t \left(\left(f(s), \phi_m'(s)\right)\right) ds &\leq 2\int_0^t \left|\left(\left(f(s), \phi_m'(s)\right)\right)\right| ds \leq 2\int_0^t \|f(s)\| \left\|\phi_m'(s)\right\| ds \\
&\leq 2\left(\int_0^T \|f(s)\| ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|f(s)\| \left\|\phi_m'(s)\right\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \int_0^T \|f(s)\| ds + \int_0^t \|f(s)\| \left\|\phi_m'(s)\right\|^2 ds.
\end{aligned}$$

Substituindo a última desigualdade em (2.14), e levando em conta a hipótese sobre f, $(PA1)_2$ e $(PA1)_3$ segue que

$$\begin{aligned}
\left\|\phi_m'(t)\right\|^2 + \left|\Delta\phi_m(t)\right|^2 &\leq \left\|\phi_m^1\right\|^2 + \left|\Delta\phi_m^0\right|^2 + \int_0^T \|f(s)\| ds \\
+\int_0^t \|f(s)\| \left\|\phi_m'(s)\right\|^2 ds &\leq C + \int_0^t \|f(s)\| \left\|\phi_m'(s)\right\|^2 ds.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Aplicando o Lema de Gronwall (Lema 1.3), temos

$$\left\|\phi_m'(t)^2\right\| + \left|\Delta\phi_m(t)\right|^2 \leq C, \tag{2.16}$$

onde $C > 0$ independe de m e t.

Passagem ao limite. Por (2.12) e (2.16) obtemos

$$(\phi_m) \text{ é limitado em } L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega)), \tag{2.17}$$

$$(\phi'_m) \text{ é limitado em } L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega)), \tag{2.18}$$

$$(\Delta\phi_m) \text{ é limitado em } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)). \tag{2.19}$$

Assim, por (2.17) – (2.19) e o Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki (Teorema 1.3), podemos garantir a existência de uma subsequência de (ϕ_m), ainda denotada da mesma maneira, tal que

$$\phi_m \to \phi \quad \text{fraco} - * \text{ em} \quad L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \tag{2.20}$$

$$\phi'_m \to \alpha \quad \text{fraco} - * \text{ em} \quad L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega)), \tag{2.21}$$

$$\Delta\phi_m \to \beta \quad \text{fraco} - * \text{ em} \quad L^\infty(0, T, L^2(\Omega)). \tag{2.22}$$

Mostraremos agora que $\alpha = \phi'$ e $\beta = \Delta\phi$. De fato, por (2.20) temos que $\phi_m \to \phi$ em $\mathcal{D}'(Q)$ e, como o operador derivação é contínuo em $\mathcal{D}'(Q)$, então

$$\phi'_m \to \phi' \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(Q), \tag{2.23}$$

$$\Delta\phi_m \to \Delta\phi \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(Q). \tag{2.24}$$

Logo por (2.21) – (2.24) e a unicidade do limite, temos

$$\phi'_m \to \phi' \quad \text{fraco} - * \text{ em } L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega)), \tag{2.25}$$

$$\Delta\phi_m \to \Delta\phi \quad \text{fraco} - * \text{ em } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)). \tag{2.26}$$

Consideremos em (2.7) $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ e, em seguida, multipliquemos a equação por $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ e integremos de 0 a T, para obter

$$\int_0^T (\phi''_m(t), v)\, \theta(t) dt + \int_0^T (\Delta\phi_m(t), v)\, \theta(t) dt = \int_0^T (f(s), v)\, \theta(s) ds. \tag{2.27}$$

Note que

$$\int_0^T (\phi_m''(t), v)\, \theta(t)dt = \int_0^T \frac{d}{dt} (\phi_m'(t), v)\, \theta(t)dt = -\int_0^T (\phi_m'(t), v)\, \theta'(t)dt$$

e, por (2.25) ,

$$-\int_0^T (\phi_m'(t), v)\, \theta'(t)dt \to -\int_0^T (\phi'(t), v)\, \theta'(t)dt = \int_0^T \frac{d}{dt} (\phi'(t), v)\, \theta(t)dt. \tag{2.28}$$

Temos por (2.26) que

$$-\int_0^T (\Delta\phi_m(t), v)\, \theta(t)dt \to -\int_0^T (\Delta\phi(t), v)\, \theta(t)dt. \tag{2.29}$$

Logo, fazendo $m \to \infty$ em (2.27) e usando (2.28) e (2.29), obtemos

$$-\int_0^T (\phi'(t), v)\, \theta'(t)dt - \int_0^T (\Delta\phi(t), v)\, \theta(t)dt = \int_0^T (f(s), v)\, \theta(s)ds. \tag{2.30}$$

Seja $\beta(x,t) = v(x)\theta(t) \in \mathcal{D}(Q)$, portanto

$$-\int_0^T \int_\Omega \phi'(x,t)\beta'(x,t)dxdt - \int_0^T \int_\Omega \Delta\phi(x,t)\beta(x,t)dxdt = \int_0^T \int_\Omega f(x,s)\beta(x,s)dxds$$

e, assim,

$$\langle \phi'', \beta \rangle_{\mathcal{D}(Q),\mathcal{D}(Q)} = \int_Q (f(x,s) + \Delta\phi(x,s))\beta(x,s))dxds.$$

Dessa forma, a distribução ϕ'' é definida por $f + \Delta\phi \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ e

$$\int_Q [\phi''(x,s) - \Delta\phi(x,s) - f(x,s)]\, \beta(x,s)dxds = 0,\ \forall \beta \in \mathcal{D}(Q). \tag{2.31}$$

Logo, pelo Lema Du Bois Raymond (Lema 1.4), segue que

$$\phi'' - \Delta\phi = f \quad \text{q.s. em} \quad Q.$$

Condições Iniciais.

- $\phi(0) = \ \phi^0$

Desde que $\phi \in L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$ e $\phi' \in L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega))$, então $\phi \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega))$ (ver Teorema 1.4). Assim faz sentido $\phi(\cdot,0)$. Segue de (2.26) que

$$\int_0^T (\phi_m'(t),v)\theta(t)dt \to \int_0^T (\phi'(t),v)\theta(t)dt,\ \forall v \in L^2(\Omega)$$

e $\theta \in C^1([0,T])$, com $\theta(0)=1$ e $\theta(T)=0$. Logo,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(\phi_m(t),v)\theta(t)dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}(\phi(t),v)\theta(t)dt. \tag{2.32}$$

Integrando por partes, temos

$$-(\phi_m^0,v) - \int_0^T (\phi_m(t),v)\theta'(t)dt \to -(\phi(0),v) - \int_0^T (\phi(t),v)\theta'(t)dt. \tag{2.33}$$

Como, por (2.20), temos

$$\int_0^T (\phi_m(t),v)\theta'(t)dt \to \int_0^T (\phi(t),v)\theta'(t)dt,$$

concluimos de (2.33), que

$$(\phi_m^0,v) \to (\phi(0),v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Por outro lado, segue de $(2.7)_2$ que

$$(\phi_m^0,v) \to (\phi^0,v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Dessa forma, podemos concluir que $\phi^0 = \phi(0)$.

- $\phi'(0) = \phi^1$

Como $\phi' \in L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $\phi'' \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, então, pelo Teorema (1.4), $\phi' \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$, fazendo sentido calcular $\phi'(\cdot,0)$.
Multiplicando $(2.7)_1$ por $\theta_\delta \in H^1(0,T)$, definida por

$$\theta_\delta(t) = \begin{cases} \dfrac{-t}{\delta} + 1, \text{ se } 0 \le t \le \delta \\ 0, \text{ se } \delta \le t \le T \end{cases}$$

e integrando de 0 a T obtemos:

$$\int_0^T \left(\phi_m''(t), v\right)\theta_\delta(t)dt + \int_0^T \left(-\Delta\phi_m(t), v\right)\theta_\delta(t)dt = \int_0^T \left(f(t), v\right)\theta_\delta(t)dt.$$

Integrando por partes o primeiro termo,

$$-\left(\phi_m^1, v\right) + \frac{1}{\delta}\int_0^\delta \left(\phi_m'(t), v\right)dt - \int_0^\delta \left(-\Delta\phi_m(t), v\right)\theta_\delta(t)dt = \int_0^\delta \left(f(t), v\right)\theta_\delta(t)dt.$$

Fazendo $m \to \infty$ na última igualdade e observando as convergências $(2.7)_3$, (2.21) e (2.22) temos

$$-\left(\phi^1, v\right) + \frac{1}{\delta}\int_0^\delta \left(\phi'(t), v\right)dt - \int_0^\delta \left(-\Delta\phi(t), v\right)\theta_\delta(t)dt = \int_0^\delta \left(f(t), v\right)\theta_\delta(t)dt. \tag{2.34}$$

Fazendo agora $\delta \to 0$ em (2.34) concluimos que

$$-\left(\phi^1, v\right) + \left(\phi'(0), v\right) = \left(-\phi^1 + \phi'(0), v\right) = 0, \quad \forall v \in L^2(\Omega),$$

ou seja $\phi^1 = \phi'(0)$.

- **Unicidade**

Suponhamos ϕ e $\overline{\phi}$ duas soluções nas condições do Teorema 2.1. Então $\rho = \phi - \overline{\phi}$ satisfaz

$$\rho \in L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right),$$

$$\rho' \in L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right),$$

$$\rho'' \in L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right),$$

$$\rho'' - \Delta\rho = 0 \quad \text{q.s em} \quad Q,$$

$$\rho(0) = 0 \quad \text{e} \quad \rho'(0) = 0 \text{ em } \Omega.$$

Logo faz sentido a seguinte equação

$$\int_Q \rho''\rho' dxdt - \int_Q \Delta\rho\rho' dxdt = 0.$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|\rho'(t)|^2 + ||\rho(t)||^2\right) = 0$$

e portanto, $\rho = 0$, ou seja, $\phi = \overline{\phi}$. ■

Teorema 2.2 (Energia) *Se ϕ é solução forte do problema* (2.1), *então*

$$\left\|\phi'(t)\right\|^2 + \left|\Delta\phi(t)\right|^2 \leq \left\|\phi^1\right\|^2 + \left|\Delta\phi^0\right|^2 + 2\int_0^t ((f(s), \phi'(s)))\, ds \quad em \quad [0,T]. \tag{2.35}$$

Prova: Considerando em (2.7) $v = -2\Delta\phi_m'(t) \in V_m$ obtemos

$$(\phi_m''(t), -2\Delta\phi'(t)) + (\Delta\phi_m(t), -2\Delta\phi_m'(t)) = 2\left(f(t), \Delta\phi_m'(t)\right),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\left\|\phi_m'(t)\right\|^2 + \frac{d}{dt}\left|\Delta\phi_m(t)\right|^2 = ((f(t), \phi_m'(t))).$$

Integrando a última igualdade de 0 a $t \leq T$, obtemos

$$\left\|\phi_m'(t)\right\|^2 + \left|\Delta\phi_m(t)\right|^2 = \left\|\phi_m^1\right\|^2 + \left|\Delta\phi_m^0\right|^2 + 2\int_0^t ((f(s), \phi_m'(s)))\, ds. \tag{2.36}$$

Agora, multiplicando ambos lados de (2.36) por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando de 0 a T, temos:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left\|\phi_m'(t)\right\|^2 \theta(t)dt + \int_0^T \left|\Delta\phi_m(t)\right|^2 \theta(t)dt \\
&= \int_0^T \left\|\phi_m^1\right\|^2 \theta(t)dt + \int_0^T \left|\Delta\phi_m^0\right|^2 \theta(t)dt + 2\int_0^T \left(\int_0^t ((f(s), \phi_m'(s)))\, ds\right)\theta(t)dt.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Pelas convergências (2.25) e (2.26), temos pelo Teorema 1.5 que

$$\int_0^T \left\|\phi'(t)\right\|^2 \theta(t)dt \leq \underline{\lim}\int_0^T \left\|\phi_m'(t)\right\|^2 \theta(t)dt \tag{2.38}$$

e

$$\int_0^T \left|\Delta\phi(t)\right|^2 \theta(t)dt \leq \underline{\lim}\int_0^T \left|\Delta\phi_m(t)\right|^2 \theta(t)dt. \tag{2.39}$$

Tomando $\underline{\lim}$ em ambos os lados de (2.37) e tendo em conta que $(2.7)_2$, $(2.7)_3$, (2.25), (2.39), (2.40) e $\underline{\lim}\mu + \underline{\lim}v \leq \underline{\lim}(\mu + v)$, segue

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left\|\phi'(t)\right\|^2 \theta(t)dt + \int_0^T \left|\Delta\phi(t)\right|^2 \theta(t)dt \\
&\leq \int_0^T \left\|\phi^1\right\|^2 \theta(t)dt + \int_0^T \left|\Delta\phi^0\right|^2 \theta(t)dt + 2\int_0^T \left(\int_0^t ((f(s), \phi'(s)))\, ds\right)\theta(t)dt.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Substituindo em (2.40) θ por uma função $\theta_h \in \mathcal{D}(0,T)$, definida por

$$\theta_h(t) = \begin{cases} \theta(t), & \text{em } (s-h, s+h) \subset (0,T), \\ 0, & \text{em } (0,T) - (s-h, s+h), \end{cases}$$

dividindo ambos os lados por $2h > 0$ e fazendo $h \to 0$, obtemos

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{s-h}^{s+h} \|\phi'(t)\|^2 \theta(t)dt + \lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{s-h}^{s+h} |\Delta\phi(t)|^2 \theta(t)dt \\ &\leq \lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{s-h}^{s+h} \left\|\phi^1\right\|^2 \theta(t)dt + \lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{s-h}^{s+h} \left|\Delta\phi^0\right|^2 \theta(t)dt \\ &+ 2\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{s-h}^{s+h} \left(\int_0^t ((f(s), \phi'(s)))\, ds \right) \theta(t)dt \end{aligned}$$

e, portanto, temos a desigualdade de energia (2.35). ■

Corolário 2.1 *Se ϕ é solução forte do problema* (2.1), *então*

$$\|\phi'(t)\| + |\Delta\phi(t)| \leq C \left(\left\|\phi^1\right\| + \left|\Delta\phi^0\right| + \int_0^T \|f(s)\|\, ds \right) \text{ em } [0,T]. \tag{2.41}$$

Prova: Seja ϕ a solução forte do problema (2.1). Então do Teorema 2.2, segue que

$$\|\phi'(t)\|^2 + |\Delta\phi(t)|^2 \leq 2\left(\left\|\phi^1\right\| + \left|\Delta\phi^0\right|\right)^2 + 4\int_0^t \|f(s)\| \left(\|\phi'(s)\| + |\Delta\phi(s)|\right)^2 ds.$$

Sejam $g(t) = \|\phi'(t)\| + |\Delta\phi(t)|$, $a = \|\phi^1\| + |\Delta\phi^0|$ e $m(s) = 2\|f(s)\|$, então

$$\frac{1}{2} g(t)^2 \leq g(t)^2 \leq 2a^2 + 2\int_0^t m(s)g(s)ds \text{ em } [0,T].$$

Pelo Lema de Gronwall (Lema 1.3), obtemos

$$g(t) \leq 2\left(a + \int_0^t m(s)ds\right) \text{ em } [0,T],$$

o que implica na desigualdade (2.41). ■

Teorema 2.3 (Regularidade da Solução Forte) *A solução forte ϕ de* (2.1) *pertence à classe*

$$\phi \in C^0\left([0,T]; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T]; H_0^1(\Omega)\right). \tag{2.42}$$

Prova: A solução forte ϕ é o limite fraco de uma seqûencia de aproximações da forma

$$\phi_m(x,t)=\sum_{i=1}^{m} g_i(t)w_i(x), \tag{2.43}$$

onde os $g_i(t)$, $1\leq i\leq m$, são soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\left(g_j''(t),v\right)+\lambda_j g_j(t)=\left(f,w_j\right),\ 1\leq j\leq m. \tag{2.44}$$

com as condições iniciais

$$g_j\left(0\right)=\left(\phi^0,w_j\right)\ \text{ e } g_j'\left(0\right)=\left(\phi^1,w_j\right). \tag{2.45}$$

Aplicaremos agora o método de Variações de Constantes de Lagrange, ver [12].

A solução geral da equação homogênea associada a (2.44) é da forma:

$$g_{jh}\left(t\right)=\left(\phi^0,w_j\right)\cos\sqrt{\lambda_j}t+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(\phi^1,w_j\right)sen\sqrt{\lambda_j}t.$$

Calculando o Wronskiano W, obtemos

$$\begin{aligned} W&=\begin{vmatrix} g_{j1}\left(t\right) & g_{j2}\left(t\right)\\ g_{j1}'\left(t\right) & g_{j2}'\left(t\right)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\sqrt{\lambda_j}t & sen\sqrt{\lambda_j}t\\ -\sqrt{\lambda_j}sen\sqrt{\lambda_j}t & -\sqrt{\lambda_j}\cos\sqrt{\lambda_j}t\end{vmatrix}\\ &=\sqrt{\lambda_j}\cos^2\sqrt{\lambda_j}t+\sqrt{\lambda_j}sen^2\sqrt{\lambda_j}t=\sqrt{\lambda_j}.\end{aligned}$$

Assim temos uma solução particular de (2.44), da forma

$$\begin{aligned} g_{jp}\left(t\right)&=\int_0^t\frac{sen\sqrt{\lambda_j}t\cos\sqrt{\lambda_j}s-\cos\sqrt{\lambda_j}tsen\sqrt{\lambda_j}s}{\sqrt{\lambda_j}}\left(f\left(s\right),w_j\right)ds\\ &=\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\int_0^t\left(f\left(s\right),w_j\right)sen\sqrt{\lambda_j}\left(t-s\right)ds.\end{aligned}$$

Portanto a solução de (2.44) com dados iniciais (2.45) é dada por

$$\begin{aligned}&g_j\left(t\right)=g_{jh}\left(t\right)+g_{jp}\left(t\right)\\ &=\left(\phi^0,w_j\right)\cos\sqrt{\lambda_j}t+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(\phi^1,w_j\right)sen\sqrt{\lambda_j}t+\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\int_0^t\left(f\left(s\right),w_j\right)sen\sqrt{\lambda_j}\left(t-s\right)ds,\end{aligned}$$

para $1 \leq j \leq m$. Logo substituindo em (2.43), a solução aproximada é dada por

$$\phi_m(x,t)$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \left[\left(\phi^0, w_j\right) \cos \sqrt{\lambda_j} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \left(\phi^1, w_j\right) sen \sqrt{\lambda_j} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \int_0^t \left(f\left(s\right), w_j\right) sen \sqrt{\lambda_j} \left(t-s\right) ds \right] w_i(x).$$

Encontrada explicitamente, a expresão da solução aproximada, passemos a provar a regularidade (2.42).

- $\phi \in C^0\left([0,T]\,; H_0^1\left(\Omega\right) \cap H^2\left(\Omega\right)\right).$

Mostraremos que $\left(\phi_m\right)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C^0\left([0,T]\,; H_0^1\left(\Omega\right) \cap H^2\left(\Omega\right)\right).$ Com efeito,considerando $m, n \in \mathbb{N}$ com $m > n$, temos

$$\|\phi_m(t) - \phi_n(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} = \left\| \sum_{i=n+1}^{m} g_i(t) w_i(x) \right\|^2_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} = \left| \sum_{i=n+1}^{m} g_i(t) \Delta w_i(x) \right|^2.$$

Sendo $-\Delta w_i = \lambda_i w_i$ e $\left\{w_j\right\}_j$ uma base ortonormal em $L^2\left(\Omega\right)$, pelo Teorema de Pitágoras, obtemos

$$\|\phi_m(t) - \phi_n(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} = \left| \sum_{i=n+1}^{m} g_i(t) \lambda_i w_i(x) \right|^2 = \sum_{i=n+1}^{m} \left|g_i(t)\lambda_i\right|^2.$$

Analisando o último termo da igualdade anterior, deduzimos

$$\left|g_i(t)\lambda_i\right|^2 = \left| \left(\phi^0, w_i\right) \lambda_i \cos \sqrt{\lambda_i} t + \frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}} \left(\phi^1, w_i\right) sen \sqrt{\lambda_i} t + \frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}} \int_0^t \left(f\left(s\right), w_i\right) sen \sqrt{\lambda_i} \left(t-s\right) ds \right|^2$$
$$\leq \left(\left| \left(\phi^0, w_i\right) \lambda_i \cos \sqrt{\lambda_i} t \right| + \left| \frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}} \left(\phi^1, w_i\right) sen \sqrt{\lambda_i} t \right| + \left| \frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}} \int_0^t \left(f\left(s\right), w_i\right) sen \sqrt{\lambda_i} \left(t-s\right) ds \right| \right)^2$$
$$\leq \left(\left| \left(\phi^0, w_i\right) \lambda_i \right| + \left| \frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}} \left(\phi^1, w_i\right) \right| + \left| \frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}} \int_0^t \left(f\left(s\right), w_i\right) ds \right| \right)^2.$$

Aplicando a desigualdade $\left(a+b\right)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ duas vezes obtemos

$$\left|g_i(t)\lambda_i\right|^2 \leq 4 \left| \left(\phi^0, w_i\right) \lambda_i \right|^2 + 4 \left| \frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}} \left(\phi^1, w_i\right) \right|^2 + 2 \left(\int_0^T \left| \left(f\left(s\right), w_i\right) \frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}} \right| ds \right)^2. \qquad (2.46)$$

Como $\{w_i\}_i$ é uma base ortonormal em $L^2(\Omega)$, então $\left\{\dfrac{w_i}{\lambda_i}\right\}_i$ é ortonormal em $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$. Mais ainda, pode-se provar que $\left\{\dfrac{w_i}{\lambda_i}\right\}_i$ é completo. Suponhamos f regular, logo pela identidade de Parseval, obtemos

$$\left\|\phi^0\right\|^2_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{\infty}\left|\left(\left(\phi^0,\frac{w_i}{\lambda_i}\right)\right)_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)}\right|^2 \text{ e } \left\|\phi^1\right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\left|\left(\left(\phi^1,\frac{w_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right)\right)\right|^2.$$

Como

$$\left(\left(\phi^0,\frac{w_i}{\lambda_i}\right)\right)_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} = \left(\Delta\phi^0,\Delta\frac{w_i}{\lambda_i}\right) = -\left(\Delta\phi^0,\frac{\lambda_i w_i}{\lambda_i}\right) = -\left(\Delta\phi^0,w_i\right)$$

e

$$\left(\left(\phi^1,\frac{w_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right)\right)_{H_0^1(\Omega)} = \left(\nabla\phi^1,\frac{\nabla w_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right) = -\left(\phi^1,\frac{\Delta w_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right) = -\left(\phi^1,\frac{\lambda_i w_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right) = -\left(\phi^1,w_i\right)\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}},$$

deduzimos que

$$\sum_{i=n+1}^{m}\left|\left(\Delta\phi^0,w_i\right)\right|^2 \to 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=n+1}^{m}\left|\left(\phi^1,w_i\right)\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right|^2_{\mathbb{R}} \to 0, \text{ quando } m,n\to\infty. \tag{2.47}$$

Notemos agora que sendo $f(s)\in H_0^1(\Omega)$, temos

$$f(s) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\left(f(s),\frac{w_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right)\right)\frac{w_i}{\sqrt{\lambda_i}},$$

de onde

$$\|f(s)\|^2_{H_0^1} = \left\|\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left(f(s),\frac{w_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right)\right)\frac{w_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\left|\left(f(s),w_i\right)\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right|^2.$$

Como consideramos f regular, ou seja, $f\in C^0\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)$, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos

$$\left(\int_0^T\left|\left(f(s),w_i\right)\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right|ds\right)^2 \le T\int_0^T\left|\left(f(s),w_i\right)\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right|^2 ds.$$

Portanto o último termo do lado direito de (2.46) pode ser visto como

$$\sum_{i=n+1}^{m}\left(\int_0^T\left|\left(f(s),w_i\right)\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right|ds\right)^2 \le T\int_0^T\sum_{i=n+1}^{m}\left|\left(f(s),w_i\right)\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right|^2 ds \to 0, \text{ quando } m,n\to\infty. \tag{2.48}$$

Assim, por (2.47) e (2.48), deduzimos de (2.46) que

$$|g_i(t)\lambda_i|^2 \to 0, \quad \text{quando } m,n \to \infty$$

e portanto, a seqûencia $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é tal que

$$\max_{0\leq t\leq T} \|\phi_m(t) - \phi_n(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} \to 0, \quad \text{quando } m,n \to \infty,$$

ou seja, $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C^0\left([0,T]\,;H_0^1\left(\Omega\right)\cap H^2\left(\Omega\right)\right)$, logo $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é convergente e seu limite é a solução forte $\phi \in C^0\left([0,T]\,;H_0^1\left(\Omega\right)\cap H^2\left(\Omega\right)\right).$

- $\phi^1 \in C^0\left([0,T]\,;H_0^1\left(\Omega\right)\right)$

A derivada de (2.43) com respeito a t é

$$\phi_m'(x,t) = \sum_{i=1}^{m} g_i'(t)w_i(x),$$

onde

$$g_i'(t) = -\left(\phi^0, w_j\right) sen\sqrt{\lambda_i}t + \left(\phi^1, w_j\right)\cos\sqrt{\lambda_i}t + \int_0^t \left(f\left(s\right), w_i\right)\cos\sqrt{\lambda_i}\left(t-s\right)ds.$$

Suponhamos $m > n$ com $m,n \in \mathbb{N}$, logo

$$\|\phi_m'(t) - \phi_n'(t)\|^2 = \left\|\sum_{i=n+1}^{m} g_i'(t)w_i(x)\right\|^2 = \left|\sum_{i=n+1}^{m} g_i'(t)\nabla w_i(x)\right|^2.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos

$$\|\phi_m'(t) - \phi_n'(t)\|^2 = \sum_{i=n+1}^{m}\left|g_i'(t)\sqrt{\lambda_i}\right|^2.$$

Usando os mesmos argumentos da primera parte, para o termo de lado direito da igualdade anterior, obtemos

$$\sum_{i=n+1}^{m}\left|g_i'(t)\sqrt{\lambda_i}\right|^2 \leq 4\left|\left(\phi^0, w_i\right)\lambda_i\right|^2 + 4\left|\left(\phi^1, w_i\right)\sqrt{\lambda_i}\right|^2 + 2\left(\int_0^T \left|\left(f\left(s\right), w_i\right)\sqrt{\lambda_i}ds\right|\right)^2.$$

Observemos que

$$\left(\phi^0, w_i\right)\lambda_i = \left(\Delta\phi^0, w_i\right), \;\; \left(\phi^1, w_i\right)\sqrt{\lambda_i} = \left(\phi^1, w_i\right)\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}} \text{ e } \left(f\left(s\right), w_i\right)\sqrt{\lambda_i} = \left(f\left(s\right), w_i\right)\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}.$$

Logo pelos mesmos argumentos usados para obter (2.47) e (2.48), deduzimos que

$$\left| g_i(t)' \sqrt{\lambda_i} \right|_{\mathbb{R}}^2 \to 0, \text{ quando } m, n \to \infty$$

e $(\phi'_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é tal que

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left\| \phi'_m(t) - \phi'_n(t) \right\|^2 \to 0, \text{ quando } m, n \to \infty,$$

ou seja, $(\phi'_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C^0\left([0,T]\,; H_0^1(\Omega)\right)$ e segue que $\phi' \in C^0\left([0,T]\,; H_0^1(\Omega)\right)$. ■

2.2 Solução Fraca

O objetivo nesta seção é considerar o problema (2.1) com dados iniciais ϕ^0, ϕ^1 e f.menos regulares. A solução obtida com essa pouca regularidade sobre os dados, será denominada *solução fraca*.

Teorema 2.4 (Solução Fraca) *Sejam* $\phi^0 \in H_0^1(\Omega)$, $\phi^1 \in L^2(\Omega)$ *e* $f \in L^1\left(0,T; L^2(\Omega)\right)$. *Então existe uma única função* $\phi : Q \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\phi \in L^\infty\left(0,T; H_0^1(\Omega)\right), \tag{2.49}$$

$$\phi' \in L^\infty\left(0,T; L^2(\Omega)\right), \tag{2.50}$$

$$\phi'' \in L^1\left(0,T; H^{-1}(\Omega)\right), \tag{2.51}$$

$$\frac{d}{dt}(\phi', v) + ((\phi, v)) = (f, v),\ \forall v \in H_0^1(\Omega) \ \textit{ em } \ \mathcal{D}'(0,T), \tag{2.52}$$

$$\phi'' - \Delta\phi = f \ \textit{ em } \ L^1\left(0,T; H^{-1}(\Omega)\right), \tag{2.53}$$

$$\phi(0) = \phi^0,\ \phi'(0) = \phi^1. \tag{2.54}$$

Prova: A existência de solução fraca será provada por aproximação de uma sequência de soluções fortes encontradas na seção anterior.

- **Existência**

Dados $\{\phi^0, \phi^1, f\} \in \{H_0^1(\Omega),\ L^2(\Omega),\ L^1(0,T;L^2(\Omega))\}$, existem sequências (ϕ_m^0), (ϕ_m^1) e (f_m) em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ e $C^0([0,T];C^1(\overline{\Omega}))$ respectivamente tais que

$$\left| \begin{array}{l} \phi_m^0(x) \to \phi^0 \quad \text{forte em} \quad H_0^1(\Omega), \\ \phi_m^1 \to \phi^1 \quad \text{forte em} \quad L^2(\Omega), \\ f_m \to f \quad \text{forte em} \quad L^1(0,T;L^2(\Omega)). \end{array} \right. \tag{2.55}$$

Para cada m, o Teorema 2.1 nos garante a existência de uma única função $\phi_m : Q \to \mathbb{R}$ tal que

$$\phi_m \in L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \tag{2.56}$$

$$\phi_m' \in L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega)), \tag{2.57}$$

$$\phi_m'' \in L^\infty(0,T,L^2(\Omega)), \tag{2.58}$$

$$\phi_m'' - \Delta\phi_m = f_m \quad \text{q.s} \quad \text{em } Q, \tag{2.59}$$

$$\phi_m(0) = \phi_m^0,\ \phi_m'(0) = \phi_m^1 \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{2.60}$$

Como

$$(\phi_m''(t), v(t)) + ((\phi_m(t), v(t))) = (f_m(t), v(t))\ \forall t \in (0,T),\ \forall v \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right), \tag{2.61}$$

tomando $v = \phi_m'$ obtemos

$$(\phi_m''(t), \phi_m'(t)) + ((\phi_m(t), \phi_m'(t))) = (f_m(t), \phi_m'(t)),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}(|\phi_m'(t)|^2 + ||\phi_m(t)||^2) = 2(f_m(t), \phi_m'(t)).$$

Integrando de 0 a T, obtemos

$$|\phi_m'(t)|^2 + \|\phi_m(t)\|^2 = \left|\phi_m^1\right|^2 + \left\|\phi_m^0\right\|^2 + 2\int_0^T (f_m(t), \phi_m'(t))dt. \tag{2.62}$$

Utilizando as desigualdades de Cauchy -Scharwz, Hölder e Young temos:

$$|\phi_m'(t)|^2 + ||\phi_m(t)||^2 \leq \left|\phi_m^1\right|^2 + \left\|\phi_m^0\right\|^2 + \int_0^T |f_m(t)|\,dt + \int_0^t |f_m(t)|\,|\phi_m'(t)|^2\,dt.$$

Logo pelas covergências dadas em (2.55), temos

$$|\phi_m'(t)|^2 + ||\phi_m(t)||^2 \leq C + \int_0^t |f_m(s)|\,|\phi_m'(s)|^2\,ds.$$

e pela desigualdade de Gronwall (Lema 1.3), segue que

$$|\phi_m'(t)|^2 + ||\phi_m(t)||^2 \leq C, \tag{2.63}$$

onde $C > 0$ independe de m e t. Assim,

$$(\phi_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega)), \tag{2.64}$$

$$(\phi_m') \text{ é limitada em } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)). \tag{2.65}$$

Pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki (Teorema 1.3), existe uma subsequência de (ϕ_m), ainda denotada da mesma forma, tal que

$$\phi_m \to \phi \quad \text{fraco} - * \text{ em} \quad L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega)), \tag{2.66}$$

$$\phi_m' \to \phi' \quad \text{fraco} - * \text{ em} \quad L^\infty(0, T, L^2(\Omega)). \tag{2.67}$$

Multiplicando (**??**) por $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ e integrando de 0 a T, temos

$$-\int_0^T (\phi_m'(t), v)\theta'(t)\,dt + \int_0^T ((\phi_m(t), v))\theta(t)\,dt = \int_0^T (f_m(t), v)\theta(t)\,dt.$$

Usando (2.66) e (2.67) obtemos:

$$-\int_0^T (\phi'(t), v)\theta' dt + \int_0^T ((\phi(t), v))\theta dt = \int_0^T (f(t), v)\theta(t)\,dt,\ \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T) \text{ e } \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.68}$$

Logo

$$\langle (\phi'(t), v), \theta'(t) \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} + \langle ((\phi(t), v)), \theta(t) \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \langle (f(t), v), \theta(t) \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)},$$

ou seja,

$$\left\langle \frac{d}{dt}(\phi'(t), v) + ((\phi(t), v)) - (f(t), v), \theta(t) \right\rangle = 0,\ \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T) \text{ e } \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Assim

$$\frac{d}{dt}(\phi'(t), v) + ((\phi(t), v)) = (f(t), v) \quad \text{em } \mathcal{D}'(0,T)\ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Considerando, em particular, $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, temos

$$\langle \phi'', v \rangle_{\mathcal{D}(Q),\mathcal{D}(Q)} - \langle \Delta\phi, v \rangle_{\mathcal{D}(Q),\mathcal{D}(Q)} = \langle f, v \rangle \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,T), \tag{2.69}$$

ou seja,

$$\langle \phi'' - \Delta\phi - f, v \rangle_{\mathcal{D}(Q),\mathcal{D}(Q)} = 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,T),\ \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Logo

$$\phi'' - \Delta\phi = f \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(Q). \tag{2.70}$$

Como $\Delta \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega); H^{-1}(\Omega))$ e $\phi \in L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))$, então $\Delta\phi \in L^\infty(0,T,H^{-1}(\Omega))$. Assim

$$\phi'' = f + \Delta\phi \in L^1(0,T,L^2(\Omega)) + L^\infty(0,T,H^{-1}(\Omega)) \subset L^1\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right).$$

Portanto

$$\phi'' - \Delta\phi = f \quad \text{em} \quad L^1(0,T,H^{-1}(\Omega)). \tag{2.71}$$

Condições Iniciais.

Por (2.49) − (2.51) e o Teorema 1.4, temos que $\phi \in C^0([0,T]; L^2(\Omega))$ e $\phi' \in C^0([0,T]; H^{-1}(\Omega))$, logo faz sentido o cálculo de ϕ e ϕ' em $t = 0$. A demostração de (2.54) segue usando o mesmo argumento da Seção 2.1.

- **Unicidade**

  Para provar a unicidade da solução fraca ϕ do problema (2.1), aplicaremos o Método devido a Visik-Ladyzhenskaya [32].

Suponhamos que existem duas soluções fracas ϕ e $\overline{\phi}$ do problema (2.1). Seja $w = \phi - \overline{\phi}$, logo w é solução fraca do problema:

$$\left|\begin{array}{ll} w'' - \Delta w = 0 & \text{em} \quad Q, \\ w = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ w(0) = 0,\ w'(0) = 0 & \text{em} \quad \Omega. \end{array}\right.$$

Assim $w \in L^{\infty}(0,T,H_0^1(\Omega))$, $w' \in L^{\infty}(0,T,L^2(\Omega))$ e $w'' \in L^1(0,T,H^{-1}(\Omega))$. Logo não é possível considerar $\langle w''(t), w(t)\rangle$, dualidade entre $H^{-1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$. Dessa forma precisamos definir uma nova função φ, de modo a fazer sentido a dualidade acima.

Seja $0 < s < T$, definamos

$$\varphi(t) = \begin{cases} -\displaystyle\int_t^s w(r)dr, & 0 < t < s \\ 0, & s \leq t < T. \end{cases}$$

Portanto, $\varphi \in L^{\infty}(0,T,H_0^1(\Omega))$ e faz sentido, a dualidade $\langle w''(t) - \Delta w(t), \varphi(t)\rangle$. Assim,

$$\int_0^T \langle w''(t), \varphi(t)\rangle\, dt + \int_0^T \langle -\Delta w(t), \varphi(t)\rangle\, dt = 0. \tag{2.72}$$

Seja $w_1(l) = \displaystyle\int_0^l w(r)dr$ então $\varphi(t) = w_1(t) - w_1(s)$ e $\varphi'(t) = w_1'(t) - w(t)$. Logo

$$\int_0^s \langle w''(t), \varphi(t)\rangle\, dt = (w'(t), \varphi(t))|_0^s - \int_0^s (w'(t), \varphi'(t))dt = w'(s)\varphi(s) - w'(0)\varphi(0)$$

$$-\int_0^s (w'(t), \varphi'(t))dt = -\int_0^s \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2\, dt = -\frac{1}{2}|w(s)|^2$$

e

$$\int_0^T \langle -\Delta w(t), \varphi(t)\rangle\, dt = \int_0^s ((w(t), \varphi(t)))dt = \int_0^s \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi(t)\|^2\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\|\varphi(s)\|^2 - \frac{1}{2}\|\varphi(0)\|^2 = -\frac{1}{2}\|\varphi(0)\|^2.$$

Logo aplicando as duas últimas igualdades em (2.72), obtemos:

$$|w(s)| + \|\varphi(0)\|^2 = 0.$$

Então $w \equiv 0$ e, portanto, $\phi = \overline{\phi}$. ■

Definamos a energia $E(t)$ do sistema (2.1) como sendo

$$E(t) = \frac{1}{2}\left(|\phi'(t)|^2 + \|\phi(t)\|^2\right). \tag{2.73}$$

Para essa energia, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.5 (Desigualdade de Energia) *Se ϕ é solução fraca do problema* (2.1), *então*

$$E(t) \leq E_0 + \int_0^t (f(s), \phi'(s))ds \quad em \quad [0,T], \tag{2.74}$$

onde $E_0 = E(0)$.

Prova: Usando as convergências (2.66) e (2.67) em (2.62) e o mesmo argumento aplicado na prova do Teorema 2.2 podemos concluir que a desigualdade (2.74) é válida. ■

Corolário 2.2 *Se ϕ é solução fraca de* (2.1), *então*

$$|\phi'(t)| + \|\phi(t)\| \leq C\left(|\phi^1| + \|\phi^0\| + \int_0^T |f(s)|\, ds\right) \;\; em \;\; [0,T]$$

Prova: Usa-se o mesmo argumento do Corolário 2.1. ■

Teorema 2.6 (Regularidade da Solução Fraca) *A solução fraca ϕ do problema* (2.1) *tem a seguinte regularidade:*

$$\phi \in C^0\left([0,T]; H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T]; L^2(\Omega)\right). \tag{2.75}$$

Prova: Seja $(\phi_v)_{v\in\mathbb{N}}$ uma sequência de soluções fortes que aproxima a solução fraca ϕ, logo se $m, n \in \mathbb{N}$ com $m > n$, temos por (2.59) que

$$(\phi''_m(t) - \phi''_n(t), v(t)) + ((\phi_m(t) - \phi_n(t), v(t))) = (f_m(t) - f_n(t), v(t)),$$

para todo $v \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$. Tomando $v = \phi'_m - \phi'_n$, segue

$$\frac{d}{dt}\left(|\phi'_m(t) - \phi'_n(t)|^2 + \|\phi_m(t) - \phi_n(t)\|^2\right) \leq |f_m(t) - f_n(t)| + |f_m(t) - f_n(t)|\,|\phi'_m(t) - \phi'_n(t)|^2.$$

Integrando a última desigualdade de 0 a T, obtemos

$$\begin{aligned} &|\phi'_m(t) - \phi'_n(t)|^2 + \|\phi_m(t) - \phi_n(t)\|^2 \\ &\leq |\phi^1_m - \phi^1_n|^2 + \|\phi^0_m - \phi^0_n\|^2 + \int_0^T |f_m(t) - f_n(t)|\, dt + \int_0^T |f_m(t) - f_n(t)|\,|\phi'_m(t) - \phi'_n(t)|^2\, dt \end{aligned}$$

e, pelo Lema de Gronwall (Lema 1.3), temos

$$
\begin{aligned}
&\left|\phi_m'(t) - \phi_n'(t)\right|^2 + \left\|\phi_m(t) - \phi_n(t)\right\|^2 \\
&\leq C\left(\left|\phi_m^1 - \phi_n^1\right|^2 + \left\|\phi_m^0 - \phi_n^0\right\|^2 + \int_0^T \left|f_m(t) - f_n(t)\right| dt\right).
\end{aligned} \tag{2.76}
$$

Usando as convergências (2.55) em (2.76) podemos concluir que, quando $m, n \to \infty$,

$$\underset{0 \leq t \leq T}{max} \left|\phi_m'(t) - \phi_n'(t)\right| \to 0$$

e

$$\underset{0 \leq t \leq T}{max} \left\|\phi_m(t) - \phi_n(t)\right\| \to 0.$$

Logo $(\phi_v)_{v \in \mathbb{N}}$ e $(\phi_v')_{v \in \mathbb{N}}$ são sequências de Cauchy em $C^0\left([0,T]\,; H_0^1(\Omega)\right)$ e $C^1\left([0,T]\,; L^2(\Omega)\right)$, respectivamente. Assim

$$\phi_v \to \alpha \text{ forte em } C^0\left([0,T]\,; H_0^1(\Omega)\right)$$

e

$$\phi_v' \to \beta \text{ forte em } C^1\left([0,T]\,; L^2(\Omega)\right).$$

Pelas convergências (2.66) e (2.67), temos que $\alpha = \phi$ e $\beta = \phi'$ e, portanto, temos a regularidade (2.75) para ϕ. ■

2.2.1 Regularidade Escondida para Soluções Fracas

Nesta seção estudaremos a regularidade da derivada normal da solução fraca ϕ na fronteira Σ do cilindro Q.

Consideraremos ϕ solução fraca do problema (2.1), logo pela Seção 2.2, temos $\phi' \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$, portanto $\phi'' \in H^{-1}(0,T,L^2(\Omega))$. Assim

$$-\Delta\phi = f - \phi'' \in L^1(0,T,L^2(\Omega)) + H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)).$$

Quando Γ é regular, isto implica que

$$\phi \in L^1(0,T,H^2(\Omega)) + H^{-1}(0,T;H^2(\Omega))$$

e a derivada normal de ϕ tem a seguinte regularidade:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \in L^1(0,T,H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)) + H^{-1}(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)). \tag{2.77}$$

O objetivo desta seção é mostrar que $\frac{\partial \phi}{\partial \nu}$ pertence a seguinte classe:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma). \tag{2.78}$$

Notemos que a regularidade (2.78) não provém das propiedades da solução fraca ϕ dada pelo Teorema 2.4. Por esta razão ela é chamada de *Regularidade Escondida.* Esta denominação foi introduzida por Lions em [18], quando o autor estudou um problema misto associado à equação de onda semilinear. Antes de enunciarmos o principal resultado desta seção, provaremos algums resultados essenciais para a obtenção de (2.78).

Lema 2.1 *Seja $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$ o campo de vetores normais exteriores a Γ. Então existe um campo vetorial $h = (h_1, h_2, ..., h_n) \in \left[C^1(\overline{\Omega})\right]^n$ tal que $h_i = \nu_i$ sobre Γ, para $i = 1, 2, ...n$.*

Prova: Pelo Lema 1.2, temos que $H^m(\Omega) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$, para $m > 1 + \frac{n}{2}$. Sendo o operador traço $\gamma_0 : H^m(\Omega) \to H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ sobrejetivo, dado $\nu_k \in H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, existe $h_k \in H^m(\Omega)$ tal que $\gamma_0(h_k) = \nu_k$. ■

Lema 2.2 *Se $\phi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, então*

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \text{ sobre } \Gamma \tag{2.79}$$

e

$$|\nabla \phi|^2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2. \tag{2.80}$$

Prova: Para provar (2.79) , mostraremos que

$$\int_\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \theta d\Gamma = \int_\Gamma \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \theta d\Gamma, \ \forall \theta \in \mathcal{D}(\Gamma). \tag{2.81}$$

Consideremos $\beta \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $\gamma_0(\beta) = \theta$, ou seja, $\beta = \theta$ sobre Γ. A função β existe devido a imersão $H^m(\Omega) \hookrightarrow C^2(\overline{\Omega})$, para $m > 2 + \frac{2}{n}$ e o Teorema do Traço (Teorema 1.2).

Seja $(h_k)_{1\leq k\leq n}$ o campo vetorial do Lema 2.1, logo $h_j = \nu_j$ e pelo Teorema de Gauss-Green (Teorema 1.8), temos:

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\phi h_j \beta\right) dx = \int_\Gamma \nu_i \frac{\partial\left(\phi h_j \beta\right)}{\partial x_j} d\Gamma. \tag{2.82}$$

Iremos agora a obter expresões para as integrais em (2.82).

Aplicando o Lema de Gauss na primeira integral de (2.82) e tendo em conta que $h_j = \nu_j$ e $\beta = \theta$, temos

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi h_j \beta\right) dx = \int_\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\theta \nu_j^2 d\Gamma. \tag{2.83}$$

Somando j de 1 a n na integral do lado direito de (2.83) temos

$$\sum_{j=1}^{n}\int_\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\theta \nu_j^2 d\Gamma = \int_\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\theta d\Gamma.$$

Logo, obtemos a seguinte igualdade relacionada ao primeiro termo de (2.82):

$$\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi h_j \beta\right) dx = \int_\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\theta d\Gamma. \tag{2.84}$$

Por outro lado, como $\phi \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, então

$$\int_\Gamma \nu_i \frac{\partial\left(\phi h_j \beta\right)}{\partial x_j} d\Gamma = \int_\Gamma \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(h_j\beta) d\Gamma = \int_\Gamma \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\nu_j \theta d\Gamma. \tag{2.85}$$

Observe que, somando de j de 1 a n no último termo de (2.85), obtemos

$$\sum_{j=1}^{n}\int_\Gamma \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\nu_j \theta d\Gamma = \int_\Gamma \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial \nu}\theta d\Gamma. \tag{2.86}$$

Logo

$$\sum_{j=1}^{n}\int_\Gamma \nu_i \frac{\partial\left(\phi h_j \beta\right)}{\partial x_j} d\Gamma = \int_\Gamma \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial \nu}\theta d\Gamma. \tag{2.87}$$

Assim, somando j de 1 a n em ambos os lados de (2.82) e, em seguida, substituindo as (2.84) e (2.87), obtemos (2.79).

Por outra parte, para provar (2.80), é suficiente considerar

$$\sum_{i=1}^{n}\nu_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\nu_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \left|\bigtriangledown \phi\right|^2.$$

Como $\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = \nu \cdot \bigtriangledown \phi$, então $\left|\bigtriangledown \phi\right|^2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2$. ■

Lema 2.3 *Seja* $(q_k)_{1\leq k\leq n}$ *um campo vetorial tal que* $q_k \in C^1(\overline{\Omega})$ *para* $1 \leq k \leq n$. *Se* $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de soluções fortes do problema 2.1, então para cada* $m \in \mathbb{N}$, *temos* [1]

$$\frac{1}{2}\int_\Sigma q_k\nu_k\left(\frac{\partial\phi_m}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt = \left(\phi_m'(t), q_k\frac{\partial\phi_m(t)}{\partial x_k}\right)\Bigg|_0^T + \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k}\left[|\phi_m'|^2 - |\bigtriangledown\phi_m|^2\right] dxdt$$
$$+\int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial\phi_m}{\partial x_k}\frac{\partial\phi_m}{\partial x_j}dxdt - \int_Q f_m q_k\frac{\partial\phi_m}{\partial x_k}dxdt. \tag{2.88}$$

Prova: Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja ϕ_m solução forte do problema (2.1). Então $q_k\frac{\partial\phi_m}{\partial x_k} \in L^2(Q)$ e faz sentido a seguinte equação:

$$\int_Q \phi_m'' q_k\frac{\partial\phi_m}{\partial x_k}dxdt - \int_Q \Delta\phi_m q_k\frac{\partial\phi_m}{\partial x_k}dxdt = \int_Q f_m q_k\frac{\partial\phi_m}{\partial x_k}dxdt. \tag{2.89}$$

Iremos agora analisar as integrais que aparecem no lado esquerdo da equação (2.89).

- Análise de $\int_Q \phi_m'' q_k\frac{\partial\phi_m}{\partial x_k}dxdt$.

Notemos que

$$\int_0^T\int_\Omega \phi_m'' q_k\frac{\partial\phi_m}{\partial x_k}dxdt = \left(\phi_m', q_k\frac{\partial\phi_m}{\partial x_k}\right)\Bigg|_0^T - \int_0^T\int_\Omega \phi_m' q_k\frac{\partial\phi_m'}{\partial x_k}dxdt$$
$$= \left(\phi_m'(t), q_k\frac{\partial\phi_m(t)}{\partial x_k}\right)\Bigg|_0^T - \frac{1}{2}\int_Q q_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\phi_m'\right)^2 dxdt, \tag{2.90}$$

Observemos que

$$-\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial}{\partial x_k}q_k\left(\phi_m'\right)^2 dxdt = \frac{1}{2}\int_Q q_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\phi_m'\right)^2 dxdt - \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial}{\partial x_k}\left[q_k\left(\phi_m'\right)^2\right] dxdt$$

e, por sua vez, segue do Teorema de Gauss-Green (Teorema 1.8) que

$$\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial}{\partial x_k}\left[q_k\left(\phi_m'\right)^2\right] dxdt = \frac{1}{2}\int_\Sigma q_k\left(\phi_m'\right)^2\nu_k d\Gamma dt = 0,$$

pois $\phi_m'(t) \in H_0^1(\Omega)$. Logo

$$-\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k}\left(\phi_m'\right)^2 dxdt = \frac{1}{2}\int_Q q_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\phi_m'\right)^2 dxdt. \tag{2.91}$$

[1] Índices repetidos significam soma.

Substituindo (2.91) em (2.90) segue que

$$\frac{1}{2}\int_Q \phi''_m q_k \frac{\partial \phi_m}{\partial x_k} dxdt = \left(\phi'_m(t), q_k \frac{\partial \phi_m(t)}{\partial x_k} \right)\Bigg|_0^T + \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} \left(\phi'_m\right)^2 dxdt. \tag{2.92}$$

- Análise de $-\int_Q \Delta \phi_m q_k \frac{\partial \phi_m}{\partial x_k} dxdt$.

Aplicando o Teorema de Green (Teorema 1.9) temos,

$$-\int_Q \Delta \phi_m q_k \frac{\partial \phi_m}{\partial x_k} dxdt = -\int_\Sigma \frac{\partial \phi_m}{\partial \nu} q_k \frac{\partial \phi_m}{\partial x_k} d\Gamma dt + \int_Q \nabla \phi_m \cdot \nabla \left(q_k \frac{\partial \phi_m}{\partial x_k} \right) dxdt. \tag{2.93}$$

A segunda integral do lado direito de (2.93) pode ser vista como sendo

$$\begin{aligned} \int_Q \nabla \phi_m \cdot \nabla \left(q_k \frac{\partial \phi_m}{\partial x_k} \right) dxdt &= \int_Q \left[\frac{\partial \phi_m}{\partial x_i} q_k \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial \phi_m}{\partial x_i} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_m}{\partial x_k} \right] dxdt \\ = \frac{1}{2}\int_Q q_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial x_i} \right)^2 dxdt &+ \int_Q \frac{\partial \phi_m}{\partial x_i} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_m}{\partial x_k} dxdt. \end{aligned} \tag{2.94}$$

Notemos que a identidade (2.80) e o Lema de Gauss nos garante que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_Q q_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial x_i} \right)^2 dxdt &= \frac{1}{2}\int_Q q_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left|\nabla \phi_m\right|^2 dxdt \\ &= \frac{1}{2}\int_\Sigma q_k \left|\nabla \phi_m\right|^2 \nu_k d\Gamma dt - \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} \left|\nabla \phi_m\right|^2 dxdt. \end{aligned}$$

Dessa forma (2.94) transforma-se em

$$\int_Q \nabla \phi_m \cdot \nabla \left(q_k \frac{\partial \phi_m}{\partial x_k} \right) dxdt = \frac{1}{2}\int_\Sigma q_k \left|\nabla \phi_m\right|^2 \nu_k d\Gamma dt - \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} \left|\nabla \phi_m\right|^2 dxdt. \tag{2.95}$$

Substituindo (2.95) em (2.93), temos

$$\begin{aligned} \int_Q \Delta \phi_m q_k \frac{\partial \phi_m}{\partial x_k} dxdt &= -\int_\Sigma \frac{\partial \phi_m}{\partial \nu} q_k \frac{\partial \phi_m}{\partial x_k} d\Gamma dt + \frac{1}{2}\int_\Sigma q_k \left|\nabla \phi_m\right|^2 \nu_k d\Gamma dt \\ -\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} \left|\nabla \phi_m\right|^2 dxdt &+ \int_Q \frac{\partial \phi_m}{\partial x_i} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_m}{\partial x_k} dxdt. \end{aligned} \tag{2.96}$$

Usando as identidades do Lema 2.2, a primeira integral do lado esquerdo de (2.96) é

$$-\int_\Sigma \frac{\partial \phi_m}{\partial \nu} q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} d\Gamma dt = -\int_\Sigma q_k \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial \nu} \right)^2 \nu_k d\Gamma dt$$

e a segunda integral do mesmo lado é

$$\frac{1}{2}\int_{\Sigma} q_k \left|\nabla \phi_m\right|^2 \nu_k d\Gamma dt = \frac{1}{2}\int_{\Sigma} q_k \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial \nu}\right)^2 \nu_k d\Gamma dt.$$

Logo (2.96) torna-se

$$\begin{aligned} -\int_Q \Delta\phi_m q_k \frac{\partial \phi_m}{\partial x_k} dxdt &= -\frac{1}{2}\int_{\Sigma} q_k \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial \nu}\right)^2 \nu_k d\Gamma dt \\ -\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} \left|\nabla\phi_m\right|^2 dxdt &+ \int_Q \frac{\partial \phi_m}{\partial x_i}\frac{\partial q_k}{\partial x_i}\frac{\partial \phi_m}{\partial x_k} dxdt. \end{aligned} \tag{2.97}$$

Combinando as igualdades (2.89), (2.92) e (2.97), encontramos (2.88) . ■

Passemos agora ao principal resultado desta seção.

Teorema 2.7 (Regularidade Escondida) *Se ϕ é solução fraca do problema* (2.1), *então*

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma) \tag{2.98}$$

e, além disso, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt \leq C\left(E_0 + \int_0^T \left|f(s)\right| ds\right), \tag{2.99}$$

onde E_0 é definido como no Teorema 2.6.

Prova: Seja $q_k = h_k$ o campo vetorial do Lema 2.1 ($q_k = v_k$ sobre Γ), que substituindo no Lema 2.3, segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{\Sigma}\left(\frac{\partial \phi_m}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt &= \left.\left(\phi_m'(t), h_k \frac{\partial \phi_m(t)}{\partial x_k}\right)\right|_0^T + \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_k}\left[\left|\phi_m'\right|^2 - \left|\nabla\phi_m\right|^2\right] dxdt \\ &+ \int_Q \frac{\partial h_k}{\partial xj}\frac{\partial \phi_m}{\partial x_k}\frac{\partial \phi_m}{\partial x_i} dxdt - \int_Q f_m h_k \frac{\partial \phi_m}{\partial x_k} dxdt. \end{aligned} \tag{2.100}$$

Iremos agora a obter estimativas para todos os termos que aparecem no lado direito da igualdade (2.100).

Como $h_k \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, temos

$$\left|\left.\left(\phi_m'(t), h_k \frac{\partial \phi_m(t)}{\partial x_k}\right)\right|_0^T\right| \leq 2\sup_{0\leq t\leq T}\left|\left(\phi_m'(t), h_k \frac{\partial \phi_m(t)}{\partial x_k}\right)\right| \leq \sup_{0\leq t\leq T} E_m(t), \tag{2.101}$$

onde $E_m(t)$ é a energia associada a ϕ_m, ou seja,

$$E_m(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\phi'_m(t)|^2 + |\nabla\phi_m(t)|^2 \right) dx.$$

Temos ainda que

$$\frac{1}{2}\left| \int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_k} \left[|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2 \right] dxdt \right| \leq C E_m(t), \tag{2.102}$$

$$\left| \int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_m}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_m}{\partial x_i} dxdt \right| \leq C \int_\Omega |\nabla\phi_m|^2 \, dxdt \leq C E_m(t) \tag{2.103}$$

e, como $f_m \in C^0\left([0,T]; C^1\left(\overline{\Omega}\right)\right)$, obtemos

$$\left| \int_Q f_m h_k \frac{\partial \phi_m}{\partial x_k} dxdt \right| \leq C \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial x_k} \right)^2 dx \leq C E_m(t). \tag{2.104}$$

Das desigualdades $(2.100) - (2.104)$, deduzimos que

$$\frac{1}{2}\int_\Sigma \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt \leq C E_m(t) \tag{2.105}$$

e, pelo Teorema 2.5, concluimos que

$$\frac{1}{2}\int_\Sigma \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt \leq C \left(E_{0m} + \int_0^T |f_m(s)| \, ds \right), \tag{2.106}$$

onde $E_{0m} = E_m(0) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\phi^1_m|^2 + |\nabla\phi^0_m|^2 \right) dx$. Logo $\left(\frac{\partial \phi_m}{\partial \nu}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2(\Sigma)$, portanto existe uma subsequência, representada da mesma forma, tal que

$$\frac{\partial \phi_m}{\partial \nu} \to \chi \text{ fraco} - * \text{ em } L^2(\Sigma) \tag{2.107}$$

e

$$|\chi|_{L^2(\Sigma)} \leq \underline{\lim} \left| \frac{\partial \phi_m}{\partial \nu} \right|_{L^2(\Sigma)}. \tag{2.108}$$

Dessa forma, por (2.55), (2.105) e (2.108), para concluir a demonstração do teorema, resta-nos mostrar que $\chi = \frac{\partial \phi}{\partial \nu}$. De fato, iniciemos observando que

$$-\Delta\phi_m = f_m - \phi''_m \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'\left(0,T; H^{-1}(\Omega)\right). \tag{2.109}$$

Sendo $f_m \in C^0\left([0,T]\,;C^1\left(\overline{\Omega}\right)\right)$ e $\phi_m' \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$, então por resultado de regularização elíptica (Teorema 1.13), existem $z_m, w_m \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$, tais que

$$\left|\begin{array}{l} -\Delta w_m = f_m \text{ e } \|w_m\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))} \leq C\,|f_m|_{L^2(Q)}\,, \\ -\Delta z_m = \phi_m' \text{ e } \|z_m\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))} \leq C\,|\phi_m'|_{L^2(Q)}\,. \end{array}\right. \tag{2.110}$$

Substituindo (2.110) em (2.109), temos

$$-\Delta\phi_m = -\Delta w_m - (-\Delta z_m)' \text{ em } \mathcal{D}'\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right). \tag{2.111}$$

Multiplicando ambos os lados de (2.111) por $\theta \in D(0,T)$ e, em seguida, integrando de 0 a T, resulta

$$-\int_0^T \Delta\phi_m\theta dt = -\int_0^T \Delta w_m\theta dt - \int_0^T (-\Delta z_m)'\,\theta dt \quad \text{em} \quad H^{-1}(\Omega),$$

ou seja,

$$-\int_0^T \Delta\phi_m\theta dt = -\int_0^T \Delta w_m\theta dt - \int_0^T \Delta z_m\theta' dt \quad \text{em} \quad H^{-1}(\Omega). \tag{2.112}$$

Como $\Delta \in \mathcal{L}\left(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)\right)$, temos

$$-\Delta\left(\int_0^T \phi_m\theta dt\right) = -\Delta\left(\int_0^T w_m\theta dt + \int_0^T z_m\theta' dt\right)$$

e, pela unicidade do problema de Dirichlet (Teorema 1.13), obtemos

$$\int_0^T \phi_m\theta dt = \int_0^T w_m\theta dt + \int_0^T z_m\theta' dt \quad \text{em} \quad H^{-1}(\Omega), \quad \forall\theta \in \mathcal{D}(0,T),$$

isto é,

$$\phi_m = w_m - z_m' \text{ em } D'\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right). \tag{2.113}$$

Como $z_m \in L^2\left(0,T;H^2(\Omega)\right)$, então $z_m' \in H^{-1}\left(0,T;H^2(\Omega)\right)$ e $\gamma_1\left(z_m'\right) \in H^{-1}\left(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)$. Portanto, sendo $\left[\gamma_1\left(z_m\right)\right]' = \gamma_1\left(z_m'\right)$, temos,

$$\gamma_1\left(\phi_m\right) = \gamma_1\left(w_m\right) - \left[\gamma_1\left(z_m\right)\right]' \text{ em } H^{-1}\left(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right). \tag{2.114}$$

Como $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(Q)$, segue por $(2.110)_1$ que $\|w_m\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}$ é limitada. Logo existe uma subsequência $(w_m)_{m\in\mathbb{N}}$, ainda denotada por $(w_m)_{m\in\mathbb{N}}$, tal que

$$w_m \to \varphi \text{ fraco em } L^2\left(0,T;H^2(\Omega)\right).$$

Sendo $w \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$ solução do problema $-\Delta w = f$, onde $f_m \to f$ forte em $L^1(0,T;L^2(\Omega))$, e observando que $-\Delta w_m = f_m$, então $\varphi = w$.

Da continuidade do operador traço γ_1, temos

$$\gamma_1(w_m) \to \gamma_1(w) \text{ fraco em } L^2\left(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right). \tag{2.115}$$

Por $(2.110)_2$, como $\phi_m' \to \phi'$ fraco $L^2(Q)$, obtemos por um argumento similar, uma subsequência de $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$, ainda denotada com o índice m, tal que

$$\gamma_1(z_m) \to \gamma_1(z) \text{ fraco em } L^2\left(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)$$

e, assim,

$$[\gamma_1(z_m)]' \to [\gamma_1(z)]' \text{ fraco em } H^{-1}\left(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right), \tag{2.116}$$

onde $z \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$ é a única solução de $-\Delta z = \phi'$. Como $\Delta\phi = f - \phi''$ em $\mathcal{D}'(0,T;H^{-1}(\Omega))$, então $\phi = -w - z'$ e

$$\gamma_1(\phi) = -\gamma_1(w) - \gamma_1(z') \text{ em } H^{-1}\left(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right). \tag{2.117}$$

Dessa forma, de acordo com (2.114) – (2.117), obtemos

$$\gamma_1(\phi_m) = -\gamma_1(w_m) - [\gamma_1(z_m)]' \to -\gamma_1(w) - [\gamma_1(z)]' = \gamma_1(\phi) \text{ em } H^{-1}\left(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right). \tag{2.118}$$

De (2.107), (2.118) e a unicidade do limite, concluímos que $\chi = \frac{\partial\phi}{\partial\nu}$, o que mostra o resultado.
■

2.3 Solução Ultra Fraca

O objetivo desta seção é estudar a existência, unicidade e regularidade de solução para o seguinte problema de valor na fronteira não homogêneo

$$\begin{cases} z'' - \triangle z = 0 & \text{em} \quad Q, \\ z = v & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ z(0) = z^0, \quad z'(0) = z^1 & \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.119}$$

quando os dados iniciais z^0 e z^1 são menos regulares que os considerados na Seção 2.2. Por esta razão, a solução será denominada de *solução ultra fraca*. Primeiramente definiremos o conceito de solução para (2.119) por meio do Método da Transposição (ver [21]). Devido ao método utilizado, a solução é também conhecida como *solução por transposição*.

Multiplicando ambos os lados de $(2.119)_1$ por uma função $\theta = \theta(x,t)$, $x \in \Omega$, $t \in (0,T)$ e integrando formalmente em Q, obtemos

$$\int_0^T \int_\Omega z''\theta dxdt - \int_0^T \int_\Omega \Delta z \theta dxdt = 0. \tag{2.120}$$

Usando integração por partes em t, temos

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \theta(x,T) z'(x,T) dx - \int_\Omega \theta(x,0) z'(x,0) dx - \int_\Omega z(x,T)\theta'(x,T) dx \\ &+ \int_\Omega z(x,0)\theta'(x,0)dx + \int_0^T \int_\Omega z\theta'' dxdt - \int_0^T \int_\Omega \Delta z \theta dxdt = 0. \end{aligned} \tag{2.121}$$

Notemos que aplicando o Teorema de Green (Teorema 1.9) obtemos que

$$-\int_0^T \int_\Omega \Delta z \theta dxdt = -\int_0^T \int_\Omega z \Delta\theta dxdt + \int_0^T \int_\Gamma z \frac{\partial \theta}{\partial \nu} d\Gamma dt - \int_0^T \int_\Gamma \theta \frac{\partial z}{\partial \nu} d\Gamma dt. \tag{2.122}$$

Substituindo (2.122) em (2.121) segue que

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega z(\theta'' - \Delta\theta) dxdt + \int_\Omega z'(x,T)\theta(x,T)dx - \int_\Omega z'(x,0)\theta(x,0)dx \\ &- \int_\Omega z(x,T)\theta'(x,T)dx + \int_\Omega z(x,0)\theta'(x,0)dx - \int_0^T \int_\Gamma \theta \frac{\partial z}{\partial \nu} d\Gamma dt \\ &+ \int_0^T \int_\Gamma z \frac{\partial \theta}{\partial \nu} d\Gamma dt = 0. \end{aligned} \tag{2.123}$$

Como não temos informação sobre $z(x,T), z'(x,T)$ e $\frac{\partial z}{\partial \nu}$, então escolhamos $\theta = \theta(x,t)$ tal que $\theta(x,T) = \theta'(x,T) = 0$ e $\theta(x,t) = 0$ sobre Σ. Assim obtemos

$$\int_0^T \int_\Omega z(\theta'' - \Delta\theta) dxdt - \int_\Omega z'(x,0)\theta(x,0)dx + \int_\Omega z(x,0)\theta'(x,0)dx + \int_0^T \int_\Gamma z \frac{\partial \theta}{\partial \nu} d\Gamma dt = 0. \tag{2.124}$$

Logo

$$\langle z, \theta'' - \Delta\theta \rangle = \left\langle z^0, \theta'(0) \right\rangle + \left\langle z^1, \theta(0) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \theta}{\partial \nu}, z \right\rangle, \tag{2.125}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa diferentes pares de dualidade.

A definição de solução ultra fraca será dada como sendo um funcional definido pela expresão (2.125). Para isso, é natural escolher $\theta = \theta(x,t)$ como a solução do seguinte problema:

$$\begin{cases} \theta'' - \Delta\theta = f & \text{em} \quad Q, \\ \theta = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ \theta\,(T) = 0,\ \theta'\,(T) = 0 & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.126}$$

Tomando $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ e considerando a mudança de variável $T-t$ por t, o sistema (2.126) é um caso particular do problema estudado na Seção 2.2 (solução fraca). Portanto do Corolário 2.2 e dos Teoremas 2.7 e 2.6, podemos concluir que

$$\|\theta'(t)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + ||\theta(t)||_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C\,\|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\,, \tag{2.127}$$

$$\theta \in C^0\left([0,T]\,; H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T]\,; L^2(\Omega)\right), \tag{2.128}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\nu} \in L^2(\Sigma) \tag{2.129}$$

e

$$\left\|\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C\,\|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\,. \tag{2.130}$$

Como uma consequência de (2.128) temos $\theta'(0) \in L^2(\Omega)$, $\theta(0) \in H_0^1(\Omega)$ e $\dfrac{\partial\theta}{\partial\nu} \in L^2(\Sigma)$. Logo para que o lado direito de (2.125) faça sentido, é suficiente escolher,

$$z^0 \in L^2(\Omega), \quad z^1 \in H^{-1}\,(\Omega) \quad \text{e} \quad v \in L^2(\Sigma). \tag{2.131}$$

Assim, observando a expressão (2.125), podemos definir o funcional $S : L^1(0,T;L^2(\Omega)) \to \mathbb{R}$ por:

$$\langle S, f\rangle = -\left(z^0, \theta'(0)\right) + \left\langle z^1, \theta(0)\right\rangle - \int_\Sigma \frac{\partial\theta}{\partial\nu} v\partial\Gamma dt, \tag{2.132}$$

para toda solução θ do problema (2.126).

Das estimativas (2.127) e (2.130), segue de (2.132) que

$$\begin{aligned} &|\langle S, f\rangle| \leq |z^0|\,|\theta'(0)| + \|z^1\|_{H^{-1}(\Omega)}\,\|\theta(0)\| + \left\|\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right\|_{L^2(\Sigma)} \|v\|_{L^2(\Sigma)} \\ &\leq C\left(|z^0| + \|z^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}\,\|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\right). \end{aligned} \tag{2.133}$$

Portanto, o funcional S é uma forma linear e contínua, isto é, $S \in L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))$. Além disso

$$\|S\|_{L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))} \leq C\left(\left|z^0\right| + \left\|z^1\right\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}\right). \tag{2.134}$$

Definição 2.2 *Para* $\{z^0, z^1, v\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Sigma)$, *dizemos que* $z \in L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))$ *é solução ultra fraca (ou solução por transposição) de* (2.119) *se satisfaz a identidade*

$$\int_Q zf\,dxdt = -\left(z^0, \theta'(0)\right) + \left\langle z^1, \theta(0)\right\rangle - \int_{\Sigma} \frac{\partial\theta}{\partial\nu} v \partial\Gamma dt, \tag{2.135}$$

para toda $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, *com* θ *solução do problema* (2.126).

Teorema 2.8 (Existência e Unicidade) *Existe somente uma solução ultra fraca* z *do problema misto não homogêneo* (2.119). *Além disso, existe uma constante* $C = C(T) > 0$ *tal que*

$$\|z\|_{L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))} \leq C\left(\left|z^0\right| + \left\|z^1\right\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}\right). \tag{2.136}$$

Prova: A existência da solução ultra fraca é uma consequência de (2.132), (2.133) e o Teorema da representação de Riesz (Teorema 1.10), para funções de $L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))$. A unicidade é uma consequência de Lema de Du Bois Raymond (Lema 1.4).

A desigualdade (2.136), segue de (2.134). ■

Provaremos agora alguns resultados essenciais para obtermos a regularidade da solução ultra fraca.

Lema 2.4 *Consideremos o sistema* (2.119) *com dados regulares, ou seja, quando*

$$z^0 \in H_0^1(\Omega),\ z^1 \in L^2(\Omega) \text{ e } v \in H_0^2\left(0,T;H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)\right). \tag{2.137}$$

Logo existe uma única solução fraca z *de* (2.119) *na classe*

$$z \in C^0\left([0,T];H^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T];L^2(\Omega)\right). \tag{2.138}$$

Além disso, z *é uma solução ultra fraca de* (2.119).

Prova: Seja $w \in H_0^2(0,T;H^2(\Omega))$ tal que $w = v$ sobre Σ. A existência de w é garantida pelo Teorema do Traço. Observe que w'' e Δw são objetos de $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Consideremos o problema misto

$$\left| \begin{array}{lll} u'' - \Delta u = -w'' + \Delta w & \text{em} & Q, \\ u = 0 & \text{sobre} & \Sigma, \\ u(0) = z^0,\, u'(0) = z^1 & \text{em} & \Omega. \end{array} \right. \tag{2.139}$$

Desde que $-w'' + \Delta w \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $z^0 \in H_0^1(\Omega)$ e $z^1 \in L^2(\Omega)$, segue do Teorema (2.4) que (2.139) tem uma úcica solução fraca u. Além disso, pelo Teorema 2.6, a solução u pertence à classe

$$u \in C^0\left([0,T]\,;H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T]\,;L^2(\Omega)\right).$$

Por definição da solução fraca, u satisfaz

$$\frac{d}{dt}(u'(t),\psi) + ((u(t),\psi)) = (-w'' + \Delta w, \psi)\,,\ \text{em } \mathcal{D}'(0,T),\ \forall \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Então $z = u + w$ satisfaz

$$\frac{d}{dt}\,(z',\psi) + ((z,\psi)) = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(0,T),\ \forall \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Além disso, $z = v$ sobre Σ, $z\,(0) = z^0$ e $z'\,(0) = z^1$ em Ω. Portanto $z \in C^0\,([0,T]\,;H^1(\Omega)) \cap C^1\,([0,T]\,;L^2(\Omega))$ é a única solução fraca do problema (2.119).

Provaremos agora que z é também solução ultra fraca de (2.119). De fato, seja $f \in L^1\,((0,T)\,;L^2(\Omega))$ e consideremos a sequência $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ com $f_m \in L^1\,((0,T)\,;H_0^1(\Omega))$ tal que

$$f_m \to f \text{ forte em } L^1\left((0,T)\,;L^2(\Omega)\right). \tag{2.140}$$

Consideremos os seguintes problemas:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \theta_m'' - \triangle\theta_m = f_m & \text{em} & Q, \\ \theta_m = 0 & \text{sobre} & \Sigma, \\ \theta_m\,(T) = 0,\, \theta_m'\,(T) = 0 & \text{em} & \Omega \end{array} \right. \tag{2.141}$$

e

$$\begin{cases} \theta'' - \triangle\theta = f & \text{em} \quad Q, \\ \theta = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ \theta(T) = 0,\ \theta'(T) = 0 & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.142}$$

Pela regularidade de f_m e f, segue que existe solução forte θ_m de (2.141) e solução fraca θ de (2.142). Além disso,

$$\theta_m \in C^0\left([0,T]; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T]; H_0^1(\Omega)\right). \tag{2.143}$$

Assim $\theta_m - \theta$ é solução fraca de (2.142). Então mudando t por $T-t$, temos pela desigualdade de energia (2.5) e a Regularidade Escondida (Teorema 2.7) que

$$\begin{aligned} &\left|\theta_m'(T-t) - \theta'(T-t)\right|^2 + \left\|\theta_m(T-t) - \theta(T-t)\right\|^2 + \left\|\frac{\partial\theta_m}{\partial\nu} - \frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2 \\ &\leq C\left\|f_m - f\right\|_{L^1((0,T);L^2(\Omega))}, \end{aligned} \tag{2.144}$$

para todo $0 \leq t \leq T$. Tomando $t = T$ e fazendo $m \to \infty$, obtemos da última desigualdade que

$$\left| \begin{array}{lll} \theta_m(0) \to \theta(0) & \text{em} & H_0^1(\Omega), \\ \theta_m'(0) \to \theta'(0) & \text{em} & L^2(\Omega), \\ \dfrac{\partial\theta_m}{\partial\nu} \to \dfrac{\partial\theta}{\partial\nu} & \text{em} & L^2(\Sigma). \end{array} \right. \tag{2.145}$$

Sendo z uma função na classe (2.138), faz sentido $\langle z''(t), \theta_m(t)\rangle$, $\langle -\Delta z(t), \theta_m(t)\rangle$, dualidades entre $H^{-1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$. Então, pelos mesmos argumento usados para obter (2.124), temos

$$\int_Q z f_m dxdt = -\left(z^0, \theta_m'(0)\right) + \langle z', \theta_m(0)\rangle - \int_\Sigma \frac{\partial\theta_m}{\partial\nu}\nu d\Gamma dt. \tag{2.146}$$

Tomando o limite em (2.146), quando $m \to \infty$, e observando as convergências (2.145), segue que z é solução ultra fraca do problema (2.119), como queríamos mostrar. ■

Observação 2.1 *Notemos que, para todo $f \in W_0^{1,1}(0,T; L^2(\Omega))$ temos*

$$\langle z', f\rangle = -\int_0^T (z, f')\, dt. \tag{2.147}$$

Assim, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos de (2.147) *que*

$$\|z'\|_{W^{-1,\infty}(0,T;L^2(\Omega))} \leq \|z\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}, \tag{2.148}$$

para toda solução fraca z *de* (2.119).

Lema 2.5 *Seja* z *solução ultra fraca do problema* (2.119), *então* $z' \in W^{-1,\infty}(0,T;L^2(\Omega))$.

Prova: Se z é solução ultra fraca temos $z \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Em particular, $z \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ que implica $z' \in H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$. Consideremos f em $W_0^{1,1}(0,T;L^2(\Omega))$ e a sequência $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de funções $f_m \in H_0^1(0,T;L^2(\Omega))$ tal que

$$f_m \to f \text{ forte em } W_0^{1,1}\left(0,T;L^2(\Omega)\right). \tag{2.149}$$

Temos por (2.147) e (2.148) para f_m em lugar de f e tomando limite quando $m \to \infty$, que $z' \in W^{-1,\infty}(0,T;L^2(\Omega))$. ■

Consideremos $f \in W_0^{1,1}(0,T;H_0^1(\Omega))$.De (2.147) e a definição de solução ultra fraca, (Definição 2.2), segue que

$$\langle z', f\rangle = -\int_Q z f' dxdt = \left(z^0, \theta'(0)\right) - \left\langle z^1, \theta(0)\right\rangle + \int_\Sigma \frac{\partial\theta}{\partial\nu} v d\Gamma dt, \tag{2.150}$$

para toda solução θ do problema

$$\left|\begin{array}{ll} \theta'' - \Delta\theta = f' & \text{em} \quad Q, \\ \theta = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ \theta(T) = 0,\ \theta'(T) = 0 & \text{em} \quad \Omega. \end{array}\right. \tag{2.151}$$

Lema 2.6 *Seja* θ *a solução do* (2.151), *então existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$|\theta'(0)| + \|\theta(0)\| + \left\|\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C\,\|f\|_{L^1\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)}, \tag{2.152}$$

para todo, $f \in W_0^{1,1}(0,T;H_0^1(\Omega))$.

Prova: Consideremos o problema

$$\left|\begin{array}{ll} w'' - \Delta w = f & \text{em} \quad Q, \\ w = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ w(T) = 0,\ w'(T) = 0 & \text{em} \quad \Omega. \end{array}\right. \tag{2.153}$$

para $f \in W_0^{1,1}\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right)\right)$. Segue do Teorema da regularidade da solução forte (Teorema 2.3) que

$$w \in C^0\left(\left[0,T\right];H_0^1\left(\Omega\right)\cap H^2\left(\Omega\right)\right)\cap C^1\left(\left[0,T\right];H_0^1\left(\Omega\right)\right) \tag{2.154}$$

e

$$\left\|w'\right\|_{L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)} + \left\|w\right\|_{L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right)} \leq C\left\|f\right\|_{L^1\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)}. \tag{2.155}$$

Seja $w' = \theta$, então θ é solução do sistema (2.151) porque θ verifica a equação $(2.151)_1$, $\theta\left(T\right) = w'\left(T\right) = 0$ e $\theta'\left(T\right) = w''\left(T\right) = \Delta w\left(T\right) = 0$ porque $f \in W_0^{1,1}\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right)\right)$. Portanto $\left|\theta'\left(0\right)\right| + \left\|\theta\left(0\right)\right\| = \left|w''\left(0\right)\right| + \left\|w'\left(0\right)\right\| = \left|\Delta w\left(0\right)\right| + \left\|w'\left(0\right)\right\|$. Segue de (2.155) que

$$\left|\theta'\left(0\right)\right| + \left\|\theta\left(0\right)\right\| \leq C\left\|f\right\|_{L^1\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)}. \tag{2.156}$$

Assim, para obter a desigualdade (2.152) é suficiente estimar $\left\|\frac{\partial\theta}{\partial v}\right\|_{L^2(\Sigma)}$ por $\left\|f\right\|_{L^1\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)}$. Para isto, reescrevamos a identidade (2.88) para θ solução de (2.151) e $q_k = h_k$. Assim:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Sigma\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 d\Gamma dt = -\left(\theta\left(0\right), h_k\frac{\partial\theta\left(0\right)}{\partial x_k}\right) + \frac{1}{2}\int_Q\frac{\partial h_k}{\partial x_k}\left(\left|\theta'\right|^2 + \left|\nabla\theta\right|^2\right)dxdt \\ +\int_Q\frac{\partial h_k}{\partial x_j}\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}dxdt - \int_Q f h_k\frac{\partial\theta}{\partial x_k}dxdt.\end{aligned} \tag{2.157}$$

Como $h_k\frac{\partial\theta}{\partial x_k} \in L^\infty\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right)$, segue que $h_k\frac{\partial\theta'}{\partial x_k} \in W^{-1,\infty}\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right)$. Então

$$-\int_Q f' h_k\frac{\partial\theta}{\partial x_k}dxdt = \int_Q f h_k\frac{\partial\theta'}{\partial x_k}dxdt. \tag{2.158}$$

Sendo $f \in H_0^1\left(\Omega\right)$ e $\theta' = w'' = \Delta w + f$ temos

$$\begin{aligned}\int_Q f h_k\frac{\partial\theta'}{\partial x_k}dxdt = -\int_Q\frac{\partial}{\partial x_k}\left(f h_k\right)\theta' dxdt = -\int_Q\frac{\partial f}{\partial x_k}h_k\Delta w dxdt \\ -\int_Q\frac{\partial f}{\partial x_k}h_k f dxdt - \int_Q\frac{\partial h_k}{\partial x_k}f\Delta w dxdt - \int_Q\frac{\partial h_k}{\partial x_k}f^2 dxdt.\end{aligned} \tag{2.159}$$

Temos ainda que

$$-\int_Q\frac{\partial f}{\partial x_k}h_k f dxdt = -\frac{1}{2}\int_Q h_k\frac{\partial f^2}{\partial x_k}dxdt = \frac{1}{2}\int_Q\frac{\partial h_k}{\partial x_k}f^2 dxdt. \tag{2.160}$$

Substituindo (2.160) em (2.159) e o resultado em (2.158), segue

$$-\int_Q f' h_k\frac{\partial\theta}{\partial x_k}dxdt = -\int_Q\frac{\partial f}{\partial x_k}h_k\Delta w dxdt - \int_Q\frac{\partial h_k}{\partial x_k}f\Delta w dxdt - \frac{1}{2}\int_Q\frac{\partial h_k}{\partial x_k}f^2 dxdt. \tag{2.161}$$

Sabemos que:

$$\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_k}\left(|\theta'|^2 - |\nabla\theta|^2\right) dxdt = \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_k}\left(|\Delta w|^2 + 2f\Delta w + |f|^2 - |\nabla\theta|^2\right) dxdt. \tag{2.162}$$

Substituindo (2.161) e (2.162) em (2.157) temos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_\Sigma \left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 d\Gamma dt = -\left(w'(0), h_k\frac{\partial w'(0)}{\partial x_k}\right) + \frac{1}{2}\int_Q \left(\frac{\partial h_k}{\partial x_k}\right)|\Delta w|^2 dxdt \\ &-\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_k}|\nabla w'|^2 dxdt - \int_Q \frac{\partial f}{\partial x_k}h_k\Delta w dxdt + \int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_j}\frac{\partial w'}{\partial x_k}\frac{\partial w'}{\partial x_j}dxdt. \end{aligned} \tag{2.163}$$

Aplicando a estimativa (2.155) ao lado direito de (2.163) e observando que $h_k \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, $1 \leq k \leq n$, obtemos

$$\int_\Sigma \left(\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt \leq C\,\|f\|_{L^1\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)} \tag{2.164}$$

De (2.156) e (2.164) segue a prova do lema. ■

Teorema 2.9 (Regularidade da Solução Ultra Fraca) *A solução ultra fraca z de* (2.119) *pertence à classe*

$$z \in C^0\left([0,T]; L^2(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T]; H^{-1}(\Omega)\right). \tag{2.165}$$

Além disso, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|z\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|z'\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C\left(\left|z^0\right| + \left\|z^1\right\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}\right).$$

Prova: Dividiremos a prova em duas etapas.

- Primeira Etapa (Regularidade para z)

Dados $z^0 \in L^2(\Omega)$, $z^1 \in H^{-1}(\Omega)$ e $v \in L^2(\Sigma)$, existem sequências $(z_m^0)_{m\in\mathbb{N}}$, $(z_m^1)_{m\in\mathbb{N}}$ e $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ em $H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)$ e $H_0^2\left(0,T; H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)\right)$ respectivamente, tais que:

$$\left|\begin{array}{lll} z_m^0 \to z^0 & \text{forte em} & L^2(\Omega), \\ z_m^1 \to z^1 & \text{forte em} & H^{-1}(\Omega), \\ v_m \to v & \text{forte em} & L^2(\Sigma). \end{array}\right. \tag{2.166}$$

Seja $w_m \in H_0^2(0,T;H^2(\Omega))$ tal que $w_m = v_m$ em Σ. Para cada $m \in \mathbb{N}$, consideremos o problema misto não homogêneo

$$\left| \begin{array}{ll} z_m'' - \Delta z_m = 0 & \text{em} \quad Q, \\ z_m = v_m & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ z_m(0) = z_m^0 \; z_m'(0) = z_m^1. & \text{em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{2.167}$$

Pelo Lema 2.4, segue que a solução ultra fraca z_m de (2.167) pertence à classe

$$z_m \in C^0\left([0,T]; H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T]; L^2(\Omega)\right). \tag{2.168}$$

Sendo z solução ultra fraca de (2.119), com dados $\{z^0,\ z^1,\ v\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Sigma)$, então $z_m - z$ é também solução ultra fraca de (2.119) com dados $z_m^0 - z^0$, $z_m^1 - z^1$ e $v_m - v$.

Da estimativa (2.136), temos

$$\|z_m - z\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C\left(\left|z_m^0 - z^0\right| + \left\|z_m^1 - z^1\right\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v_m - v\|_{L^2(\Sigma)}\right).$$

Fazendo $m \to \infty$ na última desigualdade e usando (2.166) obtemos

$$z_m \to z \text{ forte em } L^\infty\left(0,T; L^2(\Omega)\right).$$

Como $z_m \in C^0([0,T]; L^2(\Omega))$ então $z \in C^0([0,T]; L^2(\Omega))$.

- Segunda Etapa (Regularidade para z')

De (2.150) e o Lema 2.6, obtemos

$$|\langle z', f\rangle| \leq C\left(\left|z^0\right| + \left\|z^1\right\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}\right)\|f\|_{L^1\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)}. \tag{2.169}$$

Como $W_0^{1,1}(0,T;H_0^1(\Omega))$ é denso em $L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$, segue que a desigualdade (2.169) é verdadeira para todo $f \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$. Logo

$$z' \in L^\infty\left(0,T; H^{-1}(\Omega)\right) \tag{2.170}$$

e

$$\|z'\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C\left(\left|z^0\right| + \left\|z^1\right\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}\right). \tag{2.171}$$

Notemos que (2.170) e (2.171) são válidos para toda solução ultra fraca de (2.119).

Consideremos (z_m) a sequência de soluções fracas nas condições da etapa anterior. Logo $z_m - z$ é solução ultra fraca de (2.119) e por (2.171), temos

$$\|z'_m - z'\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C\left(\left|z^0_m - z^0\right| + \left\|z^1_m - z^1\right\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v_m - v\|_{L^2(\Sigma)}\right).$$

Dessa forma, fazendo $m \to \infty$, concluimos que

$$z'_m \to z' \text{ forte em } L^\infty\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right). \tag{2.172}$$

Como z_m é também solução fraca, então $z'_m \in C^0\left([0,T];H^{-1}(\Omega)\right)$, por (2.172), segue

$$z' \in C^0\left([0,T];H^{-1}(\Omega)\right)$$

e, portanto, temos provado o resultado. ■

Capítulo 3

Controlabilidade da Equação da Onda Linear

3.1 Controlabilidade Exata

O objetivo desta seção é estudar problemas de controlabilidade exata por meio do *Método da Unicidade Hilbertiana* (HUM), idealizado por Lions (ver [16], [17]), cuja metodologia é baseada em certo critério de unicidade e na construção de um espaço de Hilbert. O HUM toma em consideração as propriedades das soluções da equação da onda, desenvolvidas nas seções 2.1 e 2.2. Além disso, mostraremos como o problema de controlabilidade se reduz a um problema de minimização.

3.1.1 Controlabilidade Exata na Fronteira

Nosso objetivo nesta seção é estudar o problema de controlabilidade exata quando a ação ocorre na fronteira Σ.

Consideremos o sistema

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = 0 \quad \text{em} \quad Q, \\ y = \begin{cases} v \quad \text{sobre} \quad \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0,T)\,, \\ 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma - \Sigma_0, \end{cases} \\ y(\cdot,0) = y^0, \quad y'(\cdot,0) = y^1 \quad \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde Γ_0 é uma parte de Γ, com medida positiva tal que $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{(\Gamma - \Gamma_0)} = \emptyset$.

Observação 3.1 *Tendo em conta que o sistema pode ser controlado na fronteira, é razoável tentar resolver o problema quando o controle atua somente sobre uma parte desta. Esse problema, além de mais interessante, permite minimizar um certo custo que surge de maneira natural. Dessa forma, consideraremos o caso em que o controle atua únicamente sobre o subconjunto Σ_0 de Σ. Portanto trata-se de um problema de controlabilidade exata na fronteira com controle localizado.*

1. **Formulação do Problema**

   O problema de controlabilidade exata pode ser formulado como segue: Dado $T > 0$ suficientemente grande, achar um espaço de Hilbert H tal que para todo par de dados iniciais $\{y^0, y^1\}$ em H, exista um controle $v \in L^2(\Sigma_0)$, tal que a solução $y = y(x,t,v)$ de (3.1) cumpre a condição do equilíbrio:

$$y(x,T,v) = 0 \quad \text{e} \quad y'(x,T,v) = 0. \tag{3.2}$$

Observação 3.2 *Como a velocidade de propagação das ondas é finita (em nosso caso igual a 1), para que se tenha controlabilidade, o tempo T haverá ser suficientemente grande.*

Observação 3.3 *Devido à linearidade e reversibilidade da equação da onda, o problema de controlabilidade exata na fronteira pode ser formulado como: Dado $T > 0$ suficientemente grande, achar um espaço de Hilbert H tal que para todo par de dados $\{y^0, y^1\}$ e $\{z^0, z^1\}$ em H, exista um controle $v \in L^2(\Sigma_0)$, tal que a solução $y = y(x,t,v)$ de (3.1) satisfaz a condição:*

$$y(x,T,v) = z^0 \quad e \quad y'(x,T,v) = z^1. \tag{3.3}$$

Em outras palavras, demostrar que todo estado inicial pode ser dirigido ao equilibrio, é equivalente a demostrar que todo estado inicial pode ser dirigido a todo estado final. De fato, consideremos o problema

$$\left| \begin{array}{ll} z'' - \Delta z = 0 & em \quad Q, \\ z = 0 & sobre \quad \Sigma, \\ z(\cdot, T) = z^0, \quad z'(\cdot, T) = z^1 & em \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{3.4}$$

Logo pelos resultados na Seção 2.1, o problema tem uma única solução forte z. Seja $m = y - z$, temos que y é solução de problema (3.1) *se, e somente se, m é solução do seguinte sistema*

$$\left| \begin{array}{ll} m'' - \Delta m = 0 & em \quad Q, \\ m = 0 & sobre \quad \Sigma, \\ m(\cdot, 0) = y^0 - z(\cdot, 0), \quad m'(\cdot, 0) = y^1 - z'(\cdot, 0) & em \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{3.5}$$

Além disso, cumpre-se (3.3) *se, e somente se, $m(T) = m'(T) = 0$. Portanto, como $y^0 - z(\cdot, 0)$ e $y^1 - z'(\cdot, 0)$ estão em H, então existe um controle $v \in L^2(\Sigma_0)$, tal que a solução $m = m(x, t, v)$ de* (3.5) *satisfaz $m(T) = m'(T) = 0$. Logo a solução $y = y(x, t, v)$ de* (3.1) *satisfaz a condição* (3.3).

2. **Descrição do HUM**

- *Primeiro Passo*

Dados $\{\phi^0, \phi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$, consideremos o problema

$$\left| \begin{array}{ll} \phi'' - \Delta \phi = 0 & \text{em} \quad Q, \\ \phi = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ \phi(\cdot, 0) = \phi^0, \quad \phi'(\cdot, 0) = \phi^1 & \text{em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{3.6}$$

Pelos resultados na Seção 2.1, podemos concluir que (3.6) tem única solução forte $\phi = \phi(x, t)$.

- *Segundo Passo*

Consideremos o problema não homogêneo

$$\left| \begin{array}{l} \psi'' - \Delta\psi = 0 \quad \text{em} \quad Q, \\ \psi = \begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial \nu} \quad \text{sobre} \quad \Sigma_0, \\ 0 \quad \text{sobre} \quad (\Sigma - \Sigma_0), \end{cases} \\ \psi(T) = 0, \quad \psi'(T) = 0 \text{ em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{3.7}$$

Notemos que (3.7) é bem definido, pois, considerando a mudança de variável $T - t$ em lugar de t, o sistema (3.7), recai no caso estudado na Seção 2.3, visto que $v = \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma)$ (ver Teorema 2.7).

Para a solução ψ de (3.7), definamos a aplicação:

$$\Lambda \left\{ \phi^0, \phi^1 \right\} = \{ \psi'(0), -\psi(0) \}. \tag{3.8}$$

Λ está bem definida. De fato, para $\{\phi^0, \phi^1\}$ em $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$, obtemos a solução $\phi = \phi(x,t)$ de (3.6) com regularidade $\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma)$. Assim podemos considerar o problema (3.7) e pelo, Teorema (2.9), temos $\psi(0) \in L^2(\Omega)$ e $\psi'(0) \in H^{-1}(\Omega)$ e .

- *Terceiro Passo*

Multiplicando ambos os lados de $(3.7)_1$ pela solução ϕ de (3.6) e integrando em Q, obtemos

$$\int_Q \psi'' \phi dxdt - \int_Q \Delta\psi \phi dxdt = 0. \tag{3.9}$$

Note que $(\psi'', \phi) = (\psi', \phi)' - (\psi', \phi')$, então a primeira integral de (3.9) é igual a

$$\int_Q \psi'' \phi dxdt = -\langle \psi'(0), \phi(0) \rangle - \int_0^T \langle \psi', \phi' \rangle dt. \tag{3.10}$$

Como

$$\int_0^T \langle \psi', \phi' \rangle dt = -\langle \psi(0), \phi'(0) \rangle - \int_Q \psi \phi'' dxdt, \tag{3.11}$$

então substituindo (3.11) em (3.10), segue que

$$\int_Q \psi'' \phi dxdt = -\left\langle \psi'(0), \phi^0 \right\rangle + \left\langle \psi(0), \phi^1 \right\rangle - \int_Q \psi \phi'' dxdt. \tag{3.12}$$

Por outra parte, usando a identidade de Green, temos

$$-\int_Q \Delta\psi\phi dxdt = \int_Q \nabla\psi\nabla\phi dxdt = -\int_Q \Delta\phi\psi dxdt + \int_\Sigma \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\psi d\Sigma. \tag{3.13}$$

Assim, substituindo as igualdades (3.12) e (3.13) em (3.9), obtemos:

$$-\left\langle \psi'(0), \phi^0 \right\rangle + \left\langle \psi(0), \phi^1 \right\rangle + \int_\Sigma \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\psi d\Gamma dt = 0, \tag{3.14}$$

pois $\phi'' - \Delta\phi = 0$ q.s. em Q. Tendo em conta $(3.7)_2$, segue de (3.14), que

$$-\left(\psi(0), \phi^1\right) + \left\langle \psi'(0), \phi^0 \right\rangle = \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt. \tag{3.15}$$

Temos por (3.8) e (3.15) que

$$\left\langle \Lambda\left\{\phi^0, \phi^1\right\}, \left\{\phi^0, \phi^1\right\} \right\rangle = \left\langle \left\{\psi'(0), -\psi(0)\right\}, \left\{\phi^0, \phi^1\right\} \right\rangle = \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt. \tag{3.16}$$

Definamos em $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ a seguinte forma quadrática:

$$\left\|\left\{\phi^0, \phi^1\right\}\right\|_F = \left(\int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.17}$$

a qual é uma seminorma. Pelo Teorema de Unicidade de Holmgren (ver [9]), temos que para todo subconjunto aberto e não vazio $\Gamma_0 \subset \Gamma$, existe $T_0 > 0$, tal que, quando $T > T_0$ a única solução de (3.6) com $\frac{\partial\phi}{\partial\nu} = 0$ em Σ_0 é $\phi \equiv 0$. Isto implica que $\|\cdot\|_F$ define uma norma em $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$.

A norma (3.17) induz em $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ o produto interno

$$\left\langle \left\{\phi^0, \phi^1\right\}, \left\{\gamma^0, \gamma^1\right\} \right\rangle_F = \int_\Sigma \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\frac{\partial\gamma}{\partial\nu} d\Gamma dt, \tag{3.18}$$

onde $\gamma = \gamma(x,t)$ é a solução de (3.6), correspondente ao dado inicial $\left\{\gamma^0, \gamma^1\right\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$.

Multiplicando $(3.7)_1$ por γ e, em seguida, integrando em Q, obtemos

$$\int_Q \gamma\left(\psi'' - \Delta\psi\right) = 0.$$

Seguindo os mesmos argumentos usados na obtenção de (3.14), resulta que

$$\int_\Sigma \frac{\partial\gamma}{\partial\nu}\frac{\partial\psi}{\partial\nu} d\Gamma dt = -\left\langle \psi'(0), \gamma^0 \right\rangle + \left\langle \psi(0), \gamma^1 \right\rangle.$$

Dessa forma, temos por (3.8) que

$$\left\langle \Lambda \left\{\phi^0, \phi^1\right\}, \left\{\gamma^0, \gamma^1\right\}\right\rangle = \left\langle \left\{\phi^0, \phi^1\right\}, \left\{\gamma^0, \gamma^1\right\}\right\rangle_{F'}. \tag{3.19}$$

É fácil ver que Λ é bilinear e injetiva. Temos ainda, aplicando a desigualdade de Schwarz em (3.19), que

$$\left|\left\langle \Lambda \left\{\phi^0, \phi^1\right\}, \left\{\gamma^0, \gamma^1\right\}\right\rangle\right| \leq \left\|\left\{\phi^0, \phi^1\right\}\right\|_F \left\|\left\{\gamma^0, \gamma^1\right\}\right\|_{F'},$$

ou seja, a forma bilinear Λ, definida em $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$, também é contínua.

Representaremos por F o espaço de Hilbert, dado pelo completamento de $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ com respeito à norma definida em (3.17).

A forma bilinear $\{\{\phi^0, \phi^1\}, \{\gamma^0, \gamma^1\}\} \mapsto \langle \Lambda \{\phi^0, \phi^1\}, \{\gamma^0, \gamma^1\}\rangle$ tem uma extensão, por continuidade, ao fecho F. Então obtemos a forma bilinear contínua no espaço de Hilbert F, a qual é coerciva, por (3.18). Logo pelo Lema de Lax-Milgram (Lema 1.5), para cada $\{\eta^0, \eta^1\} \in F'$, existe uma única $\{\phi^0, \phi^1\} \in F$, tal que

$$\left\langle \Lambda \left\{\phi^0, \phi^1\right\}, \left\{\gamma^0, \gamma^1\right\}\right\rangle = \left\langle \left\{\eta^0, \eta^1\right\}, \left\{\gamma^0, \gamma^1\right\}\right\rangle_{F' \times F},$$

para toda $\{\gamma^0, \gamma^1\} \in F$. Portanto, para cada $\{\eta^0, \eta^1\} \in F'$, existe uma única $\{\phi^0, \phi^1\} \in F$, a qual é solução da equação $\Lambda \{\phi^0, \phi^1\} = \{\eta^0, \eta^1\}$ em F'. Sendo Λ bijetiva e contínua, pelo Teorema da Aplicação Aberta (Teorema 1.1), temos que $\Lambda : F \to F'$ é um isomorfismo. Conseqüentemente, para cada $\{y^1, y^0\} \in F'$, existe uma única $\{\phi^0, \phi^1\} \in F$ tal que

$$\Lambda \left\{\phi^0, \phi^1\right\} = \left\{y^1, -y^0\right\} \quad \text{em} \quad F'.$$

Como a aplicação Λ foi definida por $\Lambda \{\phi^0, \phi^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\}$, onde ψ é a solução do problema não homogêneo (3.7), então $\psi(0) = y^0$ e $\psi'(0) = y^1$. Assim, considerando o controle $v = \frac{\partial \phi}{\partial \nu}$ em (3.1), temos que ψ e y são soluções ultra fracas do mesmo problema com valor na fronteira não homogêneo, e pela unicidade de solução, segue que y satisfaz $(3.7)_3$, ou seja, a condição (3.2).

Agora faremos a caracterização dos espaços F e F' como espaços de Sobolev. Na verdade mostraremos que $F = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. De fato,

(i) $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \subset F.$

Seja $\{\phi^0, \phi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Pelo Teorema 2.7, a solução fraca ϕ de (3.6) satisfaz a desigualdade

$$\int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt \leq C_0 \left\| \{\phi^0, \phi^1\} \right\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}. \tag{3.20}$$

A inequação anterior é conhecida por *Desigualdade Direta.*

Como F é o completamento de $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ com respeito à norma definida em (3.17), obtemos $\{\phi^0, \phi^1\} \in F$.

(ii) $F \subset H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Seja $\{\phi^0, \phi^1\} \in F$. Consideremos x^0 algum ponto de $\mathbb{R}^n$, $R(x^0) = \sup_{x \in \overline{\Omega}} \|x - x^0\|$ e $T(x^0) = 2R(x^0)$. Para $T > T(x^0)$, existe $C > 0$ tal que

$$C \left\| \{\phi^0, \phi^1\} \right\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \leq \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt. \tag{3.21}$$

A inequação (3.21) é denominada *Desigualdade Inversa* ou *Desigualdade de Observabilidade.* A demostração desta desigualdade encontra-se feita no Apêndice B (Teorema B.1). Logo, pela definição de F, temos que $\{\phi^0, \phi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Por (i) e (ii) concluimos a equivalência das normas $\|\cdot\|_F$ e $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}$ e identificamos F e seu dual F' com $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, respectivamente. Assim, dados $\{y^1, y^0\} \in H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, existe um único par de dados iniciais $\{\phi^0, \phi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ que associa à solução fraca ϕ de (3.6). Sendo o controle $v = \frac{\partial \phi}{\partial \nu}\big|_{\Sigma_0}$, pela regularidade escondida da solução fraca provada no Teorema 2.7, temos que $v \in L^2(\Sigma_0)$.

Problema de Minimização

No ponto anterior obtivemos o espaço de Hilbert $H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ no qual, para todo par de dados iniciais $\{y^1, y^0\}$ nele contido, existe um controle $v \in L^2(\Sigma_0)$, tal que a solução $y = y(x, t, v)$ de (3.1) cumpre a condição de equilíbrio (3.2).

Vamos agora mostrar como o problema de contrabilidade exata na fronteira se reduz a um problema de minimização.

Lema 3.1 *Seja ϕ a solução de* (3.6) *com dados iniciais* $\{\phi^0, \phi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. *Então para dados iniciais* $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, *a solução y de* (3.1) *satisfaz* (3.2) *se, e somente se, existe* $v \in L^2(\Sigma_0)$ *tal que*

$$\int_{\Sigma_0} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} v d\Gamma dt = \left\langle y^1, \phi^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \left(y^0, \phi^1\right).$$

Prova: Suponhamos $\{y^0, y^1\}, \{\phi^0, \phi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ e $v \in \mathcal{D}(\Sigma_0)$. Multiplicando $(3.1)_1$ por ϕ e integrando em Q, obtemos

$$\int_\Omega \int_0^T \phi\left(y'' - \Delta y\right) dt dx = 0.$$

Assim

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \int_0^T \phi\left(y'' - \Delta y\right) dt dx = \int_\Omega \left(\phi y' - \phi' y\right) dx \Big|_0^T + \int_\Sigma \left(-\frac{\partial y}{\partial \nu}\phi + \frac{\partial \phi}{\partial \nu} y\right) d\Gamma dt \\ &= \int_{\Sigma_0} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} y d\Gamma dt + \int_\Omega \left[\phi(T) y'(T) - \phi'(T) y(T)\right] dx - \int_\Omega \left[\phi(0) y^1 - \phi'(0) y^0\right] dx. \end{aligned}$$

Logo, para $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ e $\{\phi^0, \phi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, temos

$$\int_{\Sigma_0} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} y d\Gamma dt = \int_\Omega y(T) \phi'(T) dx - \left\langle y'(T), \phi(T)\right\rangle - \int_\Omega y^0 \phi^1 dx + \left\langle y^1, \phi^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \quad (3.22)$$

Portanto, segue de (3.22) que y satisfaz (3.2) se, e somente se,

$$\int_{\Sigma_0} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} v d\Gamma dt = \left\langle y^1, \phi^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega y^0 \phi^1 dx,$$

o que mostra o resultado. ■

Definamos a dualidade entre $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ e $L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ por

$$\left\langle \left\{y^0, y^1\right\}, \left\{\phi^1, \phi^0\right\} \right\rangle = \left(y^0, \phi^1\right) - \left\langle y^1, \phi^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \quad (3.23)$$

Logo o lema anterior pode ser reformulado da seguinte maneira:

Lema 3.2 *Seja ϕ a solução de* (3.6) *com dados iniciais* $\{\phi^0, \phi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. *Então, para dados iniciais* $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, *a solução y de* (3.1) *satisfaz* (3.2) *se, e somente se, existe* $v \in L^2(\Sigma_0)$ *tal que*

$$\int_{\Sigma_0} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} v d\Gamma dt + \left\langle \left\{y^0, y^1\right\}, \left\{\phi^1, \phi^0\right\} \right\rangle = 0. \quad (3.24)$$

Observe que, por (3.24), a controlabilidade exata do sistema (3.1) pode ser remetida à obtenção de pontos críticos do funcional $\mathcal{J} : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por:

$$\mathcal{J}\left\{\phi^0, \phi^1\right\} = \frac{1}{2}\int_{\Sigma_0} \left|\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma dt + \left\langle \left\{y^0, y^1\right\}, \left\{\phi^1, \phi^0\right\} \right\rangle, \tag{3.25}$$

onde ϕ é a solução de (3.6) com dados iniciais $\{\phi^0, \phi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Consideremos o seguinte resultado de minimização:

Teorema 3.1 *Seja $T > T(x^0)$. Então o funcional $\mathcal{J}$, definido em* (3.25), *possui um único mínimo* $\left\{\overline{\phi}^0, \overline{\phi}^1\right\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Prova: Pelo Teorema (1.11), para afimar a existência do um único mínimo, devemos provar que o funcional $\mathcal{J}$ é semicontínuo inferiormente, estritamente convexo e coercivo.

- $\mathcal{J}$ é semicontínuo inferiormente.

  Pela desigualdade direta (3.20), sabemos que

$$\mathcal{J}\left\{\phi^0, \phi^1\right\} \leq \frac{C}{2}\left\|\left\{\phi^0, \phi^1\right\}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} + \left\langle \left\{y^0, y^1\right\}, \left\{\phi^1, \phi^0\right\} \right\rangle$$

  e, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$\mathcal{J}\left\{\phi^0, \phi^1\right\} \leq \frac{C}{2}\left\|\left\{\phi^0, \phi^1\right\}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} + \left\|\left\{\phi^0, \phi^1\right\}\right\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}\left\|\left\{y^0, y^1\right\}\right\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}. \tag{3.26}$$

  Assim, deduzimos por (3.26) a continuidade do funcional $\mathcal{J}$ e, portanto, sua semicontínuidade inferior.

- $\mathcal{J}$ é estritamente convexo.

  Sejam $\{\phi^0, \phi^1\}, \{\psi^0, \psi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $\lambda \in (0,1)$. Logo

$$\mathcal{J}\left(\lambda\left\{\phi^0, \phi^1\right\} + (1-\lambda)\left\{\psi^0, \psi^1\right\}\right) = \lambda\mathcal{J}\left\{\phi^0, \phi^1\right\} + (1-\lambda)\mathcal{J}\left\{\psi^0, \psi^1\right\}$$
$$-\frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\int_{\Sigma_0}\left|\frac{\partial \phi}{\partial \nu} - \frac{\partial \psi}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma dt.$$

Pela desigualdade inversa (3.21) temos

$$\int_{\Sigma_0} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} - \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt \geq C_1 \left\| \left\{ \phi^0, \phi^1 \right\} - \left\{ \psi^0, \psi^1 \right\} \right\|^2_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}.$$

Assim, para algum $\{\phi^0, \phi^1\} \neq \{\psi^0, \psi^1\}$, temos

$$\mathcal{J}\left(\lambda \left\{ \phi^0, \phi^1 \right\} + (1-\lambda) \left\{ \psi^0, \psi^1 \right\} \right) < \lambda \mathcal{J} \left\{ \phi^0, \phi^1 \right\} + (1-\lambda) \mathcal{J} \left\{ \psi^0, \psi^1 \right\}.$$

Portanto $\mathcal{J}$ é estritamente convexo.

- $\mathcal{J}$ é coercivo.

  De fato, sabemos que

$$\mathcal{J}\left\{ \phi^0, \phi^1 \right\} \geq \frac{1}{2} \left(\int_{\Sigma_0} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt - \left\| \left\{ \phi^0, \phi^1 \right\} \right\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \left\| \left\{ y^0, y^1 \right\} \right\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} \right).$$

  Sendo $T > T(x^0)$, segue pela desigualdade inversa (3.21), que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}\left\{ \phi^0, \phi^1 \right\} &\geq \frac{C}{2} \|\{\phi^0, \phi^1\}\|^2_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} - \frac{1}{2} \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \|\{y^0, y^1\}\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} \\ &\geq \left(\frac{1}{2} \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \right) \left(C \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} - \|\{y^0, y^1\}\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} \right), \end{aligned}$$

  ou seja,

$$\lim_{\|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \to \infty} \mathcal{J}\left\{ \phi^0, \phi^1 \right\} = \infty.$$

  Portanto $\mathcal{J}$ é coercivo.

Dessa forma, $\mathcal{J}$ tem um único mínimo $\left\{ \overline{\phi}^0, \overline{\phi}^1 \right\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. ■

Mostremos agora que o mínimo do funcional encontrado no teorema anterior nos fornece o controle de norma mínima desejado.

Teorema 3.2 *Seja* $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ *e suponha que* $\left\{ \overline{\phi}^0, \overline{\phi}^1 \right\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ *é o mínimo do funcional* $\mathcal{J}$. *Se* $\overline{\phi}$ *corresponde a solução de* (3.6) *com dados iniciais* $\left\{ \overline{\phi}^0, \overline{\phi}^1 \right\}$, *então* $v = \left. \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial \nu} \right|_{\Sigma_0}$ *é um controle tal que para dados iniciais* $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, *a solução* y *de* (3.1) *satisfaz* (3.2).

Prova: Se $\left\{\overline{\phi}^0, \overline{\phi}^1\right\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ é um mínimo do funcional $\mathcal{J}$, então

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{J}\left(\left\{\overline{\phi}^0, \overline{\phi}^1\right\} + h\left\{\phi^0, \phi^1\right\}\right) - \mathcal{J}\left\{\overline{\phi}^0, \overline{\phi}^1\right\}}{h} = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Sigma_0} \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial \nu} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} d\Gamma dt + \left\langle \left\{y^0, y^1\right\}, \left\{\phi^1, \phi^0\right\}\right\rangle \\
&= \int_{\Sigma_0} \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial \nu} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} d\Gamma dt + \int_\Omega y^0 \phi^1 dx - \left\langle y^1, \phi^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = 0,
\end{aligned}$$

para todo $\{\phi^0, \phi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, onde ϕ é solução de (3.6). Assim, pelo Lema 3.2, temos que $v = \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial \nu}$ é um controle tal que para dados iniciais $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, a solução y de (3.1) satisfaz (3.2). ■

A seguinte proposição mostra que se o controle v do problema (3.1) é obtido pela minimização do funcional, v é de norma mínima.

Proposição 3.1 *Seja $v = \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial \nu}$ o controle, tal que $\overline{\phi}$ é a solução do sistema* (3.6)*, cujos dados iniciais $\left\{\overline{\phi}^0, \overline{\phi}^1\right\}$ correspondem ao mínimo do funcional $\mathcal{J}$. Se $g \in L^2(\Sigma_0)$ é outro controle tal que para dados iniciais $\{y^1, y^0\} \in H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, a solução y de* (3.1) *satisfaz* (3.2)*, então*

$$\|v\|_{L^2(\Sigma_0)} \leq \|g\|_{L^2(\Sigma_0)}. \tag{3.27}$$

Prova: Considerando $\left\{\overline{\phi}^0, \overline{\phi}^1\right\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$, temos

$$\|v\|^2_{L^2(\Sigma_0)} = \int_{\Sigma_0} \left|\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma dt = -\int_\Omega y^0 \overline{\phi}^1 dx + \left\langle y^1, \overline{\phi}^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \tag{3.28}$$

Por outra parte, pelo Lema 3.2, para $g \in L^2(\Sigma_0)$, obtemos

$$\int_{\Sigma_0} \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial \nu} g d\Gamma dt = -\left\langle \left\{y^0, y^1\right\}, \left\{\overline{\phi}^1, \overline{\phi}^0\right\}\right\rangle = -\int_\Omega y^0 \overline{\phi}^1 dx + \left\langle y^1, \overline{\phi}^0 \right\rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)}. \tag{3.29}$$

Assim, por (3.28) e (3.29), obtemos

$$\|v\|^2_{L^2(\Sigma_0)} = \int_{\Sigma_0} \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial \nu} g d\Gamma dt \leq \|g\|_{L^2(\Sigma_0)} \left\|\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial \nu}\right\|_{L^2(\Sigma_0)} = \|g\|_{L^2(\Sigma_0)} \|v\|_{L^2(\Sigma_0)},$$

o que mostra (3.27). ■

3.1.2 Controlabilidade Exata Interna

Nosso objetivo nesta seção é estudar o problema de controlabilidade exata quando a ação ocorre no interior do domínio.

Seja ω um subconjunto aberto de Ω e 1_ω sua função característica. Consideremos o problema

$$\left| \begin{array}{ll} y'' - \Delta y = h1_\omega & \text{em} \quad Q, \\ y = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ y(0) = y^0, \quad y'(0) = y^1 & \text{em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{3.30}$$

A ação ocorre no cilindro $\omega \times (0,T)$ contido em $Q = \Omega \times (0,T)$.

1. **Formulação do problema**

Dado $T > 0$ suficientemente grande, achar um espaço de Hilbert H tal que para todo par de dados iniciais $\{y^0, y^1\} \in H$, exista um controle $h \in L^2(\omega \times (0,T))$ tal que a solução $y = y(x,t,h)$ de (3.30) satisfaça

$$y(x,T,h) = 0 \quad \text{e} \quad y'(x,T,h) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{3.31}$$

2. **Descrição de HUM**

- *Primeiro Passo*

Dado $\{\phi^0, \phi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$, consideremos o problema

$$\left| \begin{array}{ll} \phi'' - \Delta \phi = 0 & \text{em} \quad Q, \\ \phi = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ \phi(0) = \phi^0, \quad \phi'(0) = \phi^1 & \text{em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{3.32}$$

Sabemos pelos resultados obtidos na Seção 2.1 que este problema tem única solução forte $\phi = \phi(x,t)$.

- *Segundo Passo*

Consideremos o problema

$$\left| \begin{array}{lll} \psi'' - \Delta\psi = \phi 1_\omega & \text{em} & Q, \\ \psi = 0 & \text{sobre} & \Sigma, \\ \psi(T) = 0, \quad \psi'(T) = 0 & \text{em} & \Omega. \end{array} \right. \tag{3.33}$$

Para a solução ψ de (3.33), definamos a aplicação

$$\Lambda\left\{\phi^0, \phi^1\right\} = \left\{\psi'(0), -\psi(0)\right\}. \tag{3.34}$$

- Terceiro Passo

Multiplicando ambos os lados de $(3.32)_1$ pela solução ψ de (3.33) e integrando em Q, temos

$$\int_0^T \int_\Omega \phi''\psi dxdt - \int_0^T \int_\Omega \Delta\phi\psi dxdt = 0. \tag{3.35}$$

Como $(\phi', \psi)' = (\phi'', \psi) + (\phi', \psi')$ obtemos:

$$(\phi'(T), \psi'(T)) - (\phi'(0), \psi'(0)) = \int_0^T (\phi'', \psi)\, dt + \int_0^T (\phi', \psi')\, dt.$$

Sendo $\psi(T) = 0$, por ψser a solução de (3.33), segue que

$$-\left(\phi^1, \psi(0)\right) - \int_0^T (\phi', \psi')\, dt = \int_0^T (\phi'', \psi)\, dt. \tag{3.36}$$

Como $(\phi, \psi')' = (\phi', \psi') + (\phi, \psi'')$, integrando por partes em $(0, T)$, obtemos

$$(\phi(T), \psi'(T)) - (\phi(0), \psi'(0)) = \int_0^T (\phi', \psi')\, dt + \int_0^T (\phi, \psi'')\, dt.$$

Desde que $\psi'(T) = 0$, segue da última igualdade que

$$-(\phi(0), \psi'(0)) - \int_0^T (\phi, \psi'')\, dt = \int_0^T (\phi', \psi')\, dt. \tag{3.37}$$

Substituindo (3.37) em (3.36), temos

$$-\left(\phi^1, \psi(0)\right) + (\phi(0), \psi'(0)) + \int_0^T (\phi, \psi'')\, dt = \int_0^T (\phi'', \psi)\, dt. \tag{3.38}$$

Por outra parte, como $\psi = 0$ e $\phi = 0$ sobre Σ, obtemos, pela fórmula de Green, que

$$\int_0^T \int_\Omega \Delta\phi\psi dxdt = \int_0^T \int_\Omega \phi\Delta\psi dxdt. \tag{3.39}$$

Substitiundo (3.39) e (3.38) em (3.35), temos

$$-\left(\phi^1, \psi(0)\right) + \left(\phi^0, \psi'(0)\right) + \int_0^T (\phi, \psi'')\, dt - \int_0^T \int_\Omega \phi\Delta\psi dxdt = 0, \tag{3.40}$$

ou seja,

$$-\left(\phi^1, \psi(0)\right) + \left(\phi(0), \psi'(0)\right) + \int_0^T \int_\omega \phi^2 dxdt = 0, \tag{3.41}$$

pois $\psi'' - \Delta\psi = \phi 1_\omega$ em Q.

Por (3.34) e (3.41) resulta que

$$\left\langle \Lambda\left\{\phi^0, \phi^1\right\}, \left\{\phi^0, \phi^1\right\}\right\rangle = \left\langle \left\{\psi'(0), -\psi(0)\right\}, \left\{\phi^0, \phi^1\right\}\right\rangle = \int_0^T \int_\omega \phi^2 dxdt. \tag{3.42}$$

Definamos em $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ a seminorma

$$\left\|\left\{\phi^0, \phi^1\right\}\right\|_F^2 = \int_0^T \int_\omega \phi^2 dxdt. \tag{3.43}$$

Pelo Teorema de Unicidade de Holmgren (ver [16]), existe $T_0 = T_0(\omega) > 0$, tal que para todo $T > T_0$ a única solução ϕ de (3.32) tal que $\phi \equiv 0$ em $\omega \times (0, T)$ é $\phi \equiv 0$. Logo, para $T > T_0$, a forma quadrática (3.43) é uma norma em $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$.

Representaremos por F o espaço de Hilbert dado pelo completamento de $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ com respeito à norma definida em (3.43).

A norma (3.43) induz em $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ o produto interno

$$\left(\left\{\phi^0, \phi^1\right\}, \left\{r^0, r^1\right\}\right)_F = \int_0^T \int_\omega \phi r dxdt,$$

onde r é a solução de (3.32) correspondente ao dado inicial $\{r^0, r^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$.

Consideremos a forma bilinear

$$\left\langle \Lambda\left\{\phi^0, \phi^1\right\}, \left\{r^0, r^1\right\}\right\rangle = \int_0^T \int_\omega \phi r dxdt,$$

definida em $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$, a qual é contínua e coerciva em $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$. Então essa extensão, por continuidade ao completamento F também é contínua e coerciva em F. Dessa forma segue do Lema de Lax Milgram (Lema 1.5) que, dado $\{-y^0, y^1\} \in F'$, existe um único $\{\phi^0, \phi^1\} \in F$ tal que

$$\left\langle \Lambda \left\{\phi^0, \phi^1\right\}, \left\{r^0, r^1\right\}\right\rangle = \left\langle \left\{-y^0, y^1\right\}, \left\{r^0, r^1\right\}\right\rangle_{F' \times F}, \quad \forall \ \left\{r^0, r^1\right\} \in F. \tag{3.44}$$

Assim para $\{-y^0, y^1\} \in F'$, existe $\{\phi^0, \phi^1\} \in F$ tal que

$$\Lambda \left\{\phi^0, \phi^1\right\} = \left\{-y^0, y^1\right\} \text{ em } F'. \tag{3.45}$$

Por (3.45) e (3.34) concluimos que $\psi(0) = y^0$ e $\psi'(0) = y^1$, onde ψ é a solução de (3.33).

Assim, considerando h como sendo a restrição de ϕ a $\omega \times (0, T)$, segue pela unicidade de solução que y satisfaz (3.31).

Faremos agora a caracterização concreta de F. Na verdade mostraremos que $F = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. De fato,

(i) $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \subset F$.

Considerando $\phi^0 \in L^2(\Omega)$ e $\phi^1 \in H^{-1}(\Omega)$, temos pelo Teorema 2.8, que (3.32) tem única solução ultra fraca e, além disso, vale a desigualdade

$$\int_0^T \int_\omega \phi^2 dxdt \leq C\left(\left|\phi^0\right|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\phi^1\right\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\right) = C\left\|\left\{\phi^0, \phi^1\right\}\right\|^2_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}. \tag{3.46}$$

Como F é o completamento de $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ com respeito à norma definida em (3.43), segue que $\{\phi^0, \phi^1\} \in F$.

(ii) $F \subset L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

Consideremos $\{\phi^0, \phi^1\} \in F$. Para $T > T(x^0)$, existe $C > 0$ tal que a desigualdade inversa

$$C\left\|\left\{\phi^0, \phi^1\right\}\right\|^2_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} \leq \int_0^T \int_\omega \phi^2 dxdt \tag{3.47}$$

é verdadeira, ver Apêndice B (Teorema B.2). Logo pela definição de F, temos que $\{\phi^0, \phi^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

Por (i) e (ii) concluimos a equivalência das normas $\|\cdot\|_F$ e $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}$ e identificamos F e seu dual F' com $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ e $L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ respectivamente. Assim, dados $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, existe um único par de dados iniciais $\{\phi^0, \phi^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ que associa à solução ultra fraca ϕ do problema (3.32). Temos ainda que, sendo o controle h a restrição de ϕ a $\omega \times (0,T)$, a regularidade da solução ultra fraca provada no Teorema 2.9 nos permite dizer que $h \in L^2(\omega \times (0,T))$.

Problema de Minimização

No ponto anterior mostramos que para todo par de dados iniciais $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, existe um controle $h \in L^2(\omega \times (0,T))$, tal que a solução $y = y(x,t,h)$ de (3.30) cumpre a condição do equilíbrio (3.31).

Vamos agora mostrar como o problema de contrabilidade exata interna se reduz a um problema de minimização.

Lema 3.3 *Seja ϕ solução do sistema* (3.32) *com dados iniciais* $\{\phi^0, \phi^1\} \in L^2(\Omega) \times H^-(\Omega)$. *Então para dados iniciais* $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, *a solução y de* (3.30), *satisfaz* (3.31) *se, e somente se, existe $h \in L^2(\omega \times (0,T))$ tal que*

$$\int_0^T \int_\omega \phi h dx dt = \left\langle \phi^1, y^0 \right\rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} - \left(\phi^0, y^1\right).$$

Prova: Suponhamos $\{y^0, y^1\}, \{\phi^0, \phi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ e $h \in \mathcal{D}(\omega \times (0,T))$. Multiplicando $(3.30)_1$ por ϕ e integrando em Q temos

$$\int_\Omega \int_0^T \phi\left(y'' - \Delta y\right) dt dx = 0.$$

Integrando por partes

$$\int_\Omega \int_0^T \phi\left(y'' - \Delta y\right) dt dx = \int_\Omega \left(\phi y' - \phi' y\right) dx \Big|_0^T + \int_0^T \int_\Omega y\left(\phi'' - \Delta \phi\right) dx dt$$
$$= \int_\Omega \left[\phi(T) y'(T) - \phi'(T) y(T)\right] dx - \int_\Omega \left[\phi(0) y^1 - \phi'(0) y^0\right] dx = 0.$$

Logo para algum $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $\{\phi^0, \phi^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$,

$$\int_0^T \int_\omega \phi h dx dt = -\langle \phi'(T), y(T) \rangle + \int_\Omega \phi(T) y'(T) dx + \langle \phi^1, y^0 \rangle - \int_\Omega \phi^0 y^1 dx. \tag{3.48}$$

Portanto, segue de (3.48) que y satisfaz (3.31) se, e somente se,

$$\int_0^T \int_\omega \phi h dx dt = \langle \phi^1, y^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega \phi^0 y^1 dx,$$

o que conclui a prova do resultado. ∎

Considerando a dualidade entre $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ e $L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ definida em (3.23), o lema anterior pode ser reformulado da seguinte maneira:

Lema 3.4 *Seja ϕ solução do sistema* (3.32) *com dados iniciais* $\{\phi^0, \phi^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. *Então para dados iniciais $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, a solução y de* (3.30) *satisfaz* (3.31) *se, e somente se, existe $h \in L^2(\omega \times (0, T))$ tal que*

$$\int_0^T \int_\omega \phi h dx dt + \left\langle \left\{\phi^0, \phi^1\right\}, \left\{y^1, y^0\right\} \right\rangle = 0. \tag{3.49}$$

Observe que, de acordo com (3.49), a propriedade da controlabilidade pode ser transferida a encontrar pontos críticos do funcional $\mathcal{J} : L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por:

$$\mathcal{J}\left\{\phi^0, \phi^1\right\} = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega |\phi|^2 dx dt + \left\langle \left\{\phi^0, \phi^1\right\}, \left\{y^1, y^0\right\} \right\rangle, \tag{3.50}$$

onde ϕ é a solução do sistema (3.32) com dados iniciais $\{\phi^0, \phi^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. Desse modo, consideremos o seguinte resultado:

Teorema 3.3 *Seja $T > T(x^0)$. Então o funcional $\mathcal{J}$ possui um único mínimo* $\left\{\overline{\phi}^0, \overline{\phi}^1\right\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

Prova: Pelo Teorema 1.11, para afimar a existência de um único mínimo para o funcional, devemos provar que $\mathcal{J}$ é semicontínuo inferiormente, estritamente convexo e coercivo.

- $\mathcal{J}$ é semicontínuo inferiormente.

Da desigualdade direta (3.46) obtemos

$$\mathcal{J}\left\{\phi^0,\phi^1\right\} \leq \frac{1}{2}C\left\|\left\{\phi^0,\phi^1\right\}\right\|^2_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} + \left\langle\left\{\phi^0,\phi^1\right\},\left\{y^1,y^0\right\}\right\rangle$$

e, portanto,

$$\mathcal{J}\left\{\phi^0,\phi^1\right\} \leq \frac{C}{2}\left\|\left\{\phi^0,\phi^1\right\}\right\|^2_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} + \left\|\left\{\phi^0,\phi^1\right\}\right\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}\left\|\left\{y^0,y^1\right\}\right\|_{H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega)}. \tag{3.51}$$

Logo de (3.51), deduzimos a continuidade do funcional $\mathcal{J}$, e, consequentemente, sua semicontinuidade inferior.

- $\mathcal{J}$ é estritamente convexo.

Sejam $\left\{\phi^0,\phi^1\right\},\left\{\psi^0,\psi^1\right\} \in L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$ e $\lambda\in(0,1)$. Logo

$$\begin{aligned}&\mathcal{J}\left(\lambda\left\{\phi^0,\phi^1\right\}+(1-\lambda)\left\{\psi^0,\psi^1\right\}\right)\\&=\lambda\mathcal{J}\left\{\phi^0,\phi^1\right\}+(1-\lambda)\mathcal{J}\left\{\psi^0,\psi^1\right\}-\frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\int_0^T\int_\omega|\phi-\psi|^2\,dxdt.\end{aligned}$$

Pela desigualdade inversa (3.47) temos

$$\int_0^T\int_\omega|\phi-\psi|^2\,dxdt \geq C\left\|\left\{\phi^0,\phi^1\right\}-\left\{\psi^0,\psi^1\right\}\right\|^2.$$

Assim para algum $\left\{\phi^0,\phi^1\right\}\neq\left\{\psi^0,\psi^1\right\}$ temos

$$\mathcal{J}\left(\lambda\left\{\phi^0,\phi^1\right\}+(1-\lambda)\left\{\psi^0,\psi^1\right\}\right) < \lambda\mathcal{J}\left\{\phi^0,\phi^1\right\}+(1-\lambda)\mathcal{J}\left\{\psi^0,\psi^1\right\}.$$

Logo $\mathcal{J}$ é estritamente convexo.

- $\mathcal{J}$ é coercivo.

De fato, como

$$\mathcal{J}\left\{\phi^0,\phi^1\right\} \geq \frac{1}{2}\left(\int_0^T\int_\omega|\phi|^2\,dxdt - \left\|\left\{\phi^0,\phi^1\right\}\right\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}\left\|\left\{y^0,y^1\right\}\right\|_{H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega)}\right).$$

Pela desigualdade inversa (3.47) obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}\left\{\phi^0,\phi^1\right\} &\geq \frac{C}{2}\left\|\left\{\phi^0,\phi^1\right\}\right\|^2_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} - \frac{1}{2}\left\|\left\{\phi^0,\phi^1\right\}\right\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}\left\|\left\{y^0,y^1\right\}\right\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \\
&\geq \left(\frac{1}{2}\left\|\left\{\phi^0,\phi^1\right\}\right\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}\right)\left(C\left\|\left\{\phi^0,\phi^1\right\}\right\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} - \left\|\left\{y^0,y^1\right\}\right\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}\right),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{\|(\phi^0,\phi^1)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}\to\infty} \mathcal{J}\left\{\phi^0,\phi^1\right\} = \infty.$$

e, portanto, $\mathcal{J}$ é coercivo.

Dessa forma tem $\mathcal{J}$ um único mínimo $\left\{\overline{\phi}^0,\overline{\phi}^1\right\} \in L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$. ■

Mostremos agora que o mínimo do funcional encontrado no teorema anterior nos fornece o controle de norma mínima desejado.

Teorema 3.4 *Seja* $\left\{\overline{\phi}^0,\overline{\phi}^1\right\} \in L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$ *o mínimo do funcional* $\mathcal{J}$*. Se* $\overline{\phi}$ *corresponde a solução de* (3.32) *com dados iniciais* $\left\{\overline{\phi}^0,\overline{\phi}^1\right\}$, *então* $h = \left.\overline{\phi}\right|_\omega$ *é um controle tal que para dados iniciais* $\left\{y^0,y^1\right\} \in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, *a solução* y *de* (3.30), *satisfaz* (3.31).

Prova: Se $\left\{\overline{\phi}^0,\overline{\phi}^1\right\} \in L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$ é um mínimo do funcional $\mathcal{J}$, então

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathcal{J}\left(\left\{\overline{\phi}^0,\overline{\phi}^1\right\} + h\left\{\phi^0,\phi^1\right\}\right) - \mathcal{J}\left\{\overline{\phi}^0,\overline{\phi}^1\right\}}{h} = 0.$$

Logo,

$$\int_0^T\int_\omega \overline{\phi}\phi dxdt + + \int_\Omega y^1\phi^0 dx - \left\langle \phi^1, y^0\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = 0,$$

para algum $\left\{\phi^0,\phi^1\right\} \in L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$, onde ϕ é solução de (3.32). Assim pelo Lema 3.4, temos que $h = \left.\overline{\phi}\right|_\omega$ é um controle tal que para dados iniciais $\left\{y^0,y^1\right\} \in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, a solução y de (3.30) satisfaz (3.31). ■

A seguinte proposição mostra que o controle h obtido pela minimização do funcional é de norma mínima.

Proposição 3.2 *Seja* $h = \left.\overline{\phi}\right|_\omega$ *o controle tal que* $\overline{\phi}$ *é a solução do sistema* (3.32), *cujos dados iniciais* $\left\{\overline{\phi}^0,\overline{\phi}^1\right\}$ *correspondem ao mínimo do funcional* $\mathcal{J}$*. Se* $g \in L^2(\omega\times(0,T))$ *é* *outro controle tal que para dados iniciais* $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, *a solução* y *de* (3.30) *satisfaz* (3.31). *Então*

$$\|h\|_{L^2(\Sigma_0)} \leq \|g\|_{L^2(\Sigma_0)}. \tag{3.52}$$

Prova: Seja $\left\{\overline{\phi}^0, \overline{\phi}^1\right\}$ o mínimo do funcional $\mathcal{J}$. Considerando $\left\{\overline{\phi}^0, \overline{\phi}^1\right\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$, temos

$$\|h\|^2_{L^2(\omega\times(0,T))} = \int_0^T \int_\omega \left|\overline{\phi}\right|^2 dxdt = \left\langle \overline{\phi}^1, y^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega)H_0^1(\Omega),} - \int_\Omega \overline{\phi}^0 y^1 dx. \tag{3.53}$$

Pelo Lema 3.4, para $g \in L^2(\omega \times (0,T))$ obtemos

$$\int_0^T \int_\omega g\overline{\phi} dxdt = -\left\langle \left\{\overline{\phi}^0, \overline{\phi}^1\right\}, \left\{y^1, y^0\right\} \right\rangle = -\int_\Omega \overline{\phi}^0 y^1 dx + \left\langle \overline{\phi}^1, y^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \tag{3.54}$$

Assim, por (3.53) e (3.54) , obtemos

$$\begin{aligned} \|h\|^2_{L^2(\omega\times(0,T))} &= \int_0^T \int_\omega g\overline{\phi} dxdt \\ &\leq \|g\|_{L^2(\omega\times(0,T))} \left\|\overline{\phi}\right\|_{L^2(\omega\times(0,T))} = \|g\|_{L^2(\omega\times(0,T))} \|h\|_{L^2(\omega\times(0,T))}, \end{aligned}$$

o que mostra (3.52). ■

3.2 Controlabilidade Aproximada

Outro tipo de controlabilidade que podemos analisar para a equação linear da onda é a controlabilidade aproximada, à qual é uma consequência da controlabilidade exata. Na presente seção estudaremos quando os sistemas (3.1) e (3.30) são aproximadamente controláveis. Inicialmente, formularemos os problemas de minimização que serão abordados fazendo uso do método de dualidade no sentido de Fenchel e, em seguida, enunciaremos os teoremas que nos garantem a controlabilidade aproximada dos sistemas.

3.2.1 Controlabilidade Aproximada na Fronteira

Nosso objetivo nesta seção é estudar o problema de controlabilidade aproximada para o sistema (3.1). Aqui vamos considerar os dados iniciais nulos, ou seja, $\{y^0, y^1\} = \{0, 0\}$. Notemos que não perdemos a generalidade, visto que o sistema é linear.

Definição 3.1 *Dizemos que* (3.1) *é aproximadamente controlável se, para todo* $\varepsilon > 0$ *e* $\{z^0, z^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, *existe* $v \in L^2(\Sigma_0)$, *tal que a solução* $y = y(x,t,v)$ *do sistema* (3.1) *com dados iniciais* $\{y^0, y^1\} = \{0, 0\}$, *satisfaz*

$$\left\| \{y(T), y'(T)\} - \left\{z^0, z^1\right\} \right\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} \leq \varepsilon. \tag{3.55}$$

Consideremos $\{z^0, z^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ e definamos B_0 como sendo a bola unitária de $L^2(\Omega)$ e B_1 a bola unitária de $H^{-1}(\Omega)$. Provar que o sistema (3.1) é aproximadamente controlável é equivalente a mostrar que para quaisquer $\alpha_0, \alpha_1 > 0$, existe $v \in L^2(\Sigma_0)$, tal que a solução y de (3.1) satisfaz

$$y(T) \in z^0 + \alpha_0 B_0 \quad \text{e} \quad y'(T) \in z^1 + \alpha_1 B_1. \tag{3.56}$$

Além de querermos provar a existência de um controle $v \in L^2(\Sigma_0)$ de modo que a solução y de (3.1) satisfaça (3.55), queremos também mostrar que esse controle é de norma mínima. Assim, antes de enunciamos o teorema que garante a controlabilidade aproximada para (3.1), no sentido da Definição 3.1, formularemos um problema de minimização, de forma que apareça naturalmente um funcional custo que nos forneça o controle desejado. Aqui seguiremos os mesmos argumentos usados em Lions [20].

1. **Formulação do Problema de Minimização**

Seja $\delta(\Omega, \Gamma_0) = \sup\limits_{x\in\Omega} dist\{x, \Gamma_0\}$. Consideremos o problema de minimização:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Dados } \{z^0, z^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega),\ \alpha_0, \alpha_1 > 0,\ T > T_0 = 2\delta(\Omega, \Gamma_0), \\ \text{achar } \inf \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{\Sigma_0} v^2 d\Sigma \text{ entre todos os } v's \text{ que acarretam } (3.56). \end{array} \right. \tag{3.57}$$

Observação 3.4 *Notemos que:*

(i) Se $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, o problema (3.57) é igual ao problema de controlabilidade exata.

(ii) Para $\varepsilon > 0$, o problema (3.57) pode também ser formulado por

$$\left| \begin{array}{l} \text{Dados } \{z^0, z^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega), \ \varepsilon > 0, \ T > T_0 = 2\delta(\Omega, \Gamma_0), \\ \text{achar } \inf \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\Sigma_0} v^2 d\Sigma \text{ entre todos os } v's \text{ que acarretam } (3.55). \end{array} \right. \tag{3.58}$$

2. **Método de Dualidade**

Consideremos o operador linear e contínuo $L : L^2(\Sigma_0) \to L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ que leva v em $\{y(T,v), y'(T,v)\}$ e definamos o operador adjunto $L^* : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \to L^2(\Sigma_0)$ que leva $\{a^1, a^0\}$ em $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\big|_{\Sigma_0}$, onde φ é a solução de

$$\left| \begin{array}{ll} \varphi'' - \Delta\varphi = 0 & \text{em} \quad Q, \\ \varphi = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ \varphi(T) = -a^0, \ \varphi'(T) = a^1 & \text{em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{3.59}$$

Vejamos agora que o operador adjunto L^* é bem definido. De fato, se $\{a^0, a^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ então $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \in L^2(\Sigma)$. Assim $\{a^1, a^0\} \mapsto \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\big|_{\Sigma_0}$ define um operador, o qual é linear e contínuo de $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ em $L^2(\Sigma_0)$.

Multiplicando $(3.59)_1$ por y (solução de (3.1) com $y^0 = y^1 = 0$) e integrando formalmente em Q, obtemos

$$\int_\Omega y'(T), \varphi(T)\, dx - \int_\Omega y(T), \varphi'(T)\, dx + \int_{\Sigma_0} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} v d\Sigma = 0.$$

Sendo $\{a^0, a^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $\{y(T), y'(T)\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, temos por (3.23) que

$$\int_{\Sigma_0} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} v d\Sigma = \left\langle \{y(T), y'(T)\}, \left\{a^1, -a^0\right\} \right\rangle = \left\langle Lv, \left\{a^1, -a^0\right\} \right\rangle = \left(v, L^* \left\{a^1, -a^0\right\}\right)_{L^2(\Sigma)}.$$

Assim

$$L^* \left\{a^1, -a^0\right\} = \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}.$$

Introduzamos agora dois funcionais:

$$F(v) = \frac{1}{2}\int_{\Sigma_0} v^2 d\Sigma \quad \text{sobre} \quad L^2(\Sigma_0)$$

e

$$G\left(\left\{f^0,f^1\right\}\right)=\begin{cases}0, & \text{se } f^0\in z^0+\alpha_0 B_0 \quad \text{e} \quad f^1\in z^1+\alpha_1 B_1,\\ \infty, & \text{de outro modo.}\end{cases}$$

Com estas notações o problema (3.57) pode ser formulado como segue

$$\left|\text{Achar } \inf_v \left\{F(v)+G(Lv)\right\},\ v\in L^2(\Sigma_0)\,.\right. \tag{3.60}$$

Aplicaremos agora a teoria de dualidade no sentido de Fenchel.

Pelo Teorema de Fenchel (Teorema 1.12), com $f=F$, $g=G$, $A=L$, temos

$$\inf_v \left\{F(v)+G(Lv)\right\}=-\inf_v\left\{F^*\left(-L^*\left\{a^1,-a^0\right\}\right)+G^*\left(\left\{a^1,-a^0\right\}\right)\right\}, \tag{3.61}$$

com $\{a^0,a^1\}\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, onde

$$F^*(v)=\sup_v\Big\{(v,v)_{L^2(\Sigma)}-F(v)\Big\}=F(v).$$

Temos, também que

$$\begin{aligned}G^*\left(\left\{a^1,-a^0\right\}\right)&=\sup_{\{f^0,f^1\}}\left\{\left\langle\left\{a^1,-a^0\right\},\left\{f^0,f^1\right\}\right\rangle-G\left(\left\{f^0,f^1\right\}\right)\right\}\\ &=\sup_{\{f^0,f^1\}}\Big\{\left(a^1,f^0\right)+\left\langle f^1,a^0\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}-G\left(\left\{f^0,f^1\right\}\right)\Big\}\\ &=\sup_{B^0\times B^1}\Big\{\left(a^1,z^0+\alpha_0B_0\right)+\left\langle z^1+\alpha_1B_1,a^0\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\Big\}\\ &=\left(a^1,z^0\right)+\sup_{B^0}\left(a^1,\alpha_0B_0\right)+\left\langle z^1,a^0\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}+\sup_{B^1}\left\langle\alpha_1B_1,a^0\right\rangle\\ &=\left(a^1,z^0\right)+\alpha_0\left|a^1\right|+\left\langle z^1,a^0\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}+\alpha_1\left\|a^0\right\|.\end{aligned}$$

Fazendo $\rho^0=-a^0$, $\rho^1=a^1$, e considerando ρ a solução do sistema

$$\left|\begin{array}{ll}\rho''-\Delta\rho=0 & \text{em} \quad Q,\\ \rho=0 & \text{sobre} \quad \Sigma,\\ \rho(T)=\rho^0, \quad \rho'(T)=\rho^1 & \text{em} \quad \Omega,\end{array}\right. \tag{3.62}$$

podemos reescrever (3.61) por

$$\inf_v \{F(v) + G(Lv)\} = -\left[\inf_{L^2(\Sigma)} F^*\left(-\frac{\partial \rho}{\partial \nu}\right) + (\rho^1, z^0) - \langle z^1, \rho^0\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \alpha_0 |\rho^1| + \alpha_1 \|\rho^0\|\right]$$

$$= -\left[\inf_{L^2(\Sigma)} F\left(-\frac{\partial \rho}{\partial \nu}\right) + (\rho^1, z^0) - \langle z^1, \rho^0\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \alpha_0 |\rho^1| + \alpha_1 \|\rho^0\|\right]$$

$$= -\left[\inf_{L^2(\Sigma)} \frac{1}{2}\int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \nu}\right)^2 d\Sigma + (\rho^1, z^0) - \langle z^1, \rho^0\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \alpha_0 |\rho^1| + \alpha_1 \|\rho^0\|\right].$$

Considerando o funcional

$$\mathcal{J}\left\{\rho^0, \rho^1\right\} = \frac{1}{2}\int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \nu}\right)^2 d\Sigma + \left(\rho^1, z^0\right) - \left\langle z^1, \rho^0\right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \alpha_0 \left|\rho^1\right| + \alpha_1 \left\|\rho^0\right\|,$$

temos que

$$\inf_v \{F(v) + G(Lv)\} = -\inf_{\{\rho^0, \rho^1\}} \mathcal{J}\left\{\rho^0, \rho^1\right\}. \tag{3.63}$$

Para $\varepsilon > 0$, reescrevamos o funcional $\mathcal{J}\{\rho^0, \rho^1\}$ como sendo

$$\mathcal{J}_\varepsilon\left\{\rho^0, \rho^1\right\} = \frac{1}{2}\int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \nu}\right)^2 d\Sigma + \left(\rho^1, z^0\right) - \left\langle z^1, \rho^0\right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \varepsilon \left\|\left\{\rho^0, \rho^1\right\}\right\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}. \tag{3.64}$$

Mostremos, por medio do Teorema 1.11, que o funcional $\mathcal{J}_\varepsilon$ atinge um mínimo $\{\hat{\rho}^0, \hat{\rho}^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

- $\mathcal{J}_\varepsilon$ é semicontínuo inferiormente.

De fato, consideremos uma sequência $(\{\rho_n^0, \rho_n^1\})$ em $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, tal que

$$\left\{\rho_n^0, \rho_n^1\right\} \to \left\{\rho^0, \rho^1\right\} \text{ forte em } H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega). \tag{3.65}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja ρ_n a solução de (3.62) associada aos dados $\{\rho_n(\cdot, T), \rho_n'(\cdot, T)\} = \{\rho_n^0, \rho_n^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Assim, $\psi_n = \rho_n - \rho$ é solução do seguinte sistema:

$$\left|\begin{array}{l} \psi_n'' - \Delta\psi_n = 0 \quad \text{em} \quad Q, \\ \psi_n = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \\ \psi_n(\cdot, T) = \rho_n^0 - \rho^0, \quad \psi_n'(\cdot, T) = \rho_n^1 - \rho^1 \quad \text{em} \quad \Omega. \end{array}\right. \tag{3.66}$$

Pelo Teorema 2.7, a solução ψ_n de (3.66) sartisfaz a desigualdade direta:

$$\int_{\Sigma_0} \left| \frac{\partial \psi_n}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt \leq C \left(\left\| \rho_n^0 - \rho^0 \right\| + \left| \rho_n^1 - \rho^1 \right| \right). \tag{3.67}$$

Segue de (3.65) e (3.67) que $\int_{\Sigma_0} \left| \frac{\partial \rho_n}{\partial \nu} (x,t) - \frac{\partial \rho}{\partial \nu} (x,t) \right|^2 dxdt \to 0$, quando $n \to \infty$, provando assim a continuidade do funcional $\mathcal{J}$ e, portanto, sua semicontinuidade inferior.

- $\mathcal{J}_\varepsilon$ é estritamente convexo.

Sejam $\lambda \in (0,1)$ e $\{\rho^0, \rho^1\}, \{q^0, q^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.Assim

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}_\varepsilon \{\lambda \{\rho^0, \rho^1\} + (1-\lambda)\{q^0, q^1\}\} = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial (\lambda \rho + (1-\lambda) q)}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma + (\lambda \rho^1 + (1-\lambda) q^1, z^0) \\
&- \langle z^1, \lambda \rho^0 + (1-\lambda) q^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \varepsilon \left\| (\lambda \rho^1 + (1-\lambda) q^1, \lambda \rho^0 + (1-\lambda) q^0) \right\| \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial (\lambda \rho + (1-\lambda) q)}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma + \lambda \left[(\rho^1, z^0) - \langle z^1, \rho^0 \rangle + \varepsilon \left\| (\rho^0, \rho^1) \right\| \right] \\
&+ (1-\lambda) \left[(q^1, z^0) - \langle z^1, q^0 \rangle + \varepsilon \left\| (q^0, q^1) \right\| \right].
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial (\lambda \rho + (1-\lambda) q)}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma = \frac{\lambda^2}{2} \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma + \lambda (1-\lambda) \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \nu} \right) \left(\frac{\partial q}{\partial \nu} \right) d\Sigma \\
&+ \frac{(1-\lambda)^2}{2} \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial q}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma \leq \frac{\lambda^2}{2} \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma + \frac{(1-\lambda)^2}{2} \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma \\
&+ \frac{\lambda^2}{2} \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial q}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma + \frac{(1-\lambda)^2}{2} \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial q}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma \leq \frac{\lambda^2}{2} \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma + \frac{(1-\lambda)^2}{2} \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial q}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma.
\end{aligned}$$

Logo substituindo em (3.68), obtemos

$$\mathcal{J}_\varepsilon \left\{ \lambda \left\{ \rho^0, \rho^1 \right\} + (1-\lambda) \left\{ q^0, q^1 \right\} \right\} < \lambda \mathcal{J}_\varepsilon \left\{ \rho^0, \rho^1 \right\} + (1-\lambda) \mathcal{J}_\varepsilon \left\{ q^0, q^1 \right\},$$

o que garante a convexidade de $\mathcal{J}_\varepsilon$.

- $\mathcal{J}_\varepsilon$ é coercivo.

Seja $\left(\left\{\rho_j^0, \rho_j^1\right\}\right)_{j\geq 1}$ uma sequência de dados iniciais em $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ para o sistema (3.62) tal que $\left\|\left\{\rho_j^0, \rho_j^1\right\}\right\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \to \infty$. Normalizando temos

$$\left\{\hat{\rho}_j^0, \hat{\rho}_j^1\right\} = \frac{\left\{\rho_j^0, \rho_j^1\right\}}{\left\|\left\{\rho_j^0, \rho_j^1\right\}\right\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}},$$

onde ρ é solução de (3.62). Logo

$$\frac{\mathcal{J}_\varepsilon\left\{\rho_j^0, \rho_j^1\right\}}{\left\|\left\{\rho_j^0, \rho_j^1\right\}\right\|} = \frac{1}{2}\left\|\left\{\rho_j^0, \rho_j^1\right\}\right\| \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \hat{\rho}_j}{\partial \nu}\right)^2 d\Sigma + \left\langle \left\{z^0, z^1\right\}, \left\{\hat{\rho}_j^0, \hat{\rho}_j^1\right\}\right\rangle + \varepsilon,$$

onde $\hat{\rho}_j$ é solução de (3.62) com dados $\left\{\hat{\rho}_j^0, \hat{\rho}_j^1\right\}$. Notemos que dois casos podem ocorrer:

(i) Se $\underline{\lim}\int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \hat{\rho}_j}{\partial \nu}\right)^2 d\Sigma > 0$, então

$$\frac{\mathcal{J}_\varepsilon\left\{\rho_j^0, \rho_j^1\right\}}{\left\|\left\{\rho_j^0, \rho_j^1\right\}\right\|} \to \infty.$$

(ii) Se $\underline{\lim}\int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \hat{\rho}_j}{\partial \nu}\right)^2 d\Sigma = 0$. Sendo $\left(\left\{\hat{\rho}_j^0, \hat{\rho}_j^1\right\}\right)_{j\geq 1}$ limitada em $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, então, extraindo uma subsequência, podemos garantir que $\left(\left\{\hat{\rho}_j^0, \hat{\rho}_j^1\right\}\right)_{j\geq 1}$ coverge fracamente para $\{\psi^0, \psi^1\}$ em $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Além disso, se ψ é a solução de (3.62) com dado inicial $\{\psi(T), \psi'(T)\} = \{\psi^0, \psi^1\}$, então $\left(\left\{\hat{\rho}_j, \hat{\rho}_j'\right\}\right)_{j\geq 1}$ converge fracamente a $\{\psi, \psi'\}$ em $L^2(0,T; H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T; L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega))$. Assim $\left(\left\{\frac{\partial \hat{\rho}_j}{\partial \nu}, \frac{\partial \hat{\rho}_j'}{\partial \nu}\right\}\right)_{j\geq 1}$ converge fracamente a $\left\{\frac{\partial \psi}{\partial \nu}, \frac{\partial \psi'}{\partial \nu}\right\}$ e

$$\int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \nu}\right)^2 d\Sigma \leq \underline{\lim}\int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \hat{\rho}_j}{\partial \nu}\right)^2 d\Sigma = 0.$$

Assim $\frac{\partial \psi}{\partial \nu} = 0$ em Σ_0.

Para $T > T_0 = 2\delta(\Omega, \Gamma_0)$, existe uma constante $C > 0$, tal que cumpre-se a desigualdade inversa (3.21) para todo $\{\psi^0, \psi^1\}$ em $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ (ver Apêndice B). Logo $\{\psi^0, \psi^1\} = \{0, 0\}$ e, portanto,

$$\left\{\hat{\rho}_j^0, \hat{\rho}_j^1\right\} \to \{0, 0\} \text{ fraco em } H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Logo

$$\underline{\lim}\frac{\mathcal{J}_{\varepsilon}\left\{\rho_j^0,\rho_j^1\right\}}{\left\|\left\{\rho_j^0,\rho_j^1\right\}\right\|}=\underline{\lim}\left[\varepsilon+\left\langle\left\{z^0,z^1\right\},\left\{\hat{\rho}_j^0,\hat{\rho}_j^1\right\}\right\rangle\right]\geq\varepsilon,$$

ou seja,

$$\mathcal{J}_{\varepsilon}\left\{\rho^0,\rho^1\right\}\to\infty,\text{ quando }\left\|\left\{\rho^0,\rho^1\right\}\right\|\to\infty.$$

Assim, em ambos os casos (i) e (ii), $\mathcal{J}_{\varepsilon}$ é coercivo.

Dessa forma, podemos garantir que $\mathcal{J}_{\varepsilon}$ atinge um mínimo $\{\hat{\rho}^0,\hat{\rho}^1\}\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$.

Enunciaremos agora o teorema que garante a controlabilidade aproximada do sistema (3.1).

Teorema 3.5 *Seja $T>T_0=2\delta(\Omega,\Gamma_0)$. Então para todo $\varepsilon>0$ e dados $\{y^0,y^1\},\{z^0,z^1\}\in L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$, existe um controle $v\in L^2(\Sigma_0)$, tal que a solução y de (3.1) satisfaz (3.55). Além disso, $v=\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\nu}\big|_{\Sigma_0}$, onde $\hat{\rho}$ é a solução de (3.62) com dados $\{\hat{\rho}^0,\hat{\rho}^1\}\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ minimizando o funcional $\mathcal{J}_{\varepsilon}$ definido em (3.64).*

Prova: Mostramos anteriormente a existência de um mínimo $\{\hat{\rho}^0,\hat{\rho}^1\}\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ para o funcional $\mathcal{J}_{\varepsilon}$. Seja $\hat{\rho}$ a única solução fraca de (3.62) com dados iniciais $\{\hat{\rho}^0,\hat{\rho}^1\}$. Temos $\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\nu}\in L^2(\Sigma)$. Mostremos que $v=\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\nu}\big|_{\Sigma_0}$ é o controle de modo que a solução y de (3.1) satisfaça (3.55). De fato, para $h>0$ e $\{\rho^0,\rho^1\}\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}0&\leq\frac{1}{h}\left(\mathcal{J}_{\varepsilon}\left\{\left\{\hat{\rho}^0,\hat{\rho}^1\right\}+h\left\{\rho^0,\rho^1\right\}\right\}-\mathcal{J}_{\varepsilon}\left\{\hat{\rho}^0,\hat{\rho}^1\right\}\right)\\&\leq\int_{\Sigma_0}\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\nu}\frac{\partial\rho}{\partial\nu}d\Sigma+\frac{h}{2}\int_{\Sigma_0}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\nu}\right)^2d\Sigma+\left(\rho^1,z^0\right)-\left\langle z^1,\rho^0\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}+\varepsilon\left\|\left\{\rho^0,\rho^1\right\}\right\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

onde ρ é solução de (3.62) com dados $\{\rho^0,\rho^1\}$. Fazendo $h\to0$ na inequação anterior, deduzimos que

$$-\varepsilon\left\|\left\{\rho^0,\rho^1\right\}\right\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}\leq\int_{\Sigma_0}\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\nu}\frac{\partial\rho}{\partial\nu}d\Sigma+\left(\rho^1,z^0\right)-\left\langle z^1,\rho^0\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}.$$

Analogamente, para $h<0$, obtemos

$$\int_{\Sigma_0}\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\nu}\frac{\partial\rho}{\partial\nu}d\Sigma+\left(\rho^1,z^0\right)-\left\langle z^1,\rho^0\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\leq\varepsilon\left\|\left\{\rho^0,\rho^1\right\}\right\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}.$$

Logo para qualquer $\{\rho^0, \rho^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, temos

$$\left| \int_{\Sigma_0} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \nu} \frac{\partial \rho}{\partial \nu} d\Sigma + \left(\rho^1, z^0\right) - \left\langle z^1, \rho^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \right| \leq \varepsilon \left\| \left\{ \rho^0, \rho^1 \right\} \right\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}. \tag{3.69}$$

Sendo y solução ultra fraca de (3.1), no sentido da Definição 2.2, então, para ρ solução de (3.62), segue a seguinte identidade:

$$-\left\langle y(T), \rho^1 \right\rangle + \left\langle y'(T), \rho^0 \right\rangle - \int_{\Sigma} \frac{\partial \rho}{\partial \nu} y d\Gamma dt = 0. \tag{3.70}$$

Tendo em conta que $y|_{\Sigma_0} = v = \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \nu}\Big|_{\Sigma_0}$, concluimos que

$$\int_{\Sigma_0} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \nu} \frac{\partial \rho}{\partial \nu} d\Gamma dt = \left\langle y'(T), \rho^0 \right\rangle - \left\langle y(T), \rho^1 \right\rangle. \tag{3.71}$$

Dessa forma, substituindo (3.71) em (3.69), deduzimos que

$$\left| \left\langle y'(T), \rho^0 \right\rangle - \left\langle y(T), \rho^1 \right\rangle + \left(\rho^1, z^0\right) - \left\langle z^1, \rho^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \right| \leq \varepsilon \left\| \left\{ \rho^0, \rho^1 \right\} \right\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}$$

e, assim,

$$\left| \left\langle \left\{ \rho^0, \rho^1 \right\}, \left\{ z^0, z^1 \right\} - \left\{ y(T), y'(T) \right\} \right\rangle \right| \leq \varepsilon \left\| \left\{ \rho^0, \rho^1 \right\} \right\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}.$$

Logo (3.55) se cumpre. ■

3.2.2 Controlabilidade Aproximada Interna

Nosso objetivo nesta seção é estudar o problema de controlabilidade aproximada para o sistema (3.30). Sendo o sistema linear, vamos a considerar, sem perda de generalidade, os dados iniciais nulos.

Definição 3.2 *Dizemos que* (3.30) *é aproximadamente controlável se, para todo* $\varepsilon > 0$ *e* $\{z^0, z^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, *existe* $h \in L^2(\omega \times (0,T))$ *tal que a solução* $y = y(x,t,h)$ *do sistema* (3.30), *com dados iniciais* $\{y^0, y^1\} = \{0, 0\}$, *satisfaz*

$$\left\| \{y(T), y'(T)\} - \left\{ z^0, z^1 \right\} \right\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \leq \varepsilon. \tag{3.72}$$

Seja $\{z^0, z^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e definamos B_0 como sendo a bola unitária de $H_0^1(\Omega)$ e B_1 a bola unitária de $L^2(\Omega)$. Provar que o sistema (3.30) é aproximadamente controlável é equivalente a mostrar que para quaisquer $\alpha_0, \alpha_1 > 0$, existe $h \in L^2(\omega \times (0,T))$ tal que a solução y de (3.30) satisfaz

$$y(T) \in z^0 + \alpha_0 B_0 \quad \text{e} \quad y'(T) \in z^1 + \alpha_1 B_1. \tag{3.73}$$

Seguindo os mesmos argumentos usados em Lions [20], provaremos a existência de um controle $h \in L^2(\omega \times (0,T))$ de modo que a solução y de (3.30) satisfaça (3.72). Além disso mostraremos que esse controle é de norma mínima. Com esse objetivo formularemos um problema de minimização, para mostrar de forma natural a aparição do funcional custo que nos fornece o controle desejado. Em seguida enunciaremos o teorema que garante a controlabilidade aproximada para (3.30), no sentido da Definição 3.2.

1. **Formulação do Problema**

Seja $\delta(\Omega, \omega) = \sup\limits_{x \in \Omega} dist\{x, \omega\}$. Consideremos o problema de minimização:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Dados } \{z^0, z^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \ \alpha_0, \alpha_1 > 0, \ T > T_0 = 2\delta(\Omega, \omega), \\ \text{achar } \inf \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{\omega \times (0,T)} h^2 dxdt \text{ entre todos os } h's \text{ que acarretam } (3.73). \end{array} \right. \tag{3.74}$$

Observação 3.5 *Notemos que:*

(i) Se $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, o problema (3.74) é igual ao problema de controlabilidade exata.

(ii) Para $\varepsilon > 0$, o problema (3.74) pode também ser formulado como:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Dados } \{z^0, z^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \ \varepsilon > 0, \ T > T_0 = 2\delta(\Omega, \omega), \\ \text{achar } \inf \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{\omega \times (0,T)} h^2 dxdt \text{ entre todos os } h's \text{ que acarretam } (3.72). \end{array} \right. \tag{3.75}$$

2. **Método de Dualidade**

Consideremos o operador linear e contínuo $L : L^2(\omega \times (0,T)) \to L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ que leva h em $\{y'(T,h), y(T,h)\}$ e definamos o operador adjunto $L^* : L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \to L^2(\omega \times (0,T))$ que leva $\{a^0, a^1\}$ em $\varphi|_{\omega\times(0,T)}$, onde φ é a solução de

$$\left| \begin{array}{ll} \varphi'' - \Delta\varphi = 0 & \text{em} \quad Q, \\ \varphi = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ \varphi(T) = a^0,\ \varphi'(T) = -a^1 & \text{em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{3.76}$$

Introduzamos agora dois funcionais:

$$F(h) = \frac{1}{2}\int_{\omega\times(0,T)} h^2 dxdt \quad \text{sobre} \quad L^2(\omega \times (0,T))$$

e

$$G(\{f^0, f^1\}) = \begin{cases} 0, & \text{se } f^0 \in z^0 + \alpha_0 B_0 \quad \text{e} \quad f^1 \in z^1 + \alpha_1 B_1, \\ \infty, & \text{de outro modo.} \end{cases}$$

Com estas notações o problema (3.74) pode ser formulado como:

$$\left| \text{Achar} \inf_h \{F(h) + G(Lh)\},\ h \in L^2(\omega \times (0,T)). \right. \tag{3.77}$$

Aplicaremos agora a teoria de dualidade no sentido de Fenchel.

Pelo Teorema de Fenchel (Teorema 1.12), com $f = F$, $g = G$ e $A = L$, temos

$$\inf_h \{F(h) + G(Lh)\} = -\inf_h \left\{F^*\left(-L^*\left\{a^0, -a^1\right\}\right) + G^*\left(\left\{a^0, -a^1\right\}\right)\right\}, \tag{3.78}$$

com $\{a^0, a^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, onde

$$F^*(h) = \sup_h \left\{(h,h)_{L^2(Q)} - F(h)\right\} = F(h).$$

Temos também que

$$\begin{aligned} G^*\left(\left\{a^0, -a^1\right\}\right) &= \sup_{\{f^0,f^1\}} \left\{\left\langle \left\{a^0, -a^1\right\}, \left\{f^0, f^1\right\}\right\rangle - G\left(\left\{f^0, f^1\right\}\right)\right\} \\ &= \sup_{\{f^0,f^1\}} \left\{\left(a^0, f^0\right) + \left\langle a^1, f^1\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} - G\left(\left\{f^0, f^1\right\}\right)\right\} \\ &= \sup_{B^0\times B^1} \left\{\left(a^0, z^0 + \alpha_0 B_0\right) + \left\langle a^1, z^1 + \alpha_1 B_1\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\right\} \\ &= \left(a^0, z^0\right) + \sup_{B^0} \left(a^0, \alpha_0 B_0\right) + \left\langle a^1, z^1\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \sup_{B^1} \left\langle a^1, \alpha_1 B_1\right\rangle \\ &= \left(a^0, z^0\right) + \alpha_0 \left|a^0\right| + \left\langle a^1, z^1\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \alpha_1 \left\|a^1\right\|_{H^{-1}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Para $\rho^0 = a^0$, $\rho^1 = -a^1$, consideremos ρ a solução do seguinte sistema:

$$\left| \begin{array}{ll} \rho'' - \Delta\rho = 0 & \text{em} \quad Q, \\ \rho = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ \rho(T) = \rho^0,\ \rho'(T) = \rho^1 & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \tag{3.79}$$

Logo (3.78) se torna

$$\begin{aligned} &\inf_h \{F(h) + G(Lh)\} \\ &= -\left[\inf_h F^*\left(-\left.\rho\right|_{\omega\times(0,T)}\right) + \left(\rho^0, z^0\right) - \left\langle \rho^1, z^1 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \alpha_0 \left|\rho^0\right| + \alpha_1 \left\|\rho^1\right\|_{H^{-1}(\Omega)}\right] \\ &= -\left[\inf_h F\left(-\left.\rho\right|_{\omega\times(0,T)}\right) + \left(\rho^0, z^0\right) - \left\langle \rho^1, z^1 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \alpha_0 \left|\rho^0\right| + \alpha_1 \left\|\rho^1\right\|_{H^{-1}(\Omega)}\right] \\ &= -\left[\inf_h \frac{1}{2}\int_{\omega\times(0,T)} \rho^2 dxdt + \left(\rho^0, z^0\right) - \left\langle \rho^1, z^1 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \alpha_0 \left|\rho^0\right| + \alpha_1 \left\|\rho^1\right\|_{H^{-1}(\Omega)}\right]. \end{aligned}$$

Considerando o funcional

$$\mathcal{J}\left\{\rho^0, \rho^1\right\} = \frac{1}{2}\int_{\omega\times(0,T)} \rho^2 dx + \left(\rho^0, z^0\right) - \left\langle \rho^1, z^1 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \alpha_0 \left|\rho^0\right| + \alpha_1 \left\|\rho^1\right\|_{H^{-1}(\Omega)},$$

temos

$$\inf_h \{F(h) + G(Lh)\} = -\inf_{\{\rho^0,\rho^1\}} \mathcal{J}\left\{\rho^0, \rho^1\right\}.$$

Para $\varepsilon > 0$, podemos reescrever o funcional $\mathcal{J}\{\rho^0, \rho^1\}$ como

$$\mathcal{J}_\varepsilon\left\{\rho^0, \rho^1\right\} = \frac{1}{2}\int_{\omega\times(0,T)} \rho^2 dxdt + \left(\rho^0, z^0\right) - \left\langle \rho^1, z^1 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \varepsilon \left\|\left\{\rho^0, \rho^1\right\}\right\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}. \tag{3.80}$$

Mostraremos que o funcional $\mathcal{J}_\varepsilon$ atinge um mínimo $\{\hat{\rho}^0, \hat{\rho}^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. De fato,

- $\mathcal{J}_\varepsilon$ é semicontínuo inferiormente.

Consideremos uma sequência $(\{\rho_n^0, \rho_n^1\})$ em $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, tal que

$$\left\{\rho_n^0, \rho_n^1\right\} \to \left\{\rho^0, \rho^1\right\} \text{ forte em } L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega). \tag{3.81}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja ρ_n a solução de (3.79) associada aos dados $\{\rho_n(\cdot,T),\rho_n'(\cdot,T)\} = \{\rho_n^0,\rho_n^1\} \in L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$. Assim, $\psi_n = \rho_n - \rho$ é solução do seguinte sistema:

$$\left|\begin{array}{l} \psi_n'' - \Delta\psi_n = 0 \quad \text{em} \quad Q, \\ \psi_n = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \\ \psi_n(\cdot,T) = \rho_n^0 - \rho^0, \quad \psi_n'(\cdot,T) = \rho_n^1 - \rho^1 \quad \text{em} \quad \Omega. \end{array}\right. \tag{3.82}$$

Sabemos por (2.136) que a solução ψ_n de (3.82) satisfaz a seguinte desigualdade:

$$\int_Q |\psi_n|^2\,dxdt \le C\left(\left|\rho_n^0-\rho^0\right|_{L^2(\Omega)} + \left\|\rho_n^1-\rho^1\right\|_{H^{-1}(\Omega)}\right), \tag{3.83}$$

à qual juntamente com (3.81) implicam que $\int_{\omega\times(0,T)} |\rho_n(x,t)-\rho(x,t)|^2\,dxdt \to 0$, quando $n\to\infty$, o que prova a continuidade do funcional $\mathcal{J}_\varepsilon$ e, portanto, sua semicontinuidade inferior.

- $\mathcal{J}_\varepsilon$ é estritamente convexo

Seja $\lambda \in (0,1)$ e $\{\rho^0,\rho^1\},\{q^0,q^1\} \in L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$, seguindo o mesmo argumento utilizado na Subseção 3.2.2, temos

$$\mathcal{J}_\varepsilon\left\{\lambda\left\{\rho^0,\rho^1\right\} + (1-\lambda)\left\{q^0,q^1\right\}\right\} < \lambda\mathcal{J}_\varepsilon\left\{\rho^0,\rho^1\right\} + (1-\lambda)\,\mathcal{J}_\varepsilon\left\{q^0,q^1\right\}. \quad \blacksquare$$

- $\mathcal{J}_\varepsilon$ é coercivo.

Seja $\left(\left\{\rho_j^0,\rho_j^1\right\}\right)_{j\ge1}$ uma sequência em $L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$ tal que $\left\|\left\{\rho_j^0,\rho_j^1\right\}\right\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} \to \infty$. Normalizando temos

$$\left\{\hat\rho_j^0,\hat\rho_j^1\right\} = \frac{\left\{\rho_j^0,\rho_j^1\right\}}{\left\|\left\{\rho_j^0,\rho_j^1\right\}\right\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}}.$$

Logo

$$\frac{\mathcal{J}_\varepsilon\left\{\rho_j^0,\rho_j^1\right\}}{\left\|\left\{\rho_j^0,\rho_j^1\right\}\right\|} = \frac{1}{2}\left\|\left\{\rho_j^0,\rho_j^1\right\}\right\|\int_{\omega\times(0,T)}\hat\rho_j^2\,dxdt + \left\langle\left\{z^0,z^1\right\},\left\{\hat\rho_j^0,\hat\rho_j^1\right\}\right\rangle + \varepsilon,$$

onde $\hat\rho_j$ é solução de (3.79) com dados iniciais $\left\{\hat\rho_j^0,\hat\rho_j^1\right\}$. Notemos que podem ocorrer dois casos:

(i) Se $\underline{\lim} \int_{\omega\times(0,T)} \rho^2 dxdt > 0$, então

$$\frac{\mathcal{J}_\varepsilon\left\{\rho_j^0, \rho_j^1\right\}}{\left\|\left\{\rho_j^0, \rho_j^1\right\}\right\|} \to \infty$$

(ii) Se $\underline{\lim} \int_{\omega\times(0,T)} \rho^2 dxdt = 0$. Sendo $(\{\hat{\rho}_j^0, \hat{\rho}_j^1\})_{j\geq 1}$ é limitado em $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, então, extraindo uma subsequência, podemos garantir que $(\{\hat{\rho}_j^0, \hat{\rho}_j^1\})_{j\geq 1}$ coverge fracamente para $\{\psi^0, \psi^1\}$ em $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. Além disso, se ψ é a solução de (3.79) com $\{\psi(T), \psi'(T)\} = \{\psi^0, \psi^1\}$, então $\left\{\hat{\rho}_j, \hat{\rho}_j'\right\}_{j\geq 1}$ converge fracamente para $\{\psi, \psi'\}$ em $L^2\left(0, T; L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)\right) \cap H^1\left(0, T; H^{-1}(\Omega \times [H^2 \cap H_0^1(\Omega)]'\right)$. Pela convergência fraca, temos

$$\int_{\omega\times(0,T)} \rho^2 dxdt \leq \underline{\lim} \int_{\omega\times(0,T)} \rho_j^2 dxdt = 0.$$

Assim $\psi = 0$ em $\omega \times (0, T)$.

Para $T > T_0 = 2\delta(\Omega, \omega)$, existe $C > 0$ tal que cumpre-se a desigualdade inversa (3.47), para todo $\{\rho^0, \rho^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ (ver Apêndice B). Logo $\{\psi^0, \psi^1\} = \{0, 0\}$ e, portanto,

$$\left\{\hat{\rho}_j^0, \hat{\rho}_j^1\right\} \to \{0, 0\} \text{ fraco em } L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega).$$

Dessa forma,

$$\underline{\lim} \frac{\mathcal{J}_\varepsilon\left\{\rho_j^0, \rho_j^1\right\}}{\left\|\left\{\rho_j^0, \rho_j^1\right\}\right\|} \geq \underline{\lim}\left[\varepsilon + \left\langle\left(z^0, z^1\right), \left(\hat{\rho}_j^0, \hat{\rho}_j^1\right)\right\rangle\right] = \varepsilon,$$

ou seja,

$$\mathcal{J}_\varepsilon\left\{\rho^0, \rho^1\right\} \to \infty \text{ quando } \left\|\left\{\rho^0, \rho^1\right\}\right\| \to \infty.$$

Portanto, nos dois casos (i) e (ii) temos a coercividade de $\mathcal{J}_\varepsilon$.

Dessa maneira, em visto do Teorema 1.11, temos que $\mathcal{J}_\varepsilon$ atinge um mínimo $\{\hat{\rho}^0, \hat{\rho}^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

Enunciaremos agora o teorema que garante a controlabilidade aproximada do sistema (3.30).

Teorema 3.6 *Seja $T > T_0 = 2\delta(\Omega, \omega)$. Então para todo $\varepsilon > 0$ e dados $\{y^0, y^1\}$, $\{z^0, z^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, existe um controle $h \in L^2(\omega \times (0, T))$, tal que a solução y*

de (3.30) *satisfaz* (3.72). *Além disso,* $h = \hat{\rho}|_{\omega\times(0,T)}$ *onde* $\hat{\rho}$ *é a solução* (3.79) *com dados* $\{\hat{\rho}^0, \hat{\rho}^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, *minimizando o funcional* $\mathcal{J}_\varepsilon$ *definido em* (3.80).

Prova: Mostramos anteriormente a existência de um mínimo $\{\hat{\rho}^0, \hat{\rho}^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ para o funcional $\mathcal{J}_\varepsilon$. Provemos agora que $h = \hat{\rho}|_{\omega\times(0,T)}$ é o controle de modo que a solução y de (3.30) satisfaça (3.72). De fato, para $h > 0$ e $\{\rho^0, \rho^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
&0 \leq \frac{1}{h}\left(\mathcal{J}_\varepsilon\left\{\{\hat{\rho}^0, \hat{\rho}^1\} + h\{\rho^0, \rho^1\}\right\} - \mathcal{J}_\varepsilon\{\hat{\rho}^0, \hat{\rho}^1\}\right) \\
&\leq \int_{\omega\times(0,T)} \hat{\rho}\rho dxdt + \frac{h}{2}\int_{\omega\times(0,T)} \hat{\rho}\rho dxdt + (\rho^0, z^0) - \langle \rho^1, z^1\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \varepsilon \left\|\{\rho^0, \rho^1\}\right\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)},
\end{aligned}$$

onde ρ é solução de (3.79) com dados $\{\rho^0, \rho^1\}$. Fazendo $h \to 0$ na inequação anterior, deduzimos que

$$-\varepsilon \left\|\{\rho^0, \rho^1\}\right\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} \leq \int_{\omega\times(0,T)} \hat{\rho}\rho dxdt + \left(\rho^0, z^0\right) - \left\langle \rho^1, z^1\right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

Similarmente, para $h < 0$, obtemos

$$\int_{\omega\times(0,T)} \hat{\rho}\rho dxdt + \left(\rho^0, z^0\right) - \left\langle \rho^1, z^1\right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \leq \varepsilon \left\|\{\rho^0, \rho^1\}\right\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}.$$

Logo, para qualquer $\{\rho^0, \rho^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, temos

$$\left|\int_{\omega\times(0,T)} \hat{\rho}\rho dxdt + \left(\rho^0, z^0\right) - \left\langle \rho^1, z^1\right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}\right| \leq \varepsilon \left\|\{\rho^0, \rho^1\}\right\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}. \tag{3.84}$$

Sendo ρ solução ultra fraca de (3.79), no sentido da Definição 2.2, então, para y solução de (3.30), obtemos a seguinte identidade:

$$\int_Q \rho h 1_\omega dxdt = (\rho(T), y'(T)) - (\rho'(T), y(T)). \tag{3.85}$$

Tendo em conta que $h = \hat{\rho}$, segue que

$$\int_0^T \int_\omega \rho\hat{\rho} dxdt = \left(\rho^0, y'(T)\right) - \left\langle \rho^1, y(T)\right\rangle. \tag{3.86}$$

Por (3.84) e (3.86) temos

$$\left|\left\langle \{\rho^0, \rho^1\}, \{z^0, z^1\} - \{y(T), y'(T)\}\right\rangle\right| \leq \varepsilon \left\|\{\rho^0, \rho^1\}\right\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)},$$

o que implica (3.72). ■

Apêndice A

Existência e Prolongamento de Soluções Aproximadas

O nosso objetivo neste apêndice é justificar a existência de soluções do sistema (2.7)

Sejam $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto e $f : G \to \mathbb{R}^n$ uma função não necessariamente contínua. Dizemos que uma função absolutamente contínua $x(t)$ definida em algum intervalo da reta I tal que $(x(t), t) \in G$, $\forall\ t \in I$, é uma solução para o problema

$$x' = f(x,t) \tag{A.1}$$

se $x(t)$ satisfaz $(A.1)$ q.s. em (x,t). Seja $(x_0, t_0) \in G$. Associado a $(A.1)$ e a (x_0, t_0) tem o problema de valor inicial

$$\left| \begin{array}{l} x' = f(x,t), \\ x(t_0) = x_0. \end{array} \right. \tag{A.2}$$

Dizemos que uma função $f : G \to \mathbb{R}^n$ está nas **Condições de Carathéodory** sobre G se

(i) $f(x,t)$ é mensurável em t para cada x fixado,

(ii) $f(x,t)$ é contínua em x para cada t fixado,

(iii) para cada compacto K de G existe uma função real integrável $m_K(t)$ tal que

$$|f(x,t)| \leq m_K(t), \quad \forall\ (x,t) \in K.$$

Consideremos o retângulo

$$R = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1};\ \ |x - x_0| \leq b,\ \ |t - t_0| \leq a,\ b > 0,\ a > 0\right\}.$$

Teorema A.1 (Carathéodory) *Seja $f : R \to \mathbb{R}^n$ nas Condições de Carathéodory sobre R, então existe uma solução $x(t)$ de $(A.2)$ sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \alpha$, $\alpha > 0$.*

Corolário A.1 *Sejam $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto e f satisfazendo as Condições de Carathéodory sobre G, então o problema $(A.2)$ tem solução para qualquer $(x_0, t_0) \in G$.*

Seja $\varphi(t)$ uma solução de $(A.1)$ sobre I e $I \subset I_1$. Diz-se que $\varphi(t)$ tem um **prolongamento** até I_1, se existe $\varphi_1(t)$ solução de $(A.1)$ sobre I_1 e $\varphi_1(t) = \varphi(t), \forall\ t \in I$.

Teorema A.2 (Prolongamento) *Sejam $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aberto e limitado e $f : G \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as duas primeiras Condições de Carathéodory sobre G e existe uma uma função integrável $m(t)$ tal que*

$|f(x,t)| \leq m(t), \quad \forall\ (x,t) \in G$. Seja φ uma solução da equação $(A.1)$ sobre o intervalo $]a,b[$, então

(i) existem $\varphi(a_+), \varphi(b_-)$,

(ii) se $(\varphi(b_-), b) \in G$ então φ pode ser prolongado até $]a, b+\delta[$ para algum $\delta > 0$. Resultado análogo para a,

(iii) $\varphi(t)$ pode ser prolongada até um intervalo (γ, ω) tal que $(\varphi(\gamma_+), \gamma), (\varphi(\omega_-), \omega) \in \partial G$ (∂G é a fronteira de G).

Corolário A.2 *Sejam $G = U \times [0,T]$, $T > 0$, $U = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \ |x| \leq b\}$, $b > 0$ e f nas condições do Teorema $(A.2)$. Seja $\varphi(t)$ uma solução de*

$$\left|\begin{array}{l} x' = f(x,t), \\ x(t_0) = x_0, \quad\ |x_0| \leq b. \end{array}\right.$$

Suponhamos que em qualquer intervalo I onde $\varphi(t)$ está definida tem-se $|\varphi(t)| \leq M, \forall\, t \in I$, M independente de I e $M < b$. Então φ pode ser prolongada até $[0,T]$.

As demonstrações dos teoremas e dos corolários deste Apêndice podem ser encontradas em [7] e [26].

Voltemos agora ao nosso problema. Fazendo $v = w_j$ e substituindo $\phi_m(t)$ em $(2.7)_1$ temos

$$\left(\sum_{i=1}^{m} g''_{im}(t)w_i, w_j\right) + \left(\left(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)w_i, w_j\right)\right) = (f(t), w_j)\,.$$

Como

$$\left(\left(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)w_i, w_j\right)\right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\,(g_{im}(t)w_i, w_j)\,,$$

obtemos

$$g''_{jm}(t) + \lambda_j g_{jm}(t) = (f(t), w_j)\,, \quad j = 1, ..., m,$$

o qual é um sistema de m equações diferenciaveis ordinárias de segundo ordem com coeficientes constantes λ_j. Sendo $\phi_m^0 = \sum_{i=1}^{m} (\phi_m^0, w_i)\, w_j$ e $\phi_m^1 = \sum_{i=1}^{m} (\phi_m^1, w_i)\, w_j$, temos o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} g''_{jm}(t) + \lambda_j g_{jm}(t) = (f(t), w_j)\,, \\ g_{jm}(0) = (\phi^0, w_j)\,, \\ g'_{jm}(0) = (\phi^1, w_j)\,. \end{cases} \tag{A.3}$$

Considerando as matrizes

$$y(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_m(t) \end{bmatrix}_{m\times 1}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix}_{m\times m} \quad \text{e} \quad M = \begin{bmatrix} (f(t), w_1) \\ (f(t), w_2) \\ \vdots \\ (f(t), w_m) \end{bmatrix}_{m\times 1},$$

o sistema (A.3) se transforma em

$$\begin{cases} y''(t) = -\lambda y + M, \\ y(0) = y_0, \\ y'(0) = y^1. \end{cases} \tag{A.4}$$

Agora, considerando

$$X(t)=\begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix},$$

segue de (A.4) que

$$X'(t)=\begin{bmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y'(t) \\ -\lambda y+M \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & I \\ -\lambda & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \overline{0} \\ M \end{bmatrix},$$

onde I é a matriz identidade $m\times m$, 0 é a matriz nula $m\times m$ e $\overline{0}$ é a matriz nula $m\times 1$.

Seja

$$F_1(X,t)=\begin{bmatrix} 0 & I \\ -\lambda & 0 \end{bmatrix}X \qquad \text{e} \qquad F_2(X,t)=\begin{bmatrix} \overline{0} \\ M \end{bmatrix}.$$

Então encontrar solução para o sistema $(A.4)$ é equivalente a resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} X'=F_1(X,t)+F_2(X,t), \\ X(0)=\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}=X_0. \end{cases} \tag{A.5}$$

Mostremos que o sistema $(A.5)$ está nas condições de Carathéodory. De fato, seja $G=U\times[0,T]$, onde $U=\{x\in\mathbb{R}^{2m};\ \ \|x\|\leq b\}$, $b>0$. Então

- Fixando X, temos que $F_1(X,t)$ não depende de t e $F_2(X,t)$ é mensuravél, pois $f\in L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$. Logo $F_1(X,t)+F_2(X,t)$ é mensuravél em t para X fixo.

- Fixando t, $F_2(X,t)$ não depende de X, então é constante e, portanto, contínua e $F_1(X,t)$ é linear. Então $F_1(X,t)+F_2(X,t)$ é contínua.

- Como X varia em U, então todas as entradas de $F_1(X,t)$ são limitadas por uma mesma constante. As entradas de $F_2(X,t)$ são funções integráveis em $[0,T]$, pois as m primeras entradas são nulas e as m últimas entradas são, em valor absoluto, iguais a $|(f(t),w_j)|$. Além disso,

$$|(f(t),w_j)|=\left|\int_\Omega f(s)w_j\right|ds\leq\int_\Omega |f(s),w_j|\,ds$$
$$\leq\int_\Omega |f(s)|\,|w_j|\,ds\leq\frac{1}{2}\int_\Omega |f(s)|^2\,ds+\frac{1}{2}\int_\Omega |w_j|^2\,ds<\infty.$$

Assim $\|F_2(X,t)\|_{\mathbb{R}^{2n}} \leq \max_{1\leq j\leq m} |(f(t), w_j)| = m_B(t)$. Logo $\|F_1 + F_2\|_{\mathbb{R}^{2n}} \leq 2C_B + m_B(t)$.

Portanto, pelo Corolário A.1, o sistema $(A.5)$ possui solução em $[0, t_m]$, com $t_m < T$. ■

Apêndice B

Desigualdades de Observabilidade

O nosso objetivo neste apêndice é demostrar as desigualdades inversas (3.21) e (3.47) para os problemas de controlabilidade exata na fronteira e interna, estudados nas subseções 3.1.1 e 3.1.2, respectivamente. Estas desigualdades permitem .concluir a caracterização dos espaços F e F', como espaços de Sobolev, no método HUM.

B.1 Observabilidade para o Controle Exato na Fronteira

Antes de enunciarmos o teorema que nos garante a desigualdade inversa (ou de observabilidade) (3.21), consideremos a seguinte terminologia:

- x^0 algum ponto de $\mathbb{R}^n$, $m(x)$ o vetor $x - x^0$ com componentes $m_k(x) = x_k - x_k^0$, $1 \leq k \leq n$.

- $R(x^0) = \sup\limits_{x \in \overline{\Omega}} \|x - x^0\| = \|m(x)\|_{L^\infty(\Omega)}$.

- Partição da fronteira Γ de Ω $-$ $\left| \begin{array}{l} \Gamma(x^0) = \{x \in \Gamma;\ m(x) \cdot v(x) > 0\}, \\ \Gamma_*(x^0) = \{x \in \Gamma;\ m(x) \cdot v(x) \leq 0\} = \Gamma - \Gamma(x^0). \end{array} \right.$

- Partição da fronteira lateral Σ de Q – $\left| \begin{array}{l} \Sigma\left(x^0\right)=\Gamma\left(x^0\right)\times(0,T), \\ \Sigma_*\left(x^0\right)=\Gamma_*\left(x^0\right)\times(0,T). \end{array} \right.$

Agora consideremos o resultado que nos garante a desigualdade inversa.

Teorema B.1 *Consideremos* $T\left(x^0\right)=2R\left(x^0\right).$ *Se* $T>T\left(x^0\right),$ *então*

$$\left\|\phi^0\right\|^2+\left|\phi^1\right|^2\leq\frac{R\left(x^0\right)}{T-T\left(x^0\right)}\int_{\Sigma(x^0)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2d\Gamma dt, \tag{B.1}$$

para toda solução forte ϕ *de* (3.6).

Prova: Pela identidade (2.88) temos,

$$\frac{1}{2}\int_\Sigma q_k\nu_k\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2d\Gamma dt=X+\frac{1}{2}\int_Q\frac{\partial q_k}{\partial x_k}\left(\left|\phi'\right|^2-\left|\nabla\phi\right|^2\right)dxdt+\int_Q\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}dxdt. \tag{B.2}$$

onde $X=\left(\phi_n'(t),q_k\frac{\partial\phi(t)}{\partial x_k}\right)\Big|_0^T$.

Escolhendo $q_k\left(x\right)=x_k-x_k^0=m_k\left(x\right)$, $1\leq k\leq n$, obtemos

$$\frac{\partial q_k}{\partial x_k}=n\quad\text{e}\quad\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}=\left|\nabla\phi\right|^2,$$

o que substituindo em $(B.2)$ nos dá

$$\frac{1}{2}\int_\Sigma m_k\nu_k\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2d\Gamma dt=X+\frac{n}{2}\int_Q\left(\left|\phi'\right|^2-\left|\nabla\phi\right|^2\right)dxdt+\int_Q\left|\nabla\phi\right|^2dxdt.$$

Em $\Sigma\left(x^0\right)$ temos $0\leq m_k\nu_k\leq\left(\sum_{k=1}^n m_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^n\nu_k^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left\|m\left(x\right)\right\|_{\mathbb{R}^n}=R\left(x^0\right).$ Portanto

$$\int_\Sigma m_k\nu_k\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2d\Gamma dt\leq\int_{\Sigma(x^0)}m_k\nu_k\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2d\Gamma dt\leq R\left(x^0\right)\int_{\Sigma(x^0)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2d\Gamma dt.$$

Assim

$$X+\frac{n}{2}\int_Q\left(\left|\phi'\right|^2-\left|\nabla\phi\right|^2\right)dxdt+\int_Q\left|\nabla\phi\right|^2dxdt\leq\frac{R\left(x^0\right)}{2}\int_{\Sigma(x^0)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2d\Gamma dt. \tag{B.3}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}&X+\frac{n}{2}\int_Q\left(\left|\phi'\right|^2-\left|\nabla\phi\right|^2\right)dxdt+\int_Q\left|\nabla\phi\right|^2dxdt\\&=X+\frac{n-1}{2}\int_Q\left(\left|\phi'\right|^2-\left|\nabla\phi\right|^2\right)dxdt+\int_0^T E\left(t\right)dt,\end{aligned}$$

onde $E(t)$ é a energia definida em (2.73). Fazendo $Y = \int_Q \left(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right) dxdt$, e observando que a energia é conservativa, isto é, $E(t) = E(0)$ para todo $t \in [0,T]$, temos de $(B.3)$ que

$$X + \frac{n-1}{2}Y + TE(0) \leq \frac{R(x^0)}{2}\int_{\Sigma(x^0)} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt. \tag{B.4}$$

Notemos que ao multiplicarmos ambos lados da equação de $(3.6)_1$ por ϕ e integrarmos em Q, obtemos

$$-\int_Q |\phi|^2 dxdt + (\phi'(t), \phi(t))|_0^T + \int_Q |\bigtriangledown\phi|^2 dxdt = 0. \quad \blacksquare$$

Dessa forma,

$$X + \frac{n-1}{2}Y = \int_\Omega \phi' \left(m \cdot \nabla\phi + \frac{n-1}{2}\phi\right) dx\Big|_0^T. \tag{B.5}$$

Iremos agora obter uma estimativa para a integral em $(B.5)$ em termos da energia.

Observemos que,

$$\int_\Omega \phi' \left(m \cdot \nabla\phi + \frac{n-1}{2}\phi\right) dx \leq \frac{\mu}{2}\int_\Omega \phi'^2 dx + \frac{1}{2\mu}\int_\Omega \left(m \cdot \nabla\phi + \frac{n-1}{2}\phi\right)^2 dx, \tag{B.6}$$

onde $\mu > 0$ é um número real a ser escolhido posteriormente.

Analisemos a última integral do lado direito de $(B.6)$.

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left(m \cdot \nabla\phi + \frac{n-1}{2}\phi\right)^2 dx &= \int_\Omega (m \cdot \nabla\phi)^2 dx \\ +\int_\Omega \frac{(n-1)^2}{4}\phi^2 dx &+ (n-1)\int_\Omega (m \cdot \nabla\phi)\phi dx.\end{aligned} \tag{B.7}$$

Temos ainda que

$$\int_\Omega (m \cdot \nabla\phi)\phi dx = \int_\Omega m_k \frac{\partial\phi}{\partial x_k}\phi dx = \frac{1}{2}\int_\Omega m_k \frac{\partial\phi^2}{\partial x_k} dx \tag{B.8}$$

e, como $\phi = 0$ sobre Σ, pelo Lema de Gauss temos

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k}\left(m_k\phi^2\right) dx = \int_\Gamma v_k m_k \phi^2 d\Gamma = 0. \tag{B.9}$$

Logo

$$\frac{1}{2}\int_\Omega m_k \frac{\partial\phi^2}{\partial x_k} dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial m_k}{\partial x_k}\phi^2 dx = -\frac{n}{2}\int_\Omega \phi^2 dx. \tag{B.10}$$

Assim, substituindo $(B.8)-(B.10)$ em $(B.7)$ obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\left(m\cdot\nabla\phi+\frac{n-1}{2}\phi\right)^{2}dx&=\int_{\Omega}\left(m\cdot\nabla\phi\right)^{2}dx+\left[\frac{\left(n-1\right)^{2}}{4}-\frac{n\left(n-1\right)}{2}\right]\int_{\Omega}\phi^{2}dx\\&\leq\int_{\Omega}\left(m\cdot\nabla\phi\right)^{2}dx,\end{aligned}\tag{B.11}$$

pois $\frac{(n-1)^2}{4}-\frac{n(n-1)}{2}=-\frac{\left(n^2+1\right)}{4}\leq 0.$

Sendo

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\left(m\cdot\nabla\phi\right)^{2}dx&=\int_{\Omega}\left(m_k\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\right)^{2}dx\leq\int_{\Omega}\left(\left(\sum m_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum\frac{\partial\phi}{\partial x_k}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{2}dx\\&\leq\int_{\Omega}\left\|m\left(x\right)\right\|_{\mathbb{R}^n}^{2}\left|\nabla\phi\right|^{2}dx=R\left(x^0\right)^{2}\int_{\Omega}\left|\nabla\phi\right|^{2}dx,\end{aligned}$$

segue de $(B.11)$ que

$$\int_{\Omega}\left(m\cdot\nabla\phi+\frac{n-1}{2}\phi\right)^{2}dx\leq R\left(x^0\right)\int_{\Omega}\left|\nabla\phi\right|^{2}dx.\tag{B.12}$$

Substituindo $(B.12)$ em $(B.6)$ e fazendo $\mu=R\left(x^0\right)$, obtemos a desigualdade

$$\int_{\Omega}\phi'\left(m\cdot\nabla\phi+\frac{n-1}{2}\phi\right)dx\leq R\left(x^0\right)E\left(0\right),\tag{B.13}$$

à qual substituindo em $(B.5)$ nos dá

$$\begin{aligned}\left|X+\frac{n-1}{2}Y\right|&=\left|\left(\phi'\left(t\right),m\cdot\nabla\phi+\frac{n-1}{2}\phi\right)\Big|_{0}^{T}\right|\\&\leq 2\left\|\left(\phi'\left(t\right),m\cdot\nabla\phi+\frac{n-1}{2}\phi\right)\right\|_{L^{\infty}(0,T)}\leq 2R\left(x^0\right)E\left(0\right)=T\left(x^0\right)E\left(0\right).\end{aligned}\tag{B.14}$$

De acordo com $(B.14)$ deduzimos de $(B.4)$ que

$$-T\left(x^0\right)E\left(0\right)+TE\left(0\right)\leq\frac{R\left(x^0\right)}{2}\int_{\Sigma(x^0)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^{2}d\Gamma dt,$$

como queríamos mostrar. ■

B.2 Observabilidade para o Controle Exato Interno

Seja x^0 um ponto de $\mathbb{R}^n$ e consideremos a partição da fronteira de Ω, $\Gamma = \Gamma(x^0) \cup \Gamma_*(x^0)$, conforme na Seção B.1.

Dizemos que $\omega \subset \Omega$ é uma vizinhança, em Ω, de $\overline{\Gamma(x^0)}$, se existe alguma vizihança $\omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ de $\overline{\Gamma(x^0)}$ tal que

$$\omega = \Omega \cap \omega_0. \tag{B.15}$$

Enunciaremos agora o principal resultado desta seção, que nos fornece a desigualdade inversa (3.47).

Teorema B.2 *Seja $x^0 \in \mathbb{R}^n$ e $\omega \subset \Omega$ uma vizinhança de $\overline{\Gamma(x^0)}$. Se $T > 2R(x^0)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$C \left\| \{\phi^0, \phi^1\} \right\|^2_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} \leq \int_0^T \int_\omega |\phi|^2 \, dxdt, \tag{B.16}$$

para toda solução forte de (3.32).

Antes de provarmos o teorema, consideremos o seguinte lema:

Lema B.1 *Se existe uma constante $C > 0$ tal que cumpra-se a desigualdade*

$$\left\| \phi^0 \right\|^2 + \left| \phi^1 \right|^2 \leq C \int_0^T \int_\omega |\phi'|^2 \, dxdt, \tag{B.17}$$

para toda solução ϕ de (3.32), *com $\phi^0 \in H_0^1(\Omega)$ e $\phi^1 \in L^2(\Omega)$, então temos a desigualdade*

$$\left| \phi^0 \right|^2 + \left\| \phi^1 \right\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \leq C \int_0^T \int_\omega |\phi|^2 \, dxdt. \tag{B.18}$$

Prova: Dado $\{\phi^0, \phi^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, seja $\chi \in H_0^1(\Omega)$ tal que $-\Delta\chi = \phi^1$ em Ω. Consideremos

$$\psi(x,t) = \int_0^t \phi(x,s) \, ds - \chi(x),$$

onde ϕ é a solução ultra fraca de (3.32) com dados iniciais ϕ^0 e ϕ^1. Integrando $(3.32)_1$ de 0 a T, obtemos

$$\phi'(t) - \phi'(0) - \Delta \int_0^t \phi(x,s) \, ds = 0.$$

Mas $\psi'(x,t) = \phi(x,t)$ e $\psi''(x,t) = \phi'(x,t)$, então

$$\psi''(x,t) - \phi^1 - \Delta(\psi(x,t) + \chi(x)) = 0.$$

Pela definição de χ, a igualdade anterior implica

$$\left| \begin{array}{ll} \psi'' - \Delta\psi = 0 & \text{em} \quad Q \\ \psi = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma \\ \psi(0) = -\chi,\ \psi'(0) = \phi^0 & \text{em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{B.19}$$

Sendo $\chi \in H_0^1(\Omega)$ e $\phi^0 \in L^2(\Omega)$, temos, pelo Teorema (2.4), que $(B.19)$ possui uma única solução fraca.

Supondo a desigualdade $(B.17)$ verdadeira, segue que $(B.19)$,

$$\|\chi\|^2 + \left|\phi^0\right|^2 \leq C \int_0^T \int_\Omega |\phi|^2 \, dxdt. \tag{B.20}$$

Definamos em $H^{-1}(\Omega)$ um produto interno. Sabemos que Δ é um isomorfismo entre $H_0^1(\Omega)$ e $H^{-1}(\Omega)$. Seja $G = \Delta^{-1}$, então para todo par $u, v \in H^{-1}(\Omega)$, definamos

$$(u,v)_{H^{-1}(\Omega)} = \langle u, Gv \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} = ((Gu, Gv))_{H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)},$$

o qual é um produto interno em $H^{-1}(\Omega)$.

A norma induzida é

$$\|v\|^2_{H^{-1}(\Omega)} = ((Gv, Gv)).$$

Dessa forma,

$$\left\|\phi^1\right\|^2_{H^{-1}(\Omega)} = \left(\left(G\phi^1, G\phi^1\right)\right) = ((\chi, \chi)) = \|\chi\|^2.$$

Assim temos modificado $(B.20)$, obtendo $(B.18)$. ■

Passemos agora à prova do resultado principal.

Prova do Teorema B.2: Segue do Lema B.1 que, para provar o Teorema $B.2$, é suficiente provar a desigualdade $(B.17)$. Dividiremos a prova em três passos.

- Primeiro passo.

Mostremos que, dado $\varepsilon > 0$ tal que $T - 2\varepsilon > 2R(x^0)$, vale a seguinte desigualdade:

$$E(0) \leq C \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{w} \left(|\phi'|^2 + |\nabla \phi|^2 \right) dxdt. \tag{B.21}$$

Com efeito, para $T > 2R(x^0)$ sabemos pela desigualdade $(B.1)$ que

$$\int_{\Omega} \left(\left|\nabla \phi^0(x)\right|^2 + \left|\phi^1(x)\right|^2 \right) dx \leq \frac{R(x^0)}{T - 2R(x^0)} \int_{\Sigma(x^0)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt, \tag{B.22}$$

para a solução ϕ de (3.32).

Suponhamos que $T > 2R(x^0)$ é tal que existe $\varepsilon > 0$ tal que $T - 2\varepsilon > 2R(x^0)$. Nestas condições, de $(B.23)$, da invariância da equação da ondas respeito as translações na variável tempo e da conservação da energia deduzimos

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\left|\nabla \phi^0(x)\right|^2 + \left|\phi^1(x)\right|^2 \right) dx \leq C \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt, \tag{B.23}$$

Considere $h \in \left[C^1\left(\overline{\Omega}\right)\right]^n$ tal que $h \cdot \nu \geq 0$ para todo $x \in \Gamma$, $h = \nu$ sobre $\Gamma(x^0)$ e $h = 0$ em $\Omega - \omega$. Seja $\eta \in C^1([0,T])$ tal que $\eta(0) = \eta(T) = 0$, $\eta(t) = 1$ em $(\varepsilon, T - \varepsilon)$. Definamos $q(x,t) = \eta(t) h(x)$, a qual pertence a $W^{1,\infty}(Q)$ e satisfaz

$$\left| \begin{array}{ll} q(x,t) = \nu(x) & \forall\ (x,t) \in \Gamma(x^0) \times (\varepsilon, T-\varepsilon), \\ q(x,t) \cdot \nu(x) \geq 0 & \forall\ (x,t) \in \Gamma \times (0,T), \\ q(x,0) = q(x,T) = 0 & \forall\ x \in \Omega, \\ q(x,t) = 0 & \forall\ (x,t) \in (\Omega - \omega) \times (0,T). \end{array} \right. \tag{B.24}$$

Considerando o multiplicador $q \cdot \nabla \phi \in L^2(Q)$, onde ϕ é solução de (3.32), podemos deduzir do Lema 2.3 a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{\Sigma} q \cdot \nu \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt = \left(\phi'(t), q \cdot \nabla \phi\right)\Big|_0^T + \frac{1}{2} \int_{\omega \times (0,T)} divq \left(|\phi'|^2 - |\nabla \phi|^2 \right) dxdt \\ &+ \int_{\omega \times (0,T)} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} dxdt. \end{aligned} \tag{B.25}$$

Observando as características do campo vetorial q, acima definido, obtemos

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} q \cdot \nu \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt \geq \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Gamma(x^0)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt, \tag{B.26}$$

porque $q(x,t)=\nu$ sobre $\Gamma(x^0)\times(\varepsilon,T-\varepsilon)$, e

$$\left(\phi'(t),q\cdot\nabla\phi\right)\Big|_0^T=0, \tag{B.27}$$

pois $\eta(0)=\eta(T)=0$. Temos ainda que, como $q\in C^1\left(\overline{\Omega}\times(0,T)\right)$, $divq$ é limitado e

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\omega\times(0,T)}\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}dxdt\right|\leq C\sum_{k,j}\int_{\omega\times(0,T)}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}dxdt\\&\leq C\int_0^T\int_\omega|\nabla\phi|^2\,dxdt\leq C\int_0^T\int_\omega\left(|\phi'|^2+|\nabla\phi|^2\right)dxdt.\end{aligned} \tag{B.28}$$

Substituindo $(B.26)-(B.28)$ em $(B.25)$, temos

$$\int_\varepsilon^{T-\varepsilon}\int_{\Gamma(x^0)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2d\Gamma dt\leq C\int_0^T\int_\omega\left(|\phi'|^2+|\nabla\phi|^2\right)dxdt. \tag{B.29}$$

A estimativa $(B.29)$ é válida para todo $T>2R(x^0)$. Portanto, sendo $\varepsilon>0$ tal que $T-2\varepsilon>2R(x^0)$, pelo argumento utilizado anteriormente e combinando $(B.23)$ e $(B.29)$ obtemos $(B.21)$.

- Segundo passo

Provemos que

$$\int_{\Sigma(x^0)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2d\Gamma dt\leq C\int_0^T\int_\omega\left(|\phi'|^2+|\phi|^2\right)dxdt. \tag{B.30}$$

Seja $\omega_0\subset\Omega$ uma vizinhança de $\overline{\Gamma(x^0)}$ tal que $\Omega\cap\omega_0\subset\omega$. Observemos que $(B.21)$ é verdadeira para cada vizinhança de $\Gamma(x^0)$, em particular para ω_0. Logo,

$$E(0)\leq C\int_\varepsilon^{T-\varepsilon}\int_{\omega_0}\left(|\phi'|^2+|\nabla\phi|^2\right)dxdt. \tag{B.31}$$

Consideremos $\rho\in W^{1,\infty}(\Omega)$, $\rho\geq0$ tal que $\rho(x)=1$ em ω_0 e $\rho(x)=0$ em $\Omega-\omega$. Definamos $p(x,t)$ em Q por $p(x,t)=\eta(t)\rho^2(x)$, onde $\eta(t)$ é a função acima definida. Assim

$$\left|\begin{array}{ll}p(x,t)=1 & \text{em}\quad \omega_0\times(\varepsilon,T-\varepsilon),\\ p(x,t)=0 & \text{em}\quad (\Omega-\omega)\times(0,T),\\ p(x,0)=p(x,T)=0 & \text{em}\quad \Omega,\\ \dfrac{|\nabla p|}{p}\in L^\infty(Q). & \end{array}\right. \tag{B.32}$$

Multiplicando ambos lados de $(3.32)_1$ por $p\phi$ e integrando por partes em Q, obtemos

$$\int_Q p\phi\phi'' dxdt - \int_Q p\phi\Delta\phi dxdt = 0. \tag{B.33}$$

Iremos agora obter expresões para as integrais em $(B.33)$.

Analisemos a primeira integral. Notemos que

$$\int_Q p\phi\phi'' dxdt = \int_0^T (\phi'', p\phi)\, dt = (\phi', p\phi)|_0^T - \int_0^T (\phi', p\phi')\, dt - \int_0^T (p'\phi, \phi')\, dt.$$

Como $p(x,t) = p(x,T) = 0$, então

$$\int_0^T (\phi'', p\phi)\, dt = -\int_0^T (\phi', p\phi')\, dt - \int_0^T (p'\phi, \phi')\, dt. \tag{B.34}$$

Analisemos a segunda integral. Vejamos que

$$-\int_Q \Delta\phi p\phi dxdt = \int_Q \nabla\phi \cdot \nabla(p\phi)\, dxdt - \int_\Sigma p\phi \frac{\partial\phi}{\partial\nu} d\Gamma dt.$$

A integral de superficie em Σ é zero porque ϕ é solução de (3.32). Então,

$$-\int_Q \Delta\phi p\phi dxdt = \int_0^T \int_\omega p(\nabla\phi \cdot \nabla\phi)\, dxdt + \int_0^T \int_\omega (\nabla p \cdot \nabla\phi)\, \phi dxdt, \tag{B.35}$$

porque $p(x,t) = 0$ em $\Omega - \omega$.

Substituindo as igualdades $(B.34)$ e $(B.35)$ em $(B.33)$ temos

$$\int_0^T \int_\omega p|\nabla\phi|^2 dxdt = \int_0^T \int_\omega p\phi'^2 dxdt + \int_0^T \int_\omega p'\phi\phi' dxdt - \int_0^T \int_\omega (\nabla p \cdot \nabla\phi)\, \phi dxdt. \tag{B.36}$$

Por $(B.32)$, podemos garantir de $(B.36)$ que:

$$\int_0^T \int_\omega p|\nabla\phi|^2 dxdt \leq C\int_0^T \int_\omega \left(|\phi'|^2 + |\phi|^2\right) dxdt + \left|\int_0^T \int_\omega (\nabla p \cdot \nabla\phi)\, \phi dxdt\right|. \tag{B.37}$$

Observemos que

$$\left|\int_0^T \int_\omega (\nabla p \cdot \nabla\phi)\, \phi dxdt\right| \leq \frac{1}{2}\int_0^T \int_\omega p|\nabla\phi|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_\omega \frac{|\nabla p|^2}{p}\phi^2 dxdt. \tag{B.38}$$

Por viste de $(B.32)$, segue por $(B.37)$ e $(B.38)$ que

$$\int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \int_{\omega_0} |\nabla\phi|^2 dxdt \leq C\int_0^T \int_\omega \left(|\phi'|^2 + |\phi|^2\right) dxdt, \tag{B.39}$$

a qual, após substituir em $(B.31)$, fornece-nos

$$\left\|\phi^0\right\|^2+\left|\phi^1\right|^2\leq C\int_0^T\int_\omega\left(\left|\phi'\right|^2+\left|\phi\right|^2\right)dxdt. \tag{B.40}$$

Dessa forma, combinando (2.99) e $(B.40)$ obtemos a desigualdade $(B.30)$.

- Terceiro passo

Suponhamos que a desigualdade $(B.17)$ não seja verdadeira, então para um número natural m, existem dados iniciais $\overline{\phi}_m^0$ e $\overline{\phi}_m^1$ tais que a solução $\overline{\phi}_m$ de (3.32) correspondendo a estes dados satisfaz

$$\left\|\overline{\phi}_m^0\right\|^2+\left|\overline{\phi}_m^1\right|^2\geq m\left\|\overline{\phi}_m'\right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega))}.$$

Definamos $k=\left(\left\|\overline{\phi}_m^0\right\|^2+\left|\overline{\phi}_m^1\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ e $\phi_m^0=\frac{\overline{\phi}_m^0}{k}$; $\phi_m^1=\frac{\overline{\phi}_m^1}{k}$; $\phi_m=\frac{\overline{\phi}_m}{k}$. Assim

$$\left|\begin{array}{l}\left\|\phi_m'\right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega))}\leq\dfrac{1}{n},\\ \left\|\phi_m^0\right\|+\left|\phi_m^1\right|^2=1.\end{array}\right. \tag{B.41}$$

De $(B.41)$ temos que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_0^T\int_\omega\left|\phi_m'\right|^2dxdt=0 \tag{B.42}$$

e que podemos extrair subsequências, denotadas da mesma forma, tais que

$$\left|\begin{array}{l}\phi_m^0\to\phi^0\text{ forte em }H_0^1(\Omega),\\ \phi_m^1\to\phi^1\text{ forte em }L^2(\Omega).\end{array}\right.$$

Para cada $m\in\mathbb{N}$, consideremos ϕ_m como sendo a solução de (3.32) correspondente aos dados iniciais ϕ_m^0 e ϕ_m^1. Por argumentos similares aos usados na Seção 2.2, podemos garantir que

$$\left|\begin{array}{l}(\phi_m)\text{ é limitada em }L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right),\\ (\phi_m')\text{ é limitada em }L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right).\end{array}\right. \tag{B.43}$$

Notemos que as limitações em $(B.43)$ também são verdadeiras em $\omega\subset\Omega$.

Por $(B.43)$, existe uma subsequência (ϕ_m), ainda denotada por (ϕ_m), tal que

$$\phi_m\to\phi\text{ fraco}-*\text{ em }L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right), \tag{B.44}$$

$$\phi'_m \to \phi' \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right). \tag{B.45}$$

As estimativas $(B.43)$ implicam que (ϕ_m) é limitada em $H^1(Q)$. Como $H^1(Q) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$ (ver Lema 1.2), existe uma subsequência de (ϕ_m), que denotaremos por (ϕ_m), tal que

$$\phi_m \to \phi \text{ forte em } L^2\left(0,T;L^2\left(\omega\right)\right). \tag{B.46}$$

De $(B.42)$, $(B.45)$ e o Teorema de Banach-Steinhauss (Teorema 1.7), segue que $\phi'(x,t) = 0$ em $\omega \times (0,T)$, isto é, $\phi(x,t)$ é constante com respeito a t em $\omega \times (0,T)$. Mas $\phi = 0$ sobre Σ, porque ϕ é solução de (3.32). Logo, pelo Teorema de Holmgren (ver [16]), $\phi(x,t) = 0$ em $\omega \times (0,T)$. Então, por $(B.46)$, temos

$$\phi_m \to 0 \text{ forte em } L^2\left(0,T;L^2\left(\omega\right)\right).$$

Como $(B.30)$ também é verdadeira para ϕ_m, podemos concluir a convergência

$$\frac{\partial\phi_m}{\partial\nu} \to 0 \text{ forte em } L^2\left(\Sigma_0\right),$$

à qual, juntamente com a desigualdade direta $(B.22)$, permite-nos dizer que

$$\left\{\phi_m^0, \phi_m^1\right\} \to \{0,0\} \text{ forte em } H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

que é uma contradição com $(B.41)_2$. ■

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R. A., Sobolev Space, Academic Press, London, (1975).

[2] ALEMBERT, J. R., Addition au Mémoire sur la Courbe que Forme une Corde Tendüe, Mise en Vibration, Hist. de l'Acad. Roy de Berlin, **6** (1750), 355-360.

[3] ALEMBERT, J. R., Recherches sur la Courbe que Forme une Corde Tendüe Mise en Vibration, Hist. de l'Acad. Roy. de Berlin, **3** (1747), 214-219 y Suite des recherches, **3** (1747), 220-249.

[4] AUBIN J. P., Applied Functional Analysis, John Wiley & Sons, (1979) .

[5] BERNOULLI, D, Réflexions et Éclarcissements sur les Nouvelles Vibrations des Cordes Exposées dans les Mémoires de l'Académie de 1747 et 1748, Hist. de l'Acad. Roy. de Berlin, **9** (1753), 147-172.

[6] BREZIS, H., Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications, Dunod, Paris, (1999).

[7] CODDINGTON, E. and LEVINSON, N., Theory of Ordinary Differential Equations, McGrall-Hill, New York, (1955).

[8] EVANS, L. C., Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics vol. 19, American Mathematical Society, (1997) .

[9] HORMANDER, L., Linear Partial Differential Operators, Springer-Verlag, (1976) .

[10] HO, L. F., Observabilité Frontière de l'Équation des Ondes, C. R. Acad. Sci. Paris, **302** (1986), 443-446.

[11] KALMAN, R. E., Optimization, Mathematical Theory of Control, en Encyclopaedia Britannica, Fifteenth ed., (1974), 636–638.

[12] KREIDER, K. O., Equações Diferenciais, Edgart Blucher, (1972).

[13] KINDERLEHRER, D. and STAMPACCHIA, G., An Introduction to Variational Inequalities and their Applications, Academic Press, New York, (1980) .

[14] LEE, E. B. and MARKUS, L., Foundations of Optimal Control Theory, John Wiley & Sons, (1967).

[15] LIONS, J. L., Control des Systèmes Distribuées Singuliers, Gauthier Villars, Paris, (1983) .

[16] LIONS, J. L., Contrôlabilité Exacte, Pertubation et Estabilization de Systémes Distribuées, Tome I, RMA 8, Masson, Paris, (1988).

[17] LIONS, J. L., Exact Controllability, Stabilization and Pertubation for Distributed Systems, SIAM Rev., **30** (1988) , 1-68.

[18] LIONS, J. L., Hidden Regularity in some Nonlinear Hyperbolic Equations, Mat. Apl. Comput., **6** (1987), 7-15.

[19] LIONS, J. L., Problèmes aux Limites dans les Equations aux Dérivées Partielles, Les Presses de L'Université de Montreal, Montreal, (1965).

[20] LIONS, J L., Remarks on Approximate Controllability, Journal Analyse Mathématique, **59** (1992), 103-115.

[21] LIONS, J. L. et MAGENES, E., Problèmes aux Limites Non Homogenes et Applications, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, vol. 1, (1968) .

[22] MARKUS, L., Controllability of Nonlinear Processes, SIAM J. Control, **3** (1965) , 78-90.

[23] MEDEIROS, L. A, Exact Controllability for Wave Equations - HUM, Atas do 37^o SBA, (1993), 61-173.

[24] MEDEIROS, L. A, Tópicos em Equações Diferenciais Parciais, Parte I, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (2006) .

[25] MEDEIROS, L. A. e MILLA MIRANDA, M., Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais, Textos de Métodos Matemáticos, vol. 25, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1989).

[26] MEDEIROS, L. A. e RIVERA, P. H., Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais, Textos de Métodos Matemáticos, vol. 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1977).

[27] MICU, S. and ZUAZUA, E., An Introduction to the Controllability of Partial Differential Equations, Universidad Autónoma de Madrid, España.

[28] MILLA MIRANDA, M., Análise Espectral em Espaços de Hilbert, Textos de Métodos Matemáticos, vol. 28, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1994).

[29] RUSSEL, D. L., A Unified Boundary Controllability Theory for Hyperbolic and Parabolic Partial Differential Equations, Studies in Appl. Math., **52** (1973) , 189-221.

[30] RUSSEL, D. L., Controllability and Stabilizability Theory for Linear Partial Differential Equations. Recent Progress and Open Questions, SIAM Rev. **20** (1978) , 639-739

[31] SCHWARTZ, L., Théorie des Distributions, Hermann, (1966).

[32] VISIK, M. I., LADYZENSKAYA, O. A., Boundary value problems for partial differential equations and certain classes of perator equations, Uspehi Mat. Nauk (NS), **11** (672), (1956) , 41-97.

[33] ZUAZUA, E., An Introduction to the Exact Controllability for Distributed Systems, CMAF, Universidade de Lisboa, Portugal, (1990).

[34] ZUAZUA, E., Controlabilidad Exacta y Estabilización la Ecuación de Ondas. Textos de Métodos Matemáticos 23, Universidade Federal do Rio de Janeiro, (1990).

[35] ZUAZUA, E., Some Problems and Results on the Controllability of Partial Differential Equations, Progress in Mathematics, Vol. 169, Birkhäuser Verlag Basel/Switzerland, (1998) , 276-311.

[36] ZUAZUA, E., Teoria Matemática del Control: Motor del Desarrollo Cientifico, Teconologico e Social, Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid, España.