Controlabilidade para o sistema de Navier-Stokes

POR

FELIPE WALLISON CHAVES SILVA

ORIENTADOR: PROF. DR. FÁGNER DIAS ARARUNA

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

MAIO/2009
JOÃO PESSOA - PB

Controlabilidade para o sistema de Navier-Stokes[1]

por

Felipe Wallison Chaves Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Aprovada por:

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark - UFPI

Prof. Dr. Nelson Nery de Oliveira Castro - UFPB

Prof. Dr. Milton de Lacerda Oliveira - UFPB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

[1]Este trabalho contou com o apoio financeiro da Capes

Ficha Catalográfica

CHAVES-SILVA, Felipe Wallison.

Controlabilidade para o sistema de Navier-Stokes.

Felipe Wallison Chaves Silva.

João Pessoa: UFPB/DM, 2009.

77 p. 29cm

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Paraíba, DM.

1. Sistema de Navier-Stokes. 2.Controlabilidade.

3. Aproximações de Galerkin. 4. Desigualdade de Carleman.

I. Análise II. Título

Agradecimentos

- Agradeço primeiramente a DEUS, por estar presente em todos os momentos de minha vida, e também por colocar em minha vida pessoas tão maravilhosas como as que estão aqui mencionadas.

- À minha mãe Marlene, por seus esforços para que eu tivesse uma boa educação, pelos valores que me ensinou e por todo o amor dedicado a mim e meus irmãos.

- Às minhas mães de coração, Marina, Agripina e Nenésia, por seu amor e apoio sempre constante.

- Ao meu Avô-Pai-Padrinho, Pedro Martinss, por sua simplicidade, generosidade e imensa sabedoria.

- Aos meus irmãos, Maharishi e Mayara, amo vocês.

- Aos meus amigos Maíra, Huerllen, Luziene, Daniel Lucas e Jardel, pelos conselhos, pelas brigas (né Luziene e Maíra?) e, por acreditarem em mim, não me deixaram desistir de estudar matemática. É uma honra ter amigos assim.

- Aos amigos que fiz na Universidade Federal do Piauí, e que na Paraíba se tornaram parte de minha família: Diego, José Francisco, Maurício e Pitágoras.

- Ao professor Marcondes Rodrigues Clark que, além de ótimo orientador e incentivador, sempre foi um grande amigo e um exemplo.

- Ao professor Fágner Dias Araruna, pela forma como conduziu esta orientação, pela paciência, por me submeter um tema tão motivador e pelas conversas acerca de matemática e sobre a vida.

- Aos amigos que fiz na Paraíba, pela seriedade que tiveram nas horas de estudo e pelas alegrias nos momentos de descontração, em especial aos meu colegas: Gerson, Marcos Aurélio, Paulo Rabêlo, Tarciana, Jairo e Roberto.

- Aos professores de graduação que tive na UFPI e pós-graduação da UFPB, que acreditando em meu trabalho, incentivaram-me e participaram do meu desenvolvimento, auxiliando-me sempre. Especialmente, aos professores Jurandir de Oliveira Lopes, Barnabé Pessoa Lima e Everaldo Souto de Medeiros.

Resumo

Esta dissertação é dedicada ao estudo do sistema de Navier-Stokes sob ponto de vista da teoria do controle. Primeiramente estudamos a controlabilidade das aproximações de Galerkin do sistema de Navier-Stokes. Utilizando argumentos de dualidade e de ponto fixo, mostramos que, com hipóteses adequadas sobre a base de Galerkin, estas aproximações, finito dimensionais, são exatamente controláveis. Passando ao modelo em dimensão infinita, analisamos a controlabilidade sobre trajetórias. Isto é feito usando uma desigualdade do tipo Carleman para o sistema de Navier-Stokes linearizado e uma versão do teorema da função inversa. Dessa forma, temos um resultado de controlabilidade local exata para o sistema de Navier-Stokes.

Abstract

This dissertation is devoted to the study of the Navier-Stokes equations from the point view of control theory. First we study the controllability of Galerkin's approximations of the Navier-Stokes equations. Using arguments of duality and fixed point, we show that, with appropriate assumptions on the Galerkin basis, these approximations, finite-dimensional, are exactly controllable. Regarding the system in infinite dimension, we analyze the controllability on trajectories. This is done using an inequality of the Carleman-type for the linearized Navier-Stokes equations and a version of the theorem of inverse function. In this way, we have a result of local exact controllability to the Navier-Stokes equations.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estamos interessados em estudar a controlabilidade de fluidos descritos por meio das equações de Navier-Stokes:

$$\begin{cases} y_t + y \cdot \nabla y - \mu \Delta y = -\nabla p + f(x,t) \\ \nabla \cdot y = 0, \end{cases}$$

onde u e p são, respectivamente, o campo de velocidade e a pressão do fluido, f é uma força externa e μ é a viscosidade do fluido.

Equações do tipo acima regem, sob condições bastante gerais, o escoamento de fluidos incompressíveis e viscosos tais como água, ar e óleo. Tais equações aparecem também no estudo de muitos fenômenos importantes, como, por exemplo, em estudo teórico de ciências aeronáuticas, em metereologia, na indústria petrolífera, no estudo de cristais líquidos, fluidos poliméricos e sangue em vasos finos.

O estudo da controlabilidade para as equações de Navier-Stokes torna-se bastante interessante do ponto de vista de aplicações. Isto nos leva a investigar se é possível conduzir o fluxo a um certo estado desejado tendo à nossa disposição um controle. Entretanto, devido às propriedades de dissipatividade e a não-linearidade do sistema, não podemos esperar a controlabilidade exata para o sistema de Navier-Stokes com uma função objetivo arbitrária.

Em [24, 25], Lions conjecturou a controlabilidade aproximada para as equações de Navier-Stokes. Precisamente foi conjecturado que *o sistema de Navier-Stokes pode ser dirigido, em um tempo finito, por meio de uma função controle, de um estado inicial dado a uma vizinhança arbitrariamente pequena (em uma topologia adequada) de um estado final também dado.*

Muitos resultados importantes na direção de uma resposta positiva para esta conjectura têm sido feitos. Por exemplo, em [8, 9], Coron provou a controlabilidade aproximada para a equação de Euler (isto é, quando $\mu = 0$) no caso bidimensional e então estendeu esse resultado para provar um resultado de controlabilidade aproximada para o sistema de Navier-Stokes (também no caso 2-D) com condições de fronteira adequadas, às quais foram denominadas de condições de fronteira de Navier. Ainda nestes trabalhos, Coron prova um resultado de controlabilidade exata na fronteira para a equação de Euler.

A controlabilidade aproximada para a equação de Euler, no caso tridimensional, foi provada por Glass em [19].

Outro resultado importante a respeito desta conjecutura é provado em [17, 13] por Fursikov e Imanuvilov. Nestes trabalhos, os autores provam a controlabilidade exata nula na fronteira de pequenas soluções do sistema de Navier-Stokes.

Nesta dissertação estudamos dois resultados concernentes à controlabilidade do sistema de Navier-Stokes, e que, como veremos, nos dão bons indicativos de que a conjectura é verdadeira. O primeiro resultado que estudamos foi obtido por Lions e Zuazua em [28], e diz respeito à controlabilidade de aproximações de Galerkin do sistema de Navier-Stokes. O segundo resultado estudado, obtido por Fernández-Cara, Guerrero, Imanuvilov e Puel em [12], é destinado ao estudo da controlabilidade sobre trajetórias do sistema de Navier-Stokes.

Em síntese, este trabalho é organizado como segue:

No Capítulo 1 daremos definições, notações e alguns resultados essenciais para tornar a leitura desta dissertação auto-suficiente.

No Capítulo 2 estudaremos a controlabilidade de aproximações de Galerkin para o sistema de Navier-Stokes, e veremos que, com hipóteses adequadas sobre a base de Galerkin, estes sistemas de dimensão finita são exatamente controláveis e, além disso, mostraremos que o custo da controlabilidade é independente da não-linearidade. O método utilizado neste capítulo consiste em combinar o Método da Unicidade Hilbertiana (HUM), introduzido por Lions (ver [24], [23]), com um teorema de ponto fixo.

O Capítulo 3 é dedicado ao estudo da controlabilidade para as trajetórias do sistema de Navier-Stokes. Provaremos uma desigualdade tipo Carleman que, juntamente com um teorema de função inversa, permitirá concluir um resultado de controlabilidade local exata para as trajetórias do sistema de Navier-Stokes.

No apêndice apresentaremos alguns resultados relativos ao sistema de Navier-

Stokes, assim como resultados de teoria do controle que foram utilizados nos capítulos anteriores.

Capítulo 1

Um pouco de Análise Funcional

Neste capítulo relembramos alguns resultados de análise funcional que serão essenciais no restante deste trabalho.

1.1 Distribuições

Seja u uma função real definida em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, u mensurável, e seja $(K_i)_{i\in I}$ a família de todos os subconjuntos abertos K_i de Ω, tais que $u = 0$ quase sempre em K_i. Considera-se o subconjunto aberto $K = \bigcup_{i\in I} K_i$. Então, $u = 0$ quase sempre em K, e como consequência deste fato, define-se o suporte de u, que será denotado por *supp* u, como sendo o subconjunto fechado

$$\mathit{supp}\ u = \Omega \backslash K.$$

A notação $w \subset\subset \Omega$ significa que $\overline{w} \subset \Omega$ e $\overline{w}$ é um compacto (isto é, fechado e limitado) do $\mathbb{R}^N$, onde $\overline{w}$ é o fecho de w em $\mathbb{R}^N$.

Uma n-upla de inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é denominada de multi-índice, e sua ordem é definida por $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

Representa-se por D^α o operador derivação de ordem α, isto é

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_1^{\alpha_n}}.$$

Definição 1.1. *Representamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis, cujo suporte é um conjunto compacto de Ω. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são chamados de funções testes.*

Naturalmente, $C_0^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações usuais de soma de funções e de multiplicação por escalar.

Definição 1.2. *Diz-se que uma sequência de funções* $(\varphi_n)_{n\in N}$ *em* $C_0^\infty(\Omega)$ *converge para* φ *em* $C_0^\infty(\Omega)$ *se as seguintes condições forem satisfeitas:*

1. *Existe um compacto* K*, de* Ω*, tal que supp* $\varphi \subset K$ *e supp* $\varphi_n \subset K$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$*, uniformemente em* K*, para todo multi-índice* α.

Observação 1.1. *É possível dotar* $C_0^\infty(\Omega)$ *com uma topologia de forma que a noção de convergência nessa topologia coincida com a definição anterior.*

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergêcia acima é denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 1.3. *Uma distribuição (escalar) sobre* Ω *é um funcional linear contínuo sobre* $\mathcal{D}(\Omega)$.

Mais precisamente, uma distribuição sobre Ω é um funcional $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ satisfazendo:

1. $T(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1 T(\varphi_1) + \lambda_2 T(\varphi_2)$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$,

2. Se $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$.

Denota-se o valor da distribuição T em φ por $< T, \varphi >$.

O conjunto de todas as distribuições sobre Ω com as operações usuais de som e multiplicação por escalar é um espaço vetorial, o qual será denotado por $\mathcal{D}(\Omega)'$.

Definição 1.4. *Diz-se que uma sequência de distribuições* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $\mathcal{D}(\Omega)'$ *converge para* T *em* $\mathcal{D}(\Omega)'$ *se a sequência numérica* $(< T_n, \varphi >)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergir para* $< T, \varphi >$ *em* $\mathbb{R}$ *para toda* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 1.5. *Sejam* T *uma distribuicao sobre* Ω *e* α *um multi-índice. Defini-se a derivada* $D^\alpha T$ *(no sentido das distribuições) de ordem* α *de* T *como sendo o funcional definido em* $\mathcal{D}(\Omega)$ *por*

$$< D^\alpha T, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha \varphi >, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observação 1.2.

1. *A definição acima nos diz que uma distribuição sobre Ω possui derivada de todas as ordens.*

2. *$D^\alpha T$ é uma distribuição sobre Ω, onde $T \in \mathcal{D}(\Omega)'$. De fato, vê-se facilmente que $D^\alpha T$ é linear, agora, para a continuidade, considerando $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergindo para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$ tem-se:*

$$|< D^\alpha T, \varphi_n > - < D^\alpha T, \varphi >| \leq |< T, D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi >| \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

3. *A aplicação $D^\alpha : \mathcal{D}(\Omega)' \to \mathcal{D}(\Omega)'$, tal que $T \to D^\alpha T$, é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}(\Omega)'$.*

1.2 Espaços $L^p(\Omega)$

Neste trabalho todas as integrais realizadas sobre Ω serão no sentido de Lebesgue, assim como a mensurabilidade das funções envolvidas.

Definição 1.6. *Sejam Ω um conjunto mensurável e $1 \leq p \leq \infty$. Indicamos por $L^p(\Omega)$ ao conjunto de todas as funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $\|f\|_p < \infty$, onde*

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \text{ se } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} ess \, |f(x)| = \inf\{C > 0; |f(x)| \leq C \text{ quase sempre}\}.$$

Os espaços $L^p(\Omega)$ são espaços de Banach, sendo $L^2(\Omega)$ espaço de Hilbert com o produto interno usual da integral. Além disso, $L^p(\Omega)$ é reflexivo, para $1 < p < \infty$. Neste trabalho, a menos que se diga o contrário, $(.,.)$ sempre representará o produto interno em $L^2(\Omega)$ e por $\|.\|$ represetaremos a norma associada.

Teorema 1.1. *$C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Prova: Ver [34]. ■

Definição 1.7. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $1 \leq p < \infty$. Indicamos por $L^p_{loc}(\Omega)$ o conjunto de todas as funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $f1_w \in L^p(\Omega)$, para todo compacto $w \subset \Omega$, onde 1_w é a função característica de w.*

Para cada $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, o funcional $T_u : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ dado por:

$$< T_u, \varphi >= \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx,$$

define uma distribuição sobre Ω.

Lema 1.1 (Du Bois Raymond). *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Tem-se que $T_u = 0$ se e só se $u = 0$ quase sempre em Ω.*

Prova: Ver [34]. ■

Observação 1.3. *Como consequência do Lema 1.1, a aplicação*

$$L^1_{loc}(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$$
$$u \to T_u$$

é linear, contínua e injetiva. Em decorrência disso é comum identificar a distribuição T_u com a função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Nesse sentido tem-se que $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Como $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, temos que toda função de $L^p(\Omega)$ define uma distribuição sobre Ω, isto é, toda função de $L^p(\Omega)$ pode ser vista como uma distribuição, e temos que toda função de $L^p(\Omega)$ possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições.

Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Para cada $x \in \mathbb{R}^N$, considere a integral

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy. \tag{1.1}$$

Mostra-se, utilizando o teorema de Fubini, e a invariância da medida de Lebesgue, que $h \in L^1(\mathbb{R})$ e então

$$\|h\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Definição 1.8. *Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. A função $h \in L^1(\mathbb{R})$, definida por (1.1), é chamada a convolução de f e g e é denotado por*

$$h = f * g.$$

Teorema 1.2. *Sejam $1 \leq p, q, r < \infty$ tais que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

Se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ então $f * g \in L^r(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}.$$

Prova: Ver [22]. ■

1.3 Espaços de Sobolev

Definição 1.9. *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Define-se o espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ como sendo o conjunto de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que para todo multi-índice α tal que $|\alpha| \leq m$ tem-se $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada distribucional de u de ordem α. Resumidamente,*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall\ \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq m\}.$$

Em $W^{m,p}(\Omega)$ definimos as seguintes normas

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ se } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty .$$

Observação 1.4.

1. *$\left(W^{m,p}(\Omega), \|.\|_{m,p}\right)$ é Banach para $1 \leq p \leq \infty$.*

2. *Quando $p = 2$, o espaço de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$ torna-se um espaço de Hilbert com o produto interno dado por*

$$(u, v) = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)},\ u, v \in W^{m,2}(\Omega).$$

   E, usualmente, denota-se $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$.

Definição 1.10. *Definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.*

Observação 1.5.

1. *Quando $p = 2$ escreve-se $H_0^m(\Omega)$ em lugar de $W_0^{m,2}(\Omega)$.*

2. *Se $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$ então o complemento de Ω no $\mathbb{R}^N$ possui medida de Lebesgue igual a zero.*

3. *$W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N) = W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.*

4. *O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ é denotado por $H^{-m}(\Omega)$.*

Teorema 1.3 (Desigualdade de Poincaré-Friedricks). *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_2^2 \leq C\,\|\nabla u\|_2^2\,, \text{ para todo } u \in H_1^0(\Omega).$$

Prova: Ver [5]. ∎

A proposição a seguir é uma caracterização de $H^{-1}(\Omega) = H_0^1(\Omega)'$.

Proposição 1.1. *f é uma forma linear contínua sobre $H_0^1(\Omega)$ se, e somente se, existem $n+1$ funções $v_0, \ldots, v_n$ de $L^2(\Omega)$ tais que*

$$f = v_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

Prova: Ver [32]. ∎

Teorema 1.4 (Poincaré-Wirtinger). . *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto, limitado, conexo e de classe C^1. Então existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$,*

$$||u - \overline{u}||_{L^p(\Omega)} \leq C||\nabla u||_{L^p(\Omega)}$$

onde

$$\overline{u} = \frac{1}{med(\Omega)} \int_\Omega u(x)dx$$

é a média de u sobre Ω.

Prova: Ver [22]. ∎

Dados dois espaços de Banach X e Y, dizemos que X está continuamente imerso em Y se $X \subset Y$ e existe uma constante $C > 0$ tal que $\|x\|_Y \leq C\,\|x\|_X$, para todo $x \in X$. Neste caso escrevemos $X \hookrightarrow Y$. Diz-se que a imersão de X em Y é compacta quando cada sequência limitada em X é pré-compacta em Y, isto é, cada sequência limitada em X possui uma subsequência que converge em Y.

Teorema 1.5 (Rellich-Kondrachov). *Sejam Ω aberto limitado do $\mathbb{R}^N$, Ω de classe C^m e $1 \leq p \leq \infty$. Então as seguintes imersões são compactas:*

1. *$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \frac{Np}{N-mp}$ se $mp < N$,*

2. *$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$ se $mp = N$,*

3. $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$, *onde* k *é um inteiro não negativo e* $k < m - \frac{N}{p} \leq k + 1$ *se* $mp > N$

Prova: Ver [22]. ∎

Teorema 1.6 (Teorema do Traço)**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *aberto, limitado e com fronteira* Γ *suficientemente regular. A aplicação linear*

$$u \longmapsto \big(\gamma_0 u, \gamma_1 u, \ldots, \gamma_{m-1} u\big) = \left(u|_\Gamma, \frac{\partial u}{\partial \nu}|_\Gamma, \ldots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}}|_\Gamma\right)$$

de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *em* $\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$ *prolonga-se, por continuidade, a uma aplicação linear, contínua e sobrejetiva de* $W^{m,p}(\Omega)$ *em* $\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$.

Prova: Ver [22]. ∎

1.4 Espaços $L^p(0,T;X)$ e Distribuições Vetoriais

Dado um espaço de Banach X, denotaremos por $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço de Banach das (classes de) funções $u : (0,T) \to X$ que são fortemente mesuráveis e $\|u(t)\|_X \in L^p(0,T)$, equipado com a norma

$$\|u(t)\|_{L^p(0,T;X)} = \Big(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Por $L^\infty(0,T;X)$ representa-se o espaço de Banach das (classes de) funções $u : (0,T) \to X$ mensuráveis e essencialmente limitadas, isto é

$$\sup_{t \in (0,T)} ess \, \|u(t)\|_X < \infty,$$

munido da norma

$$\|u(t)\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t \in (0,T)} ess \, \|u(t)\|_X .$$

Tem-se que $L^p(0,T;X)$, $1 < p < \infty$, é reflexivo se X for reflexivo. Se X é separável então podemos identificar

$$[L^p(0,T;X)]' \approx L^q(0,T;X'),$$

onde $1 \leq p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Lema 1.2. *Sejam X e Y dois espaços de Banach e suponhamos que $X \hookrightarrow Y$. Se $1 \leq s \leq r \leq \infty$, então*

$$L^r(0,T;X) \hookrightarrow L^s(0,T;Y).$$

Prova: Ver [30]. ■

Lema 1.3. *Se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $u \in L^p(0,T;X)$ e $v \in L^p(0,T;X')$, então a função numérica $t \mapsto < v(t), u(t) >_{X',X}$ está em $L^1(0,T)$.*

Prova: Ver [30]. ■

Teorema 1.7. *Sejam X e Y espaços de Banach, tais que $X \hookrightarrow Y$. Se $u \in L^p(0,T;X)$, com $u' \in L^p(0,T;Y)$, então $u \in C([0,T];Y)$.*

Prova: Ver [30]. ■

Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

Indica-se por $\mathcal{D}'(0,T;X)$ o espaço das distribuições vetoriais sobre $(0,T)$ com valores X, isto é, o espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X.

Se $u \in L^p(0,T;X)$, $1 \leq p \leq \infty$, então associa-se a u a distribuição vetorial T_u definida por

$$< T_u, \varphi >= \int_0^T u(t)\varphi(t)dt, \ \varphi \in \mathcal{D}(0,T),$$

onde a integral é tomada no sentido de Bochner em X. Demonstra-se que T_u é univocamente definida por u, e então, identificando u com T_u , pode-se dizer que

$$L^p(0,T;X) \subset \mathcal{D}'(0,T;X).$$

Definição 1.11. *Dada $S \in \mathcal{D}'(0,T;X)$, defini-se a derivada de ordem n de S (no sentido das distribuições vetoriais) como sendo a distribuição vetorial dada por*

$$\left\langle \frac{d^n S}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle S, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \ \text{para todo } \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Dado $m \in \mathbb{N}$, defini-se o seguinte espaço

$$W^{m,p}(0,T;X) = \{u \in L^p(0,T;X); u^j \in L^p(0,T;X), \ j = 1, 2 \ldots, m\},$$

onde u^j representa a j-ésima derivada de u no sentido das distribuições vetoriais. Equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(0,T;X)} = \Big(\sum_{j=0}^{m} \|u^j\|_{L^p(0,T;X)}\Big)^{\frac{1}{p}},$$

$W^{m,p}(0,T;X)$ é um espaço de Banach.

1.5 Resultados Auxiliares

Seja E um espaço vetorial normado.

Definição 1.12. *Uma função $\varphi : E \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ diz-se semicontínua inferiormente (s.c.i.) se para todo $x \in E$ tivermos*

$$\liminf_{y \to x} \varphi(y) \geq \varphi(x).$$

Definição 1.13. *Uma função $\varphi : E \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é dita convexa se*

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) \ \forall x, y \in E, \ \forall t \in (0,1).$$

Se a desigualdade acima é estrita, dizemos que φ é estritamente convexa.

Algumas das propriedades das funções s.c.i. (convexas) são:

- Se φ_1 e φ_2 são s.c.i. (convexas) então $\varphi_1 + \varphi_2$ é s.c.i. (convexa).
- Se $(\varphi_i)_{i \in I}$ é uma família de funções s.c.i. (convexas) então a função φ definida por
$$\varphi(x) = \sup_{i \in I} \varphi_i(x)$$
é s.c.i. (convexa).

Teorema 1.8. *Sejam H um espaço de Banach reflexivo, K um subconjunto convexo, fechado e não-vazio e $\varphi : K \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função com as seguintes propiedades:*

- *φ é convexa.*
- *φ é semicontínua inferiormente.*
- *Se K é ilimitado, então φ é coercivo, isto é,*
$$\lim_{\|x\| \longrightarrow \infty} \varphi(x) = \infty.$$

Então existe $x_0 \in K$ tal que

$$\varphi(x_0) = \min_{x \in K} \varphi(x).$$

Além disso, se φ é estritamente convexa então x_0 é único.

Prova: Ver [3]. ∎

Considere $\varphi : E \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Denotamos por $Dom(\varphi)$ ao dominio efetivo de φ, isto é,

$$Dom(\varphi) = \{x \in E; \varphi(x) < \infty\}.$$

Definição 1.14. *Dada uma função $\varphi : E \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tal que $\varphi \not\equiv \infty$ (isto é $Dom(\varphi) \neq \emptyset$) define-se a função $\varphi^* : E' \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, conjungada de φ, por*

$$\varphi^*(f) = \sup_{x \in E} \big\{ < f, x > - \varphi(x) \big\} \quad (f \in E').$$

Observamos que φ^* é uma função convexa e s.c.i. sobre E'.

Dados dois conjuntos C e D, definimos

$$C - D = \{c - d;\ c \in C \text{ e } d \in D\}.$$

Veremos agora um importante resultado da análise convexa. Para isso, considere

$$\begin{cases} \textbf{i. } \text{Dois espaços de Banach } X \text{ e } Y \\ \textbf{ii. } \text{Dois parâmetros } \ p \in X' \text{ e } y \in Y \\ \textbf{iii. } \text{Um operador linear contínuo } A : X \to Y \\ \textbf{iv. } \text{Duas funções s.c.i. e convexas:} \\ U : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\} \text{ e } V : Y \to \mathbb{R} \cup \{\infty\} \text{ tais que } U, V \not\equiv \infty \end{cases} \tag{1.2}$$

Iremos nos concentrar na seguinte classe de problemas de minimização

$$W(y) := \inf_{x \in X} \big[U(x) - < p, x > + V(Ax + y) \big], \tag{1.3}$$

para o qual associamos a classe de problemas duais

$$W^*(p) := \inf_{q \in Y'} \big[U^*(-A^* q + p) + V^*(q) - < q, y > \big], \tag{1.4}$$

onde A^* é o adjunto de A.

Temos então o seguinte resultado:

Teorema 1.9 (Fenchel-Rockfellar)**.** *Assumindo (1.2), temos*

a. *Se X é reflexivo e $p \in Int(A^*DomV^* + DomU^*)$, existe uma solução $\overline{x}$ para o problema $W(y)$ e tem-se $W(y) + W^*(p) = 0$.*

b. *Se $y \in Int(DomV - ADomU)$, existe uma solução $\overline{q}$ para o problema $W^*(p)$ e tem-se $W(y) + W^*(p) = 0$.*

Prova: Ver [2, capítulo 4]. ■

Teorema 1.10 (Projeção sobre um convexo fechado)**.** *Seja H um espaço de Hilbert e $K \subset H$ um subconjunto convexo, fechado e não-vazio. Então para todo $v \in H$ existe um único $u \in K$ tal que*

$$||v - u|| = \min_{w \in K} ||v - w||.$$

Além disso, u se caracteriza por :

$$\begin{cases} u \in K \\ (v - u, w - u) \leq 0 \ \forall w \in K, \end{cases}$$

onde $(.,.)$ denota o produto interno em H.

Prova: Ver [3]. ■

Teorema 1.11. *Seja H_1 um espaço de Hilbert separável. Seja H_2 também um espaço de Hilbert e assuma que $L \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ é tal que a dimensão da imagem de L é de dimensão infinita. Então existe uma base de Riez $\{e_j\}_{j \geq 1}$ de H_1 tal que qualquer combinação finita de $\{Le_j\}_{j \geq 1}$ é linearmente independente em H_2.*

Prova: Ver [29]. ■

Teorema 1.12 (Schauder)**.** *Seja S um subconjunto convexo de um espaço vetorial normado E e seja $T : S \to S$ uma aplicação contínua tal que $T(S) \subset K \subset S$, onde K é compacto. Então T tem um ponto fixo.*

Prova: Ver [22]. ■

Corolário 1.1. *Seja S um subconjunto convexo de um espaço vetorial normado E e seja $T : S \to S$ uma aplicação contínua tal que $T(S)$ é relativamente compacto. Então T tem um ponto fixo.*

Prova: Ver [22]. ■

Considere $1 < p_i < \infty$, $i = 0, 1$ e $B_0 \subset B \subset B_1$ espaços de Banach reflexivos, sendo as injeções contínuas e $B_0 \hookrightarrow B$ compactamente. Para $0 < T < \infty$, seja

$$W = \{v; v \in L^{p_0}(0, T; B_0), \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0, T; B_1)\}$$

munido da norma:

$$||v||_W = ||v||_{L^{p_0}} + ||\frac{dv}{dt}||_{L^{p_1}}.$$

Resulta que W é um espaço de Banach, sendo W continuamente imerso em $L^{p_0}(0, T; B)$. Além disso, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.13 (Aubin-Lions)**.** *Com as hipóteses acima, resulta ser compacta a imersão de W em $L^{p_0}(0, T; B)$.*

Prova: Ver [39]. ■

Definição 1.15 (Condições de Carathéodory)**.** *Sejam D um subconjunto do $\mathbb{R}^{N+1}$, cujos elementos são denotados por (t, x), onde $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}^N$. Dizemos que f satisfaz as condições de Carathéodory se:*

1. *$f(t, x)$ é mensurável em t para cada x fixo;*

2. *$f(t, x)$ é contínua em x para todo t fixo;*

3. *Para cada compacto U em D, existe uma função real integrável $m_U(t)$ tal que:*

$$|f(t, x)| \leq m_U(t), \ \forall \ (t, x) \in U.$$

Teorema 1.14 (Carathéodory)**.** *Seja $f : R \to \mathbb{R}^N$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre o retângulo $R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{N+1}; |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$, com $a > 0$ e $b > 0$. Então existe uma solução $x(t)$ do problema*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$, para algum $\beta > 0$.

Prova: Ver [34]. ■

Teorema 1.15 (Prolongamento de Soluções)**.** *Sejam* $D = [0,T] \times B$*, com* $0 < T < \infty$ *e* $B = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| \leq b, b > 0\}$*, e* f *satisfazendo as condições de Carathéodory. Seja* $\varphi(t)$ *uma solução de*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0,\ |x_0| \leq b. \end{cases}$$

Se em qualquer intervalo I *onde* $\varphi(t)$ *está definida tivermos* $|\varphi(t)| \leq M,\ \forall\ t \in I$*,* M *independente de* I *e* $M < b$*, então* φ *tem um prolongamento até* $[0,T]$.

Prova: Ver [34]. ∎

Teorema 1.16 (Gauss-Green)**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *aberto, limitado e com fronteira* Γ *de classe* C^1*. Supoha que* $u \in C^1(\overline{\Omega})$*, então*

$$\int_\Omega u_{x_i} dx = \int_\Gamma u\nu_i dS\ (i = 1, \ldots, N),$$

onde ν_i *é a i-ésima componente da normal unitária externa a* Ω*.*

Prova: Ver [5]. ∎

Capítulo 2

Controlabilidade de aproximações de Galerkin

Neste capítulo consideraremos a equação de Navier-Stokes em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ com fronteira Γ suficientemente regular, com controle agindo sobre Γ. Introduziremos uma aproximação de Galerkin de dimensão finita deste sistema. Sob suposições adequadas sobre a base de Galerkin mostraremos, utilizando argumentos de ponto fixo e de dualidade, que esta aproximação é exatamente controlável, e que o custo da contrabilidade é independente da presença da não-linearidade sobre o sistema. Uma vez que nossas suposições sobre a base de Galerkin estão relacionadas com a independência linear do traço de seus elementos sobre a fronteira, estudaremos a controlabilidade da equação de Burgers, em dimensão 1, com respeito a essa suposição, e veremos que isso é um exemplo particular degenerado. Os resultados deste capítulo foram obtidos por Lions-Zuazua em [28].

2.1 Aproximação de Galerkin e Resultados Principais

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto, limitado e com fronteira regular (de classe C^2, por exemplo). Em Ω considere um fluido governado pelo sistema de Navier-Stokes:

$$\begin{cases} y_t + y \cdot \nabla y - \mu \Delta y = -\nabla p & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{em } \Omega \times (0,T), \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $y = y(x,t)$ é a velocidade do fluido, $p = p(x,t)$ é pressão, $\mu > 0$ é a viscosidade, $T > 0$ é um dado valor do tempo e $\nabla \cdot y = div\ y$ é o divergente do campo y.

Assumiremos que agimos sobre o fluido através de um controle na fronteira.

Sejam $\tau^j = (\tau_1^j, \tau_2^j, \tau_3^j) : \Gamma \to \mathbb{R}^3,\ j = 1,2$, dois campos vetoriais suaves constituindo uma base ortonormal do plano tangente a Ω em cada $x \in \Gamma$, e denotemos por $\gamma(x)$ um outro campo vetorial tangente, que será a direção em que o controle irá atuar. Denotamos por ν a normal unitária externa a Ω, por $\frac{\partial}{\partial \nu}$ a derivada normal, e por $D(y)$ a parte simétrica do gradiente de y, ou seja $D(y) = \nabla y + \nabla y^T$. Assim, consideraremos

$$D_{ij}(y) = \frac{1}{2}(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} + \frac{\partial y_j}{\partial x_i}).$$

Dado Γ_0 um subconjunto aberto e não-vazio de Γ, podemos considerar as seguintes condições de fronteira:

$$y \cdot \nu = 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma \times (0,T), \tag{2.2}$$

$$y = 0 \ \text{ sobre } \ (\Gamma \backslash \Gamma_0) \times (0,T), \tag{2.3}$$

$$(2\mu D_{ij}(y)\nu_j + \lambda y_i - v\gamma_i)\tau_i^k = 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma_0 \times (0,T), k = 1,2, \tag{2.4}$$

com $\lambda > 0$ e $v \in L^2(\Gamma_0 \times (0,T))$ uma função que desempenha o papel do *controle*.

Observação 2.1.

1. *Temos que v é uma função escalar e o controle que ela produz, $v\gamma$, é orientado na direção do campo vetorial tangente γ.*

2. *O controle age no sistema somente no subconjunto Γ_0 da fronteira, e entra no sistema como uma fricção tangencial.*

3. *A condição* (2.2) *garante que $\int_\Gamma y \cdot \nu d\Gamma = 0$, que é necessário para haver uma compatibilidade com* $(2.1)_2$.

Assumiremos para fixar as ideias que

$$y(x,0) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{2.5}$$

embora todos os resultados sejam válidos se a condição inicial for não-nula.

Sabe-se que para v suficientemente regular existe pelo menos uma solução fraca do problema $(2.1)-(2.5)$(veja, por exemplo, [26]). Mais precisamente, considere os seguintes espaços de Hilbert, que são muito utilizados no contexto de Navier-Stokes

$$V_1 = \{\varphi \in H^1(\Omega)^3;\ \nabla \cdot \varphi = 0 \text{ em } \Omega,\ \varphi \cdot \nu = 0 \text{ sobre } \Gamma,\ \varphi = 0 \text{ sobre } \Gamma \backslash \Gamma_0\} \quad (2.6)$$

$$H_1 = \{\varphi \in L^2(\Omega)^3;\ \nabla \cdot \varphi = 0 \text{ em } \Omega,\ \varphi \cdot \nu = 0 \text{ sobre } \Gamma\}. \quad (2.7)$$

Multiplicando (2.1) por φ, integrando formalmente por partes em Ω e usando as condições de fronteira obtemos

$$\begin{cases} (y_t, \varphi) + 2\mu(D_{ij}(y), D_{ij}(\varphi)) + (y \cdot \nabla y, \varphi) + \lambda(y, \varphi)_{\Gamma_0} = (v\gamma, \varphi)_{\Gamma_0},\ \forall \varphi \in V_1, \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Temos que o problema acima admite pelo menos uma solução $y \in L^\infty(0, T; H_1) \cap L^2(0, T; V_1)$ (ver [26]).

Para podermos mostrar que o custo do controle pode ser limitado independentemente da não-linearidade do sistema, introduzamos a seguinte família de equações de estado

$$\begin{cases} y_t + \alpha y \cdot \nabla y - \mu \Delta y = -\nabla p & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (2.9)$$

satisfazendo as condições $(2.2)-(2.5)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sejam $\{e_i\}_{i \geq 1}$ uma base de V_1 e o subespaço

$$E = span[e_1, \ldots, e_N].$$

Então, introduzimos a aproximação de Galerkin da formulação variacional da equação de estado (2.9) com as condições de fronteira $(2.2)-(2.5)$, isto é,

$$\begin{cases} (y_t, e) + 2\mu(D_{ij} y, D_{ij} e) + \alpha(y \cdot \nabla y, e) + \lambda(y, e)_{\Gamma_0} = (v\gamma, e)_{\Gamma_0},\ \forall e \in E, \\ y \in C([0, T]; E);\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

A equação (2.10) é na verdade um conjunto de N equações diferenciais ordinárias não-lineares.

Usando o teorema de Caratheódory (Teorema 1.14) e o fato que $(e \cdot \nabla e, e) = 0,\ \forall e \in E$ (na verdade isso vale para todo $e \in V_1$) e procedendo, por exemplo, como em [32] ou [39], garantimos a existência global no tempo de uma única solução para o problema (2.10). Mais ainda, prova-se que para v suficientemente regular, a solução de (2.10), quando $N \longrightarrow \infty$, converge para uma solução da forma variacional da equação do estado (2.9).

Olhando por um momento para a equação (2.10), vemos que para obtermos resultados de controlabilidade, é bastante natural impormos a seguinte condição sobre a base de E

$$dim\ span[\gamma \cdot e_i]_{i\geq 1} = N\ sobre\ \Gamma_0. \tag{2.11}$$

Em outras palavras, é natural assumir que

$$\gamma \cdot e_j,\ j = 1, \ldots\ N \text{ são linearmente independentes sobre } \Gamma_0. \tag{2.12}$$

Tomando o operador $L : V_1 \rightarrow L^2(\Gamma_0)$ definido por $L(\varphi) = \varphi \cdot \gamma$, temos claramente que L é linear e que a dimensão da imagem de L é de dimensão infinita em $L^2(\Gamma_0)$ (pois γ é uma direção fixa). Utilizando o teorema do traço (Teorema 1.6) e o fato que $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0) \subset L^2(\Gamma_0)$ continuamente, concluimos que L é contínuo, então podemos aplicar o Teorema 1.11 e encontrar uma base $\{e_i\}_{i\geq 1}$ de V_1 tal que $\{e_i \cdot \gamma\}_{i\geq 1}$ são linearmente independente em $L^2(\Gamma_0)$. Portanto, é sempre possível encontrar uma base $\{e_i\}_{i\geq 1}$ de V_1 tal que para cada N vale (2.12).

Observação 2.2.

1. *Ao considerarmos $\varphi \cdot \gamma$ na definição do operador L, deixamos subtendido que estamos restringindo φ a Γ_0 no sentido do traço.*

2. *A análise da controlabilidade de* (2.10) *quando a dimensão do span$[\gamma \cdot e_i]_{i\geq 1}$ é menor que N é um problema em aberto. Neste sentido, problemas $1 - D$ (unidimensionais) são sempre casos degenerados, pois a dimensão do span é no máximo 2.*

Como nosso principal objetivo neste capítulo é provar a controlabilidade exata na fronteira para aproximações de Galerkin do sistema de Navier-Stokes e a independência do custo com relação a não-linearidade do sistema, iremos primeiro formular o problema da controlabilidade exata na fronteira para aproximações de Galerkin para o sistema de Navier-Stokes e definir o "custo" para alcançar tal controlabilidade, para em seguida provar tais resultados.

O problema da controlabilidade exata para o sistema (2.10) pode ser formulado como: *Dado* $y^T \in E$, *encontrar um controle tangencial* $v \in L^2\big(\Gamma_0 \times (0,T)\big)$ *tal que a solução* $y(t;v)$ *de* (2.10) *satisfaz*:

$$y(T;v) = y^T. \tag{2.13}$$

Quando isto ocorre dizemos que o sistema é exatamente controlável.

Definamos o custo para alcançar (2.13), ou seja, o custo da controlabilidade por

$$C(v) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0 \times (0,T)} v^2 d\Gamma dt. \tag{2.14}$$

A controlabilidade exata na fronteira para aproximacões de Galerkin do sistema de Navier-Stokes (2.10) é dada pelo seguinte resultado:

Teorema 2.1. *Seja* $\{e_i\}_{i\geq 1}$ *uma base de* V_1 *satisfazendo* (2.12) *. Então o sistema* (2.10) *é exatamente controlável.*

O seguinte teorema nos diz que o custo da controlabilidade é limitado independentemente da presença da não-linearidade no sistema.

Teorema 2.2. *Para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e qualquer* μ *tal que* $0 \leq \mu \leq \mu_1 < \infty$ *podemos alcançar (2.13) por um controle* $v = v(\alpha,\mu)$ *tal que*

$$C(v(\alpha,\mu)) \leq \text{ constante independente de } \alpha \text{ e } \mu, \tag{2.15}$$

onde μ_1 *é um número real fixo.*

Os dois últimos teoremas enunciados serão provados simultaneamente na próxima seção.

2.2 Prova dos Teoremas 2.1 e 2.2

Provaremos os Teoremas 2.1 e 2.2 simultaneamente e, para efeitos didáticos, dividiremos a prova em várias etapas.

Etapa 1. **Sistema Linearizado**.

Considere uma função h tal que

$$h \in L^2(0,T;E),$$

e o seguinte problema linear:

$$\begin{cases} (y_t + \alpha h \cdot \nabla y, e) + 2\mu(D_{ij}y, D_{ij}e) + \lambda(y,e)_{\Gamma_0} = (v\gamma, e)_{\Gamma_0}, \ \forall e \in E, \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{2.16}$$

Para cada $v \in L^2(\Gamma_0 \times (0,T))$, o problema acima possui exatamente uma única solução y na classe $C^0([0,T];E)$.

Para nossos propósitos, precisamos mostrar que o sistema (2.16) é exatamente controlável, isto é, precisamos encontrar $v \in L^2(\Gamma_0 \times (0,T))$ tal que a solução $y(T;v)$ de (2.16) satisfaça (2.13). Para isso, consideremos o seguinte lema:

Lema 2.1. *Se $f \in E$ e*

$$(y(T;v), f) = 0, \quad \forall v \in L^2(\Gamma_0 \times (0,T)) \tag{2.17}$$

implicar

$$f \equiv 0,$$

então (2.16) *é exatamente controlável.*

Prova: De fato, o conjunto $S = \{y(T;v);\ y \ \text{ é solução de (2.16)}\} \subset E$ é tal que $S^{\perp} = \{0\}$ em E, e como S é subespaço vetorial de E e, uma vez que E é de dimensão finita, teremos $E = S$. ■

Com a finalidade de provar (2.17), introduzimos φ como sendo solução do seguinte sistema adjunto:

$$\begin{cases} (-\varphi_t - \alpha h \cdot \nabla \varphi, e) + 2\mu(D_{ij}\varphi, D_{ij}e) + \lambda(\varphi, e)_{\Gamma_0} = 0, \ \forall e \in E, \\ \varphi(T) = f. \end{cases} \tag{2.18}$$

O problema acima tem uma única solução φ na classe $C([0,T];E)$.

Utilizando o Teorema de Gauss-Green (Teorema 1.16), o fato que $h(t) \cdot \nu = 0$ sobre Γ e $\nabla \cdot h(t) = 0$ em Ω, concluimos que

$$-(\alpha h(t) \cdot \nabla \varphi(t), y(t)) = (\alpha h(t) \cdot \nabla y(t), \varphi(t)), \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.19}$$

Então, tomando $e = y(t)$ em (2.18) e integrando por partes em t, obtemos

$$-(\varphi(T), y(T)) + \int_0^T \Big[(\varphi, y_t + \alpha h \cdot \nabla y) + 2\mu(D_{ij}\varphi, D_{ij}y) + \lambda(\varphi, y)_{\Gamma 0} \Big] dt = 0.$$

Usando (2.16) temos

$$(y(T), f) = \int_{\Gamma_0 \times (0,T)} v\gamma \cdot \varphi \; d\Gamma dt. \tag{2.20}$$

Portanto, se (2.17) é satisfeita, então

$$\int_{\Gamma_0 \times (0,T)} v\gamma \cdot \varphi d\Gamma dt = 0, \;\; \forall v \in L^2(\Gamma_0 \times (0,T)),$$

o que implica

$$\gamma \cdot \varphi = 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \times (0,T). \tag{2.21}$$

Como $\varphi(t) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(t) e_i$, então pela hipótese (2.12) podemos concluir que $\varphi_i(t) = 0$ para $i = 1, \ldots, N$ e, portanto, $\varphi \equiv 0$. Logo $f \equiv 0$, o que implica que (2.17) é verdade e, pelo lema 2.1, o problema (2.16) é exatamente controlável.

Etapa 2. **Estimativas usando dualidade.**

Devido ao resultado obtido na Etapa 1, podemos definir o funcional

$$M(h) = \inf_{v \in U_{ad}} \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0 \times (0,T)} v^2 d\Gamma dt, \tag{2.22}$$

onde U_{ad} é o conjunto dos controles admissíveis

$$U_{ad} = \{v \in L^2(\Gamma_0 \times (0,T)); \; y \text{ solução de } \; (2.16) \text{ satisfazendo } (2.13)\}.$$

Vamos provar que

$$M(h) \leq \text{constante independente de } \; h, \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \mu \in [0, \mu_1]. \tag{2.23}$$

Para isso usaremos argumentos de dualidade.

Consideremos o operador linear $L : L^2(\Gamma_0 \times (0,T)) \to E$ definido por

$$Lv = y(T; v). \tag{2.24}$$

Para mostrar que L é contínuo precisamos do seguinte lema:

Lema 2.2. *Existem constantes positivas $c(E)$ e $C(E)$ dependendo somente de E tal que*

$$c(E)||e||^2 \leq \int_{\Gamma_0} |\gamma \cdot e|^2 d\Gamma \leq C(E)||e||^2, \;\; \forall e \in E. \tag{2.25}$$

Prova: Pela hipótese (2.12) temos que $\left(\int_{\Gamma_0} |\gamma \cdot e|^2 d\Gamma\right)^{\frac{1}{2}}$ define uma norma sobre E e, uma vez que E tem de dimensão finita, todas as normas em E são equivalentes, e o resultado segue. ∎

Proposição 2.1. *L é contínuo.*

Prova: Tomando $e = y(t)$ em (2.16) e integrando em $(0,t)$ podemos concluir que

$$\frac{1}{2}||y(t;v)||^2 \leq ||v||_{L^2(\Gamma_0\times(0,T))}||\gamma\cdot y||_{L^2(\Gamma_0\times(0,T))}$$

e usando o lema anterior, o resultado segue. ∎

Introduzamos os funcionais,

$F_1 : L^2(\Gamma_0 \times (0,T)) \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ dado por:

$$F_1(v) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0\times(0,T)} v^2 d\Gamma dt \tag{2.26}$$

e $F_2 : E \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ definido por:

$$F_2(f) = \begin{cases} 0, \text{ se } f = y^T, \\ \infty, \text{ caso contrário.} \end{cases} \tag{2.27}$$

Então

$$M(h) = \inf_{v\in L^2(\Gamma_0\times(0,T))}\big[F_1(v) + F_2(Lv)\big]. \tag{2.28}$$

Pelo teorema de dualidade de Fenchel e Rockfellar (Teorema 1.9) temos

$$-M(h) = \inf_{f\in E}\big[F_1^*(L^*f) + F_2^*(-f)\big], \tag{2.29}$$

onde L^* é o adjunto de L. Usando (2.20) concluimos que

$$L^*(f) = \gamma\cdot\varphi \text{ sobre } \Gamma_0\times(0,T). \tag{2.30}$$

Pela definição de função conjungada

$$\begin{aligned} F_1^*(\psi) &= \sup_{u\in L^2(\Gamma_0\times(0,T))}\big\{(\psi,u)_{L^2(\Gamma_0\times(0,T))} - F_1(u)\big\} \\ &= \sup_{u\in L^2(\Gamma_0\times(0,T))}\big\{(\psi,u)_{L^2(\Gamma_0\times(0,T))} - \tfrac{1}{2}||u||^2_{L^2(\Gamma_0\times(0,T))}\big\}, \end{aligned} \tag{2.31}$$

onde $\psi \in L^2(\Gamma_0 \times (0,T)$, e lembrando que

$$(\psi,u) \leq ||\psi||||u|| \leq \frac{1}{2}||\psi||^2 + \frac{1}{2}||u||^2,$$

concluimos de (2.31) que

$$F_1^*(\psi) = \frac{1}{2}||\psi||^2_{L^2(\Gamma_0\times(0,T))} = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0\times(0,T)}\psi^2 d\Gamma dt. \tag{2.32}$$

Usando novamente a definição de função conjungada temos

$$F_2^*(-f) = -(f, y^T). \tag{2.33}$$

Assim, (2.29) nos dá

$$-M(h) = \inf_{f\in E}\left[\frac{1}{2}\int_{\Gamma_0\times(0,T)}(\gamma\cdot\varphi)^2 d\Gamma dt - (f, y^T)\right]. \tag{2.34}$$

Portanto, pelo Lema 2.2, segue que

$$-M(h) \geq \inf_{f\in E}\left[\frac{c(E)}{2}\int_0^T ||\varphi||^2 dt - (f, y^T)\right]. \tag{2.35}$$

Tomando $e = \varphi(t)$ em (2.18), integrando de t a T e usando (2.19) para ver que o termo contendo h desaparece, obtemos

$$\frac{1}{2}||\varphi(t)||^2 + 2\mu\int_t^T ||D(\varphi(t))||^2 dt + \lambda\int_t^T\int_{\Gamma_0}|\varphi(t)|^2 d\Gamma dt = \frac{1}{2}||f||^2, \tag{2.36}$$

onde $||D(\varphi(t))||^2 = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{3}(D_{ij}(\varphi), D_{ij}(\varphi))$.

Integrando a equação acima em $(0,T)$, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_0^T ||\varphi(t)||^2 dt + 2\mu\int_0^T t||D(\varphi(t))||^2 dt + \lambda\int_0^T\int_{\Gamma_0} t|\varphi(t)|^2 d\Gamma dt = \frac{T}{2}||f||^2. \tag{2.37}$$

Uma vez que E é de dimensão finita e $(\lambda||e||^2_{\Gamma_0} + 2\mu||D(e)||^2)^{\frac{1}{2}}$ define uma norma em E, garantimos a existência de constantes positivas $C(\lambda,\mu)$ e $c(\lambda,\mu)$ tais que

$$c(\lambda,\mu)||e||^2 \leq \lambda||e||^2_{\Gamma_0} + 2\mu||D(e)||^2 \leq C(\lambda,\mu)||e||^2, \quad \forall e \in E. \tag{2.38}$$

De (2.37) temos

$$\frac{T}{2}||f||^2 \leq \left(\frac{1}{2} + C(\lambda,\mu)T\right)\int_0^T ||\varphi||^2 dt. \tag{2.39}$$

Em vista de (2.35) e da desigualdade acima, segue-se que

$$-M(h) \geq \inf_{f\in E}\left[\frac{c(E)T}{2(1+2C(\lambda,\mu)T)}||f||^2 - (f, y^T)\right]. \tag{2.40}$$

Usando a desigualdade

$$(f, y^T) \leq ||f||||y^T|| \leq a||f||^2 + \frac{1}{4a}||y^T||^2, \tag{2.41}$$

com $a = \frac{c(E)T}{2(1+2C(\lambda,\mu)T)}$, concluimos que

$$M(h) \leq \frac{1+2C(\lambda,\mu)T}{c(E)T}||y^T||^2. \tag{2.42}$$

Portanto, se fixarmos $\mu_1 \in \mathbb{R}$ temos que para $0 \leq \mu \leq \mu_1$, vale

$$M(h) \leq \frac{1 + 2C(\lambda, \mu_1)T}{c(E)T} ||y^T||^2, \tag{2.43}$$

provando assim (2.23).

Etapa 3. **Sistema Não-Linear.**

Afirmação 2.1. *U_{ad} é convexo, fechado e não-vazio.*

De fato, U_{ad} é não vazio pois mostramos na Etapa 1 que (2.16) é exatamente controlável. A convexidade segue da linearidade de (2.16). Resta-nos mostrar que U_{ad} é fechado. Para isso tomemos $e = y(t)$ em (2.16), obtendo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||y(t)||^2 + 2\mu||D(y)||^2 + \lambda||y||^2_{\Gamma_0} = \int_{\Gamma_0} v\gamma \cdot y d\Gamma.$$

Integrando a última equação em $(0, t)$ obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}||y(t)||^2 + 2\mu \int_0^t ||D(y)||^2 dt + \lambda \int_0^t ||y||^2_{\Gamma_0} dt \\ &= \int_0^t \int_{\Gamma_0} v\gamma \cdot y d\Gamma dt \leq ||v||_{L^2(\Gamma_0 \times (0,T))} ||\gamma \cdot y||_{L^2(\Gamma_0 \times (0,t))}.\end{aligned}$$

Utilizando o Lema 2.2 e a estimativa (2.38), temos

$$\frac{1}{2}||y(t)||^2 + c\int_0^t ||y(s)||^2 ds \leq C||v||_{L^2(\Gamma_0 \times (0,T))} \left(\int_0^t ||y(s)||^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.44}$$

que nos dá

$$||y(t)||^2 \leq \widehat{C}||v||^2_{L^2(\Gamma_0 \times (0,T))} \quad (\widehat{C} > 0). \tag{2.45}$$

Tomando $t = T$ e usando a linearidade de (2.16), a desigualdade acima nos diz que U_{ad} é fechado.

Agora podemos usar o Teorema 1.10 e escolher para cada h dado em $L^2(0, T; E)$ o único $v \in U_{ad}$, tal que

$$\frac{1}{2}\int_{\Gamma_0 \times (0,T)} v^2 d\Gamma dt = M(h). \tag{2.46}$$

Definimos deste modo uma aplicação contínua $h \mapsto v$ de $L^2(0, T; E)$ em $L^2(\Gamma_0 \times (0, T))$. Se denotarmos por $y = y(h)$ a solução de (2.16) com o controle v, podemos considerar a composta destas duas aplicações e definir uma aplicação contínua $G : L^2(0, T; E) \to L^2(0, T; E)$, que associa h a $y(h)$.

Integrando a desigualdade (2.45) em $(0,T)$, concluimos que

$$\left(\int_0^T ||y(s)||^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \leq \widehat{C}||v||_{L^2(\Gamma_0\times(0,T))}, \tag{2.47}$$

à qual, juntamente com (2.43) e (2.46), diz-nos que $K = Im(G)$ é um conjunto limitado de $L^2(0,T;E)$.

Utilizando a mesma notação, restringiremos agora G a K.

Afirmação 2.2. *$G : K \to K$ admite um ponto fixo.*

Assumindo por um momento que a afirmação acima é verdadeira concluimos a prova dos Teoremas 2.1 e 2.2, pois se h é um ponto fixo, então em vista de (2.16) e da Afirmação 2.1, o Teorema 2.1 vale. Além disso, para qualquer h, temos a estimativa uniforme (2.23), assim o controle v satisfaz as condições do Teorema 2.2.

Portanto resta-nos provar a afirmação acima.

Podemos, se necessário, tomar o fecho e a envoltória convexa de K, que ainda sim teremos conjuntos limitados, portanto já podemos tomar K fechado e convexo.

De acordo com o Teorema de Schauder (Teorema 1.12) é suficiente mostrar que $G(K)$ é relativamente compacto em K. Para isso, utilizaremos o teorema de Compacidade de Aubin-Lions (Teorema 1.13).

Primeiro mostraremos que

$$y_t \text{ permanece em um conjunto limitado de } L^2(0,T;E) \text{ quando } h \text{ varia em } K. \tag{2.48}$$

Para provar a afirmação acima, observamos primeiro que, de (2.16), vale o seguinte:

$$\begin{aligned} |(y_t,e)| \;\; &\leq \;\; \alpha||h(t)||||\nabla y||||e|| + 2\mu||D_{ij}(y(t))||||Dij(e)|| \\ &\quad +\lambda||y(t)||_{\Gamma_0}||e||_{\Gamma_0} + ||v(t)||_{L^2(\Gamma_0)}||\gamma\cdot e||_{L^2(\Gamma_0)}, \end{aligned}$$

o que implica

$$|(y_t,e)| \leq C\big[||h(t)||||y(t)|| + (\lambda+\mu)||y(t)|| + ||v(t)||_{L^2(\Gamma_0)}\big]||e||, \; \forall e \in E,$$

uma vez que E é de dimensão finita, todas as suas normas são equivalentes. Dessa forma

$$||y_t(t)|| \leq C\big[||h(t)||||y(t)|| + (\lambda+\mu)||y(t)|| + ||v(t)||_{L^2(\Gamma_0)}\big].$$

Por $(2.43), (2.45)$ e (2.46) temos que y é limitado em $L^\infty(0,T;E)$ uniformemente. Portanto a desigualdade acima nós dá (2.48). Então temos que $G(K)$ é limitado em $W = \{v; v \in L^2(0,T;E), \frac{dv}{dt} \in L^2(0,T;E)\}$, e podemos utilizar o Teorema 1.13, com $B_0 = B = B_1 = E$ e $p_0 = p_1 = 2$, para concluir que $G(K)$ é relativamente compacto em $K \subset L^2(0,T;E)$, provando assim a afirmação e que, consequentemente, os Teoremas 2.1 e 2.2 valem. ■

Observação 2.3. *Como vimos acima a condição* (2.12) *desempenha um papel crucial na demostração dos Teoremas* 2.1 *e* 2.2. *É evidente que este tipo de condição nunca é satisfeito por problemas unidimensionais, pois a dimensão do span é no máximo* 2. *Entretanto, nós não podemos excluir, a priori, a controlabilidade de aproximações de Galerkin quando este tipo de condição não é satisfeita, por isso na próxima seção estudaremos a controlabilidade de aproximações de Galerkin da equação Burgers e provaremos um resultado de controlabilidade local.*

Observação 2.4. *Quando no sistema de Navier-Stokes o controle é considerado distribuido em um pequeno subconjunto $\omega \subset \Omega$, isto é,*

$$\begin{cases} y_t + y\cdot\nabla y - \mu\Delta y = -\nabla p + v1_\omega & em \;\; \Omega\times(0,T), \\ \nabla\cdot y = 0 & em \;\; \Omega\times(0,T), \\ y = 0 & em \;\; \Gamma\times(0,T), \\ y(x,0) = y^0(x) & em \;\; \Omega, \end{cases} \tag{2.49}$$

pode-se obter, utilizando os mesmos argumentos deste capítulo, a controlabilidade exata para as aproximações de Galerkin para o sistema (2.49). Neste caso a hipótese natural sobre a base $\{e_1,\ldots,e_N\}$ de E é que

$$e_1|_\omega,\ldots,e_N|_\omega \text{ são linearmente independentes.}$$

Este resultado de controle interno foi obtido por Lions-Zuazua em [27].

2.3 Equação de Burgers

Consideramos a equação de Burgers $1-D$ no intervalo $\Omega=(0,1)$, com controle agindo no extremo $x=1$;

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + yy_x = 0 \ \text{ em } (0,1)\times(0,T), \\ y(0,t)=0;\ y_x(1,t)=v(t) \ \text{ sobre } (0,T), \\ y(x,0)=0,\ (0,1). \end{cases} \tag{2.50}$$

Consideremos o espaço de Hilbert $V_2=\{u\in H^1(0,1);\ u(0)=0\}$ e $\{e_i\}_{i\geq 1}$uma base de V_2. Seja $E=span[e_1,\ldots,e_N]$ o subspaço de dimensão finita de V_2 e introduzimos a aproximação de Galerkin para (2.50):

$$\begin{cases} (y_t,e)+(y_x,e_x)+(yy_x,e)=v(t)e(1),\ \forall e\in E, \\ y\in C([0,T];E);\ y(0)=0. \end{cases} \tag{2.51}$$

Para cada $v\in L^2(0,T)$ o problema acima tem somente uma solução.

Analisaremos a controlabilidade exata de (2.51), isto é, dado $y^T\in E$ procuramos $v\in L^2(0,T)$ tal que a solução de (2.51) satisfaz

$$y(T)=y^T. \tag{2.52}$$

Claramente isto é uma situação completamente degenerada, uma vez que qualquer que seja o espaço E, o subespaço gerado por $\{e(1)\}_{e\in E}$ têm dimensão 1. Assim o análogo de (2.11) nunca é satisfeito.

Olhando para (2.51) vê-se que temos de $N(=\ dim\ E)$ equações e dispomos somente de um controle $v\in L^2(0,T)$ para todas elas. Isto está em contraste com a situação encontrada na seção anterior, onde tinhamos N equações e também N controles.

Para analisar a controlabilidade de (2.51), consideramos o caso particular em que

$$E=span[\sin(\frac{\pi x}{2}),\ldots,\sin(\frac{(2N+1)\pi x}{2})]. \tag{2.53}$$

Observamos que neste caso $e_j=\sin(\frac{(2j+1)\pi x}{2})$ são as autovetores do Laplaciano com condições de fronteira $u(0)=u_x(1)=0$.

Para obtermos resultados de controlabilidade para (2.51) iremos utilizar o Teorema $A.1$. Por isso analisaremos a linearização de (2.51) em torno de $y=0$, isto é,

$$\begin{cases} (y_t, e) + (y_x, e_x) = v(t)e(1), \ \forall e \in E \\ y \in C([0,T]; E); \ y(0) = 0. \end{cases} \tag{2.54}$$

Notemos que (2.54) é a aproximação de Galerkin do seguinte sistema associado à equação do calor:

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} = 0 \ \text{ em } \ (0,1) \times (0,T) \\ y(0,t) = 0; \ y_x(1,t) = v(t) \ \text{ sobre } \ (0,T) \\ y(x,0) = 0, \ \text{ em } \ (0,1). \end{cases} \tag{2.55}$$

O seguinte teorema vale:

Teorema 2.3. *A aproximação de Galerkin* (2.54)*, com E como em* (2.53)*, é exatamente controlável.*

Prova: Assim como na Etapa 1 da seção anterior, precisamos apenas considerar $f \in E$ e mostrar que se

$$(y(T;v), f) = 0, \quad \forall v \in L^2(0,T), \tag{2.56}$$

então $f \equiv 0$.

Analogamente à seção anterior, consideremos o sistema adjunto

$$\begin{cases} -(\varphi_t, e) + (\varphi_x, e_x) = 0, \ \forall e \in E \\ \varphi \in C([0,T]; E), \ \varphi(T) = f \in E. \end{cases} \tag{2.57}$$

Tomando $e = y(t)$ em (2.57), onde $y(t)$ é a única solução de (2.54) e, em seguida, integrando por partes, segue que

$$(y(T), f) = \int_0^T v(t)\varphi(1)dt. \tag{2.58}$$

Supondo (2.56), obtemos

$$\int_0^T v(t)\varphi(1)dt = 0, \ \forall v \in L^2(0,T) \tag{2.59}$$

e segue que $\varphi(1,t) \equiv 0$.

Escrevendo

$$f = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j e_j,$$

a solução φ de (2.57) pode ser computada explicitamente :

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j e^{-(\frac{2j+1}{2})^2\pi^2(T-t)} e_j.$$

Então

$$\int_0^T |\varphi(1,t)|^2 dt = \int_0^T \left| \sum_{j=1}^{N} \alpha_j (-1)^j e^{-(\frac{2j+1}{2})^2\pi^2(T-t)} \right|^2 dt = 0. \tag{2.60}$$

Usando o fato que as funções

$$\left\{ e^{-\pi^2 \frac{(T-t)}{4}}, \dots, e^{-(2N+1)^2\pi^2 \frac{(T-t)}{4}} \right\}$$

são linearmente independentes em $L^2(0,T)$, concluimos que $\alpha_j = 0,\ \forall j = 1,\dots,N$ e portanto $\varphi \equiv 0$. Dessa forma podemos concluir que $f \equiv 0$. ∎

Observação 2.5. *Note que, embora o análogo da condição* (2.11) *não é verificada, o sistema* (2.54) *é exatamente controlável.*

Combinando a controlabilidade exata do sistema linear (2.54) e o Teorema A.1, temos o seguinte resultado de controlabilidade local para (2.51).

Teorema 2.4. *Seja E como em (2.51). Então o sistema (2.51) é localmente controlável no seguinte sentido: Para todo $T > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $y^T \in E$ com $||y^T|| \leq \epsilon$ existe $v \in L^2(0,T)$ tal que a solução de (2.51) satisfaz (2.52).*

Prova: Consideremos o seguinte espaço de Banach

$$G = \{(y,v) \in C([0,T];E) \times L^2(0,T);\ y_x(1,t) = v(t), y(0,t) = 0 \text{ e } y(0) = 0\},$$

temos que é G é fechado em $C([0,T];E) \times L^2(0,T)$ e portanto, G é um espaço de Banach.

Definindo $\mathcal{A} : G \longrightarrow L^2(0,T;E) \times E$ por

$$\mathcal{A}(y,v) = (y_t - y_{xx} + yy_x, y(T)),$$

então

$$\mathcal{A}(0,0) = (0,0).$$

Pela definição de $\mathcal{A}$ vê-se que todos os termos, exceto yy_x, são lineares e contínuos. Entretanto a aplicação

$$\big((y,v),(\tilde{y},\tilde{v})\big) \mapsto y\tilde{y}_x$$

é bilinear e contínua de G em $L^2(0,T;E)$. Segue-se que $\mathcal{A} \in C^1(G; L^2(0,T;E) \times E)$ e

$$\mathcal{A}'(0,0)(y,v) = (y_t - y_{xx}, y(T)), \ \forall (y,v) \in L^2(0,T;E) \times E.$$

Provemos agora que $\mathcal{A}'(0,0) : G \longrightarrow L^2(0,T;E) \times E$ é sobrejetiva.

Consideremos $f \in L^2(0,T;E)$ e $y^T \in E$. Precisamos encontrar (y,v) tal que $\mathcal{A}'(0,0)(y,v) = (f, y^T)$. Notemos que isto é equivalente a encontrar um controle $v \in L^2(0,T)$ tal que a solução para a aproximação de Galerkin para o seguinte sistema associado à equação do calor

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} = f \ \text{ em } \ (0,1) \times (0,T), \\ y(0,t) = 0; \ y_x(1,t) = v(t) \ \text{ sobre } \ (0,T), \\ y(x,0) = 0, \ \text{ em } \ (0,1), \end{cases} \tag{2.61}$$

satisfaz (2.52).

Reescrevamos a solução de (2.61) como sendo $y = z + w$, onde z e w são soluções dos sistemas

$$\begin{cases} z_t - z_{xx} = f \ \text{ em } \ (0,1) \times (0,T), \\ z(0,t) = z_x(1,t) = 0 \ \text{ sobre } \ (0,T), \\ z(x,0) = 0, \ \text{ em } \ (0,1) \end{cases} \tag{2.62}$$

e

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 \ \text{ em } \ (0,1) \times (0,T), \\ w(0,t) = y_x(1,t) = v(t) \ \text{ sobre } \ (0,T), \\ w(x,0) = 0, \ \text{ em } \ (0,1), \end{cases} \tag{2.63}$$

respectivamente.

Pelo Teorema 2.3, temos que a solução w para a aproximação de Galerkin (2.63) com controle $v \in L^2(0,T)$ satisfaz $w(T) = y^T - z(T)$, o que implica (2.52). Portanto $\mathcal{A}'(0,0) : G \longrightarrow L^2(0,T;E) \times E$ é sobrejetiva.

Aplicando o teorema $A.1$ o resultado segue. $\blacksquare$

Capítulo 3

Controlabilidade local exata para trajetórias do sistema de Navier-Stokes

Neste capítulo estudaremos a controlabilidade local exata para trajetórias das equações de Navier-Stokes com controle interno distribuído em conjuntos pequenos. Primeiramente demonstraremos uma desiguadade do tipo Carleman para o sistema de Navier-Stokes linearizado, à qual nos permitirá concluir a controlabilidade nula em qualquer tempo $T > 0$. Utilizando um teorema de função inversa e uma hipótese adicional de regularidade sobre as trajetórias, provaremos um resultado local concernente a controlabilidade exata para as trajetórias do sistema de Navier-Stokes. Os resultados deste capítulo foram obtidos por E. Fernández-Cara, S. Guerrero, O. Yu. Imanuvilov e J. P. Puel em [12].

3.1 Formulação do problema e resultados principais

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $(N = 2$ ou $3)$ aberto, limitado, conexo e com fronteira regular. Seja $\omega \subset \Omega$ um subconjunto aberto, não-vazio e $T > 0$. Neste capítulo usaremos $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Sigma = \partial\Omega \times (0,T)$.

Consideremos o sistema de Navier-Stokes:

$$\begin{cases} y_t + y \cdot \nabla y - \Delta y + \nabla p = v 1_\omega & \text{em } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{em } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y^0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Aqui v é a função controle que age sobre ω.

Assim como no capítulo anterior, introduzimos os seguintes espaços usuais no contexto de Navier-Stokes:

$$V = \{\varphi \in H_0^1(\Omega)^N;\ \nabla \cdot \varphi = 0 \text{ em } \Omega\} \tag{3.2}$$

$$H = \{\varphi \in L^2(\Omega)^N;\ \nabla \cdot \varphi = 0 \text{ em } \Omega,\ \varphi \cdot \nu = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}. \tag{3.3}$$

Vamos agora estabelecer o conceito de *controlabilidade exata para as trajetórias* para o sistema de Navier-Stokes.

Definição 3.1. *Uma trajetória para* (3.1) *é uma solução* $\overline{y}$ *do sistema:*

$$\begin{cases} \overline{y}_t + \overline{y} \cdot \nabla \overline{y} - \Delta \overline{y} + \nabla \overline{p} = 0 & \textit{em } Q, \\ \nabla \cdot \overline{y} = 0 & \textit{em } Q, \\ \overline{y} = 0 & \textit{sobre } \Sigma, \\ \overline{y}(0) = \overline{y}^0 & \textit{em } \Omega. \end{cases} \tag{3.4}$$

Dada uma trajetória $\overline{y}$, o problema da controlabilidade exata para as trajetórias do sistema de Navier-Stokes é, basicamente, encontrar um controle v tal que pelo menos uma solução de (3.1) satisfaça

$$y(T) = \overline{y}(T) \quad \text{em} \quad \Omega.$$

É interessante ver que, mesmo se não pudermos alcançar todo elemento do espaço estado, a meta aqui é alcançar (em um tempo finito T) qualquer ponto sobre qualquer trajetória do mesmo operador.

Até o presente momento não se conhece qualquer resultado global relativo à controlabilidade exata para as trajetórias de (3.1).

Neste capítulo provaremos um resultado de *controlabilidade local exata para as trajetórias* do sistema de Navier-Stokes. Antes, pórem, como foi dito anteriormente, iremos supor algumas hipóteses adicionais de regularidade sobre as trajetórias. Consideremos

$$\overline{y} \in L^\infty(Q)^N,\ \overline{y}_t \in L^2\big(0,T;L^\sigma(\Omega)\big)^N, \quad \text{onde} \begin{cases} \sigma > \frac{6}{5} & \text{se} \quad N=3, \\ \sigma > 1 & \text{se} \quad N=2. \end{cases} \tag{3.5}$$

O resultado de controlabilidade (local) para as trajetórias é dado pelo

Teorema 3.1. *Suponhamos* (3.5)*, então existe* $\delta > 0$ *tal que, para qualquer* $y^0 \in L^{2N-2}(\Omega)^N \cap H$ *satisfazendo* $||y^0 - \overline{y}^0||_{L^{2N-2}(\Omega)^N} \leq \delta$*, existe um controle* $v \in L^2(\omega \times (0,T))^N$ *e uma solução associada* (y,p) *para* (3.1) *tal que*

$$y(T) = \overline{y}(T) \quad \textit{em} \quad \Omega.$$

Nossa estratégia para demonstrar o teorema acima é, basicamente, provar, utilizando uma desigualdade tipo Carleman, um resultado de controlabilidade para o sistema de Navier-Stokes linearizado em torno de $\overline{y}$ e, em seguida, utilizar o Teorema $A.1$.

Consideremos o seguinte sistema linearizado (com controle):

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + y\cdot\nabla\overline{y} + \overline{y}\cdot\nabla y + \nabla p = f + v1_\omega & \text{em} \quad Q, \\ \nabla\cdot y = 0 & \text{em} \quad Q, \\ y = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ y(0) = y^0 & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{3.6}$$

Introduzamos o sistema adjunto associado à (3.6):

$$\begin{cases} -\varphi_t - D\varphi\overline{y} - \Delta\varphi + \nabla\pi = g & \text{em} \quad Q, \\ \nabla\cdot\varphi = 0 & \text{em} \quad Q, \\ \varphi = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ \varphi(T) = \varphi^0 & \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.7}$$

onde $D\varphi = \nabla\varphi + \nabla\varphi^t$.

Observação 3.1. *Sejam* $\varphi^0 \in H$ *e* $g \in L^2(Q)^N$ *dados e seja* (φ,π) *a solução única correspondente para* (3.7)*. Sabemos que* $\varphi \in L^2(0,T;V) \cap C^0([0,T];H)$ *(ver Lema A.1). Agora, seja* $\gamma \in C^1([0,T])$ *verificando* $\gamma(T) = 0$*. Então* $(\tilde{\varphi},\tilde{\pi}) := (\gamma\varphi,\gamma\pi)$ *resolve o sistema:*

$$
\begin{cases}
-\tilde{\varphi}_t - D\tilde{\varphi}\overline{y} - \Delta\tilde{\varphi} + \nabla\tilde{\pi} = \gamma g - \gamma'\varphi & em \;\; Q, \\
\nabla \cdot \tilde{\varphi} = 0 & em \;\; Q, \\
\tilde{\varphi} = 0 & sobre \;\; \Sigma, \\
\tilde{\varphi}(T) = 0 & em \;\; \Omega.
\end{cases}
\tag{3.8}
$$

Então, utilizando o Lema A.1, concluimos que

$$
\pi(t) \in H^1(\Omega), \;\; \varphi(t) \in H^2(\Omega)^N \;\; e \; \varphi_t \in L^2(\Omega)^N,
$$

para quase todo $t \in (0, T)$.

Por ser a principal ferramenta utilizada na demonstração do Teorema 3.1, na próxima seção provaremos a seguinte desigualdade de Carleman:

Teorema 3.2. *Supondo que* (3.5) *vale. Então existem três constantes positivas* $\hat{s},\ \hat{\lambda},\ C$, *dependendo somente de* Ω *e* ω *tal que, para todo* $\varphi^0 \in H$ *e* $g \in L^2(Q)^N$, *a solução correspondente para* (3.7) *verifica:*

$$
\begin{aligned}
& s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2 dxdt + s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla\varphi|^2 dxdt \\
& + s^{-1} \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^{-1}(|\varphi_t|^2 + |\Delta\varphi|^2) dxdt \\
& \leq C(1+T^2)\bigg(s^{\frac{15}{2}}\lambda^{20} \iint_Q e^{-4s\hat{\alpha}+2s\alpha^*}\xi^{*\frac{15}{2}}|g|^2 dxdt \\
& + s^{16}\lambda^{40} \iint_{\omega\times(0,T)} e^{-8s\hat{\alpha}+6s\alpha^*}\xi^{*16}|\varphi|^2 dxdt \bigg),
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

para todo $\lambda \geq \hat{\lambda}(1 + ||\overline{y}||_\infty + ||\overline{y}_t||^2_{L^2(0,T;L^\sigma(\Omega)^N)} + e^{\hat{\lambda}T||\overline{y}||^2_\infty})$ *e* $s \geq \hat{s}(T^4 + T^8)$ *e funções (pesos) positivas* $\alpha, \xi, \hat{\alpha}, \alpha^*, \xi^*$ *apropriadamente definidas (ver* (3.10)*).*

Esta desigualdade de Carleman nos permitirá deduzir um resultado de controlabilidade nula para o sistema (3.6) com o lado direito satisfazendo propriedades adequadas de decrescimento perto de $t = T$.

3.2 Desigualdade de Carleman

Nesta seção iremos deduzir a desigualdade de Carleman (Teorema 3.2). Para este fim, primeiro definimos algumas funções pesos que serão essenciais na sequência. A função peso básica será a função $\eta^0 \in C^2(\overline{\Omega})$ verificando:

$$
\eta^0 > 0 \in \Omega, \;\; \eta^0 = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \;\; |\nabla\eta^0| > 0 \in \overline{\Omega\backslash\omega_1},
$$

onde $\omega_1 \subset\subset \omega$ é um aberto não-vazio. A existência de tal função η^0 é garantida pelo Lema $A.4$ (ver Apêndice).

Para números reais positivos s e λ, introduzamos:

$$\begin{aligned}
&\alpha(x,t) = \tfrac{e^{\frac{5}{4}\lambda m||\eta^0||_\infty} - e^{\lambda(m||\eta^0||_\infty + \eta^0(x))}}{t^4(T-t)^4},\\
&\xi(x,t) = \tfrac{e^{\lambda(m||\eta^0||_\infty + \eta^0(x))}}{t^4(T-t)^4},\\
&\hat{\alpha}(t) = \min_{x\in\overline{\Omega}} \alpha(x,t) = \frac{e^{\frac{5}{4}\lambda m||\eta^0||_\infty} - e^{\lambda(m+1)||\eta^0||_\infty}}{t^4(T-t)^4},\\
&\alpha^*(t) = \max_{x\in\overline{\Omega}} \alpha(x,t) = \frac{e^{\frac{5}{4}\lambda m||\eta^0||_\infty} - e^{\lambda m||\eta^0||_\infty}}{t^4(T-t)^4},\\
&\xi^*(t) = \max_{x\in\overline{\Omega}} \xi(x,t) = \frac{e^{\lambda(m+1)||\eta^0||_\infty}}{t^4(T-t)^4},\ \hat{\xi}(t) = \min_{x\in\overline{\Omega}} \xi(x,t) = \frac{e^{\lambda m||\eta^0||_\infty}}{t^4(T-t)^4},\\
&\hat{\theta}(t) = s\lambda e^{-s\hat{\alpha}}\xi^*,\ \theta(t) = s^{\frac{15}{4}} e^{-2s\hat{\alpha}+s\alpha^*}\xi^{*\frac{15}{4}},
\end{aligned} \tag{3.10}$$

onde $m > 4$ é um real fixo.

Observação 3.2. *O fato de ser $m > 4$ é para que todas as funções peso definidas acima sejam positivas.*

Funções peso como α, ξ, α^* foram introduzidas em [16] para se obter estimativas de Carleman para o sistema de Stokes adjunto.

Daqui em diante fixaremos a seguinte notação:

$$\begin{aligned}
I(s,\lambda,\varphi) = s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2 dxdt + s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla\varphi|^2 dxdt\\
+ s^{-1}\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^{-1}(|\varphi_t|^2 + |\Delta\varphi|^2)dxdt.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Etapa 1. Estimativa de Carleman para a equação do calor

Aplicando o Lema $A.3$ para cada componente φ_i de φ solução de (3.7) e notando que cada componente satisfaz uma equação do calor, cujo lado direito pertencente a $L^2(Q)$ é dado por

$$G_i = g_i + (D\varphi\overline{y})_i - \partial_i\pi,$$

garantimos a existência de uma constante $C_1(\Omega,\omega) = C_1$ e dois números $\lambda_0(\Omega,\omega) = \lambda_0 \geq 1$ e $s_0(\Omega,\omega) = s_0 > 0$ tais que

$$\begin{aligned}
I(s,\lambda,\varphi) \leq C_1\Big(s^3\lambda^4 \iint_{\omega_1\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2 dxdt\\
+ \iint_Q e^{-2s\alpha}\big(|g|^2 + |D\varphi\overline{y}|^2 + |\nabla\pi|^2\big)dxdt\Big),
\end{aligned} \tag{3.12}$$

para todo $s \geq s_0(T^7 + T^8)$ e todo $\lambda \geq \lambda_0$.

Agora iremos eliminar o termo envolvendo $D\varphi\overline{y}$ no lado direito de (3.12).

Escolhendo $s_1 \geq C$ e $\lambda_1 \geq \sqrt{2C}$ temos que

$$\frac{1}{2}\lambda^2 \geq C||\overline{y}||_\infty^2 \text{ e } s\xi \geq \frac{1}{C}s_1 \geq 1,$$

pois podemos fazer $\xi^{-1} \leq CT^8$. Portanto, segue que

$$C_1|D\varphi\overline{y}|^2 \leq C||\overline{y}||_\infty^2|\nabla\varphi|^2 \leq Cs||\overline{y}||_\infty^2\xi|\nabla\varphi|^2 \leq \frac{1}{2}s\lambda^2\xi|\nabla\varphi|^2,$$

para algum $C = C(\Omega, \omega) > 0$, $s \geq s_1(\Omega, \omega)T^8$ e $\lambda \geq \lambda_1(\Omega, \omega)$.

Combinando a desigualdade acima, e o termo com $D\varphi\overline{y}$ no lado direito de (3.12), deduzimos facilmente de (3.12) que

$$I(s, \lambda, \varphi) \leq C_2\left(s^3\lambda^4 \iint_{\omega_1\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2 dxdt + \iint_Q e^{-2s\alpha}\big(|g|^2 + |\nabla\pi|^2\big)dxdt\right), \tag{3.13}$$

para alguma constante $C_2 = C_2(\Omega, \omega)$ e todo $s \geq s_2(T^7 + T^8)$ e $\lambda \geq \lambda_2(\Omega, \omega)(1 + ||\overline{y}||_\infty^2)$.

Etapa 2. Estimativa da pressão

Nesta etapa limitaremos a integral de $|\nabla\pi|^2$ no lado direito de (3.13) em termos de uma integral local de $|\pi|^2$, um termo relativo ao traço de π e outros dois termos globais envolvendo $|g|^2$ e $|\nabla\varphi|^2$ e, com um argumento similar ao da etapa anterior, eliminaremos o termo em $|\nabla\varphi|^2$.

Apliquemos o operador divergência à equação (3.7) para obtermos

$$\Delta\pi(t) = \nabla \cdot (D\varphi\overline{y} + g)(t) \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{3.14}$$

para quase todo $t \in (0, T)$.

Observemos que o lado direito de (3.14) pertence a $H^{-1}(\Omega)$. Sendo $\pi(t) \in H^1(\Omega)$, podemos aplicar o Teorema A.2 para garantir existência de $\overline{C}_1(\Omega, \omega) > 0$ e dois números $\overline{\lambda} > 1$ e $\overline{\tau} > 1$ tais que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla\pi(t)|^2 e^{2\tau\eta}dx \quad &\leq \quad \overline{C}_1\bigg(\tau^{\frac{1}{2}}e^{2\tau}||\pi(t)||^2_{H^{1/2}(\partial\Omega)} + \tau\int_\Omega(|D\varphi\overline{y}|^2 + |g|^2)(t)\eta e^{2\tau\eta}dx \\ &+ \quad \int_{\omega_1}(|\nabla\pi|^2 + \tau^2\lambda^2\eta^2|\pi|^2)(t)e^{2\tau\eta}dx\bigg), \text{ q. s. em } (0, T) \end{aligned} \tag{3.15}$$

para todo $\lambda \geq \overline{\lambda}$ e $\tau \geq \overline{\tau}$, onde η é dada por

$$\eta(x) = e^{\lambda\eta_0(x)}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Podemos eliminar a integral local de $|\nabla \pi|^2$ aparecendo em (3.15) ao preço de integrar $|\pi|^2$ em um conjunto aberto ω_2 satisfazendo $\omega_1 \subset\subset \omega_2 \subset\subset \omega$. Para este fim, considere uma função $\zeta \in C_0^2(\omega_2)$ tal que

$$\zeta \equiv 1 \text{ em } \omega_1, \quad 0 \leq \zeta \leq 1.$$

Assim

$$\int_{\omega_1} e^{2\tau\eta} |\nabla \pi(t)|^2 dx \leq \int_{\omega_2} \zeta e^{2\tau\eta} \nabla \pi \cdot \nabla \pi dx.$$

Integrando por partes temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\omega_1} e^{2\tau\eta} |\nabla \pi(t)|^2 dx \leq \int_{\omega_2} \zeta e^{2\tau\eta} \nabla \pi \cdot \nabla \pi dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\omega_2} \nabla(\zeta e^{2\tau\eta}) \cdot \nabla(\pi(t))^2 dx - \left\langle e^{2\tau\eta} \Delta \pi(t), \zeta \pi(t) \right\rangle_{H^{-1}(\omega_2), H_0^1(\omega_2)} \\
&= \frac{1}{2} \int_{\omega_2} \Delta(e^{2\tau\eta} \zeta) \pi(t)^2 dx - \left\langle e^{2\tau\eta} \nabla \cdot (D\varphi \overline{y} + g)(t), \zeta \pi(t) \right\rangle_{H^{-1}(\omega_2), H_0^1(\omega_2)},
\end{aligned} \tag{3.16}$$

uma vez que π satisfaz (3.14).

Observação 3.3. *A priori só sabemos que $\pi(t) \in H^1(\Omega)$. Portanto a função ζ é essencial para obtermos o resutado acima, pois nos permitiu usar a dualidade $\langle H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega) \rangle$ e integrar por partes.*

Uma vez que as funções η_0 e ζ são de classe C^2 e estão fixas, podemos encontrar uma constante $\overline{C}_2(\Omega, \omega) > 0$ tal que

$$|\Delta(e^{2\tau\eta} \zeta)| \leq 2\overline{C}_2 \tau^2 \lambda^2 \eta^2 e^{2\tau\eta} \quad \text{em} \quad \omega_2,$$

para todo $\lambda \geq \overline{\lambda}_0(\Omega, \omega)$. Então o primeiro termo do lado direito de (3.16) tem a seguinte estimativa:

$$\int_{\omega_2} \Delta(e^{2\tau\eta} \zeta) \pi(t)^2 dx \leq \overline{C}_2 \tau^2 \lambda^2 \int_{\omega_2} \eta^2 e^{2\tau\eta} \pi(t)^2 dx. \tag{3.17}$$

Agora, integrando por partes o segundo termo do lado direito de (3.16) obtemos

$$
\begin{aligned}
&-\big\langle e^{2\tau\eta}\nabla\cdot(D\varphi\overline{y}+g)(t),\zeta\pi(t)\big\rangle_{H^{-1}(\omega_2),H_0^1(\omega_2)}\\
&=\int_{\omega_2}\Big(\sum_{i,j=1}^{N}(D_{ij}\varphi\overline{y}_j+g_i)\big(\frac{\partial}{\partial x_i}(e^{2\tau\eta}\zeta)\pi(t)+e^{2\tau\eta}\zeta\frac{\partial}{\partial x_i}\pi(t)\big)dx\\
&=\int_{\omega_2}(D\varphi\overline{y}+g)\cdot\nabla(e^{2\tau\eta}\zeta)\pi(t)dx+\int_{\omega_2}e^{2\tau\eta}\zeta(D\overline{y}+g)\cdot\nabla\pi(t)dx\\
&\leq\overline{C}_3\int_{\omega_2}e^{2\tau\eta}\lambda\tau\eta\left|D\varphi\overline{y}+g\right|\left|\pi(t)\right|dx+\int_{\omega_2}e^{2\tau\eta}\zeta\left|D\varphi\overline{y}+g\right|\left|\nabla\pi(t)\right|dx\\
&\leq\overline{C}_3\int_{\omega_2}e^{2\tau\eta}\frac{1}{2}(\lambda^2\tau^2\eta^2\left|\pi(t)\right|^2+\left|D\varphi\overline{y}+g\right|^2)dx\\
&+\int_{\omega_2}e^{2\tau\eta}\zeta\frac{1}{2}(\left|\nabla\pi(t)\right|^2+\left|D\varphi\overline{y}+g\right|^2)dx\\
&\leq\overline{C}_4\Big(\int_{\omega_2}e^{2\tau\eta}(\lambda^2\tau^2\eta^2\left|\pi(t)\right|^2+\left|D\varphi\overline{y}\right|^2+\left|g\right|^2)dx\Big)\\
&+\frac{1}{2}\int_{\omega_2}e^{2\tau\eta}\zeta(\left|\nabla\pi(t)\right|^2dx, \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

para uma constante $\overline{C}_4(\Omega,\omega)>0$ uma vez que

$$\left|\nabla(e^{2\tau\eta}\zeta)\right|\leq C(\Omega,\omega)\tau\eta\lambda e^{2\tau\eta}\text{ em }\omega_2,\ \text{ para }\lambda\geq\overline{\lambda}_1(\Omega,\omega).$$

De (3.16), (3.17) e (3.18) concluimos que

$$\int_{\omega_1}e^{2\tau\eta}\left|\nabla\pi(t)\right|^2dx\leq\overline{C}_5\big(\lambda^2\tau^2\int_{\omega_2}e^{2\tau\eta}\eta^2\left|\pi(t)\right|^2dx+\int_{\omega_2}e^{2\tau\eta}(\left|D\varphi\overline{y}\right|^2+\left|g\right|^2)(t)dx\big)$$

para $\lambda\geq\overline{\lambda}_2(\Omega,\omega)$ que, juntamente com (3.15), podemos deduzir que:

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega}e^{2\tau\eta}\left|\nabla\pi(t)\right|^2dx\ &\leq\ \overline{C}_6\big(\tau\int_{\Omega}e^{2\tau\eta}\eta(\left|D\varphi\overline{y}\right|^2+\left|g\right|^2)(t)dx\\
&+\ \tau^{\frac{1}{2}}e^{2\tau}\left\|\pi(t)\right\|^2_{H^{1/2}(\partial\Omega)}+\tau^2\lambda^2\int_{\omega_2}e^{2\tau\eta}\eta^2\left|\pi(t)\right|^2dx\big),
\end{aligned}
$$

para $\lambda\geq\overline{\lambda}_2$ e $\tau\geq\overline{\tau}$.

Para conectarmos a última estimativa com (3.13), tomamos

$$\tau=\frac{s}{t^4(T-t)^4}e^{\lambda m\left\|\eta^0\right\|_\infty},$$

multiplicamos por

$$\exp\big\{-2s\frac{e^{5/4\lambda m\left\|\eta^0\right\|_\infty}}{t^4(T-t)^4}\big\}=e^\beta$$

e integramos em $(0,T)$. Assim, observando que

$$
\begin{aligned}
e^{2\tau\eta}e^\beta=\exp^{-2s\alpha},\quad \tau\eta=s\xi,\\
\tau^{\frac{1}{2}}=s^{\frac{1}{2}}\hat{\xi}^{\frac{1}{2}},\quad e^\beta e^{2\tau}=e^{-2s\alpha^*},
\end{aligned}
$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\iint_Q e^{-2s\alpha}|\nabla\pi|^2\,dxdt &\le \overline{C}_7\big(s\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi\,|g|^2\,dxdt + s\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi\,|D\varphi\overline{y}|^2\,dxdt\\
&+ s^{1/2}\int_0^T e^{-2s\alpha^*}\hat{\xi}^{1/2}\,\|\pi(t)\|^2_{H^{1/2}(\partial\Omega)}\,dt\\
&+ s^2\lambda^2\iint_{\omega_2\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^2\,|\pi|^2\,dxdt\big),
\end{aligned}\tag{3.19}$$

para $\lambda \ge \overline{\lambda}_2$ e $s \ge s_0 T^8$.

Observação 3.4. *Veja que τ definido acima será maior que $\overline{\tau}$ se tomarmos $s \ge (\overline{\tau}/2^8)T^8$.*

Etapa 3. Estimativa do traço de π

Seguindo [20], usaremos estimativas clássicas para o sistema de Stokes para obter uma estimativa do terceiro termo do lado direito de (3.19) por integrais globais envolvendo $|g|^2$, $|\varphi|^2$ e $|\nabla\varphi|^2$, com potências adequadas de s e λ. Combinando esta estimativa e as desigualdades (3.13) e (3.19) iremos então absorver as intergrais de $|\varphi|^2$ e $|\nabla\varphi|^2$ com $I(s,\lambda,\varphi)$.

Considere as seguintes funções:

$$\varphi^* = s^{1/4}e^{-s\alpha^*}(\hat{\xi}^{1/4})\varphi, \quad \pi^* = s^{1/4}e^{-s\alpha^*}(\hat{\xi}^{1/4})\pi,$$

que, graças à equação (3.7), resolvem o seguinte sistema:

$$\begin{cases}
-\varphi^*_t - \Delta\varphi^* + \nabla\pi^* = g^* & \text{em } Q,\\
\nabla\cdot\varphi^* = 0 & \text{em } Q,\\
\varphi^* = 0 & \text{sobre } \Sigma,\\
\varphi^*(T) = 0 & \text{em } \Omega,
\end{cases}$$

com

$$g^* = s^{1/4}e^{-s\alpha^*}(\hat{\xi}^{1/4})g + s^{1/4}e^{-s\alpha^*}(\hat{\xi}^{1/4})D\varphi\overline{y} - s^{1/4}(e^{-s\alpha^*}(\hat{\xi}^{1/4}))_t\varphi.$$

Usando o Lema A.1 dado no apêndice, concluimos, em particular, que,

$$\iint_Q (|\pi^*| + |\nabla\pi|^2)dxdt \le \overline{C}_8\iint_Q |g^*|^2\,dxdt.$$

Pela a continuidade do operador traço segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|\pi^*(t)\|^2_{H^{1/2}(\partial\Omega)}\,dt &\le \overline{C}_9\Big(s^{1/2}\iint_Q e^{-2s\alpha^*}(\hat{\xi})^{1/2}\,|g|^2\,dxdt\\
&+ s^{1/2}\,\|\overline{y}\|^2_\infty\iint_Q e^{-2s\alpha^*}(\hat{\xi})^{1/2}\,|\nabla\varphi|^2\,dxdt\\
&+ s^{1/2}\iint_Q \Big|(e^{-2s\alpha^*}(\hat{\xi})^{1/4})_t\Big|^2\,|\varphi|^2\,dxdt\Big).
\end{aligned}\tag{3.20}$$

De acordo com as definições das funções α^* e $\hat{\xi}$ (ver (3.10)), podemos estimar as duas primeiras integrais do lado direito em (3.20) por

$$s\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi\,|g|^2\,dxdt + s\,\|\overline{y}\|_\infty^2\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi\,|\nabla\varphi|^2\,dxdt,$$

para $s \geq \overline{s}_1 T^8$.

Agora iremos obter uma estimativa para a última integral em (3.20). Notemos que

$$(e^{-2s\alpha^*}(\hat{\xi})^{1/4})_t = e^{-s\alpha^*}(-s\alpha_t^*(\hat{\xi})^{1/4} + \frac{1}{4}(\hat{\xi})^{-3/4}(\hat{\xi})_t).$$

Observando que

$$-\alpha_t^* \leq \frac{4T}{t(T-t)}\frac{e^{5/4\lambda m\|\eta^0\|_\infty}}{t^4(T-t)^4},$$

temos que existe $\overline{C}_{10}(\Omega,\omega) > 0$ tal que

$$-s\alpha_t^*\hat{\xi}^{1/4} \leq \overline{C}_{10}sT\hat{\xi}^{3/2}.$$

Podemos ver também que

$$\hat{\xi}_t \leq \frac{\overline{C}_{11}T}{t(T-t)}\hat{\xi}$$

para algum $\overline{C}_{11}(\Omega,\omega) > 0$. Dessa forma

$$\frac{1}{4}\hat{\xi}_t(\hat{\xi})^{-3/4} \leq \overline{C}_{12}T(\hat{\xi})^{1/2},$$

para algum $\overline{C}_{12}(\Omega,\omega) > 0$.

Portanto, usando as estimativas acima, concluimos que:

$$(e^{-2s\alpha^*}(\hat{\xi})^{1/4})_t \leq \overline{C}_{13}e^{-s\alpha^*}(sT\hat{\xi}^{3/2} + T(\hat{\xi})^{1/2}) \leq \overline{C}_{14}(e^{-2s\alpha^*}sT\hat{\xi}^{3/2}),$$

para uma constante $\overline{C}_{13}(\Omega,\omega) > 0$ e $s \geq \overline{s}_2 T^8$. Com isto podemos estimar a última integral em (3.20). Portanto

$$\int_0^T ||\pi^*||^2_{H^{1/2}(\partial\Omega}dt \leq \overline{C}_{14}s^2T^2\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3\,|\varphi|^2\,dxdt.$$

Usando (3.19) e o fato que $\|\pi^*(t)\|^2_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = s^{1/2}e^{-2s\alpha^*}(\hat{\xi}^{1/2})\,\|\pi(t)\|^2_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$, obtemos:

$$\begin{aligned}\iint_Q e^{-2s\alpha}\,|\nabla\pi|^2\,dxdt \;&\leq\; \overline{C}_{14}\big(s\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi\,|g|^2\,dxdt + s\,\|\overline{y}\|_\infty^2\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi\,|\nabla\varphi|^2\,dxdt \\ &+\; s^{5/2}T^2\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3\,|\varphi|^2\,dxdt \\ &+\; s^2\lambda^2\iint_{\omega_2\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^2\,|\pi|^2\,dxdt\big),\end{aligned} \tag{3.21}$$

para $\lambda \geq \overline{\lambda}_0$ e $s \geq \overline{s}_3 T^8$.

Apliquemos esta estimativa em (3.13) para obtermos:

$$
\begin{aligned}
I(s,\lambda;\varphi) \;&\leq\; C_3\big(s^3\lambda^4 \iint_{\omega_1\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3\,|\varphi|^2\,dxdt \\
&+\; s^2\lambda^2 \iint_{\omega_2\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^2\,|\pi|^2\,dxdt + s\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi\,|g|^2\,dxdt \qquad (3.22)\\
&+\; s\,\|\overline{y}\|_\infty^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi\,|\nabla\varphi|^2\,dxdt + s^{5/2}T^2\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3\,|\varphi|^2\,dxdt,
\end{aligned}
$$

para $\lambda \geq \lambda_3(1+\|\overline{y}\|_\infty)$ e $s \geq s_3(T^7+T^8)$.

Como mencionado anteriormente, podemos absorver os dois últimos termos em (3.22) apenas tomando $s \geq s_4 T^4$ e $\lambda \geq \lambda_4\,\|\overline{y}\|_\infty$, de tal modo que

$$C_3 s^{5/2}T^2 \leq \frac{1}{2}s^3 \;\text{ e }\; C_3\,\|\overline{y}\|_\infty^2 \leq \frac{1}{2}\lambda^2.$$

Dessa forma temos a seguinte desigualdade:

$$
\begin{aligned}
I(s,\lambda;\varphi) \;&\leq\; C_4\big(s^3\lambda^4 \iint_{\omega_1\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3\,|\varphi|^2\,dxdt \\
&+\; s^2\lambda^2 \iint_{\omega_2\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^2\,|\pi|^2\,dxdt \\
&+\; s\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi\,|g|^2\,dxdt\big), \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

para $\lambda \geq \lambda_5(1+\|\overline{y}\|_\infty)$ e $s \geq s_5(T^4+T^8)$.

O resto da prova é destinado a eliminar o termo local da pressão aparecendo do lado direito de (3.23). Duas difilculdades aparecem: obter uma estimativa local da pressão em função de um termo local do campo de velocidade não é uma tarefa fácil no sistema tipo Stokes (3.7), e o fato que a função peso multiplicando a pressão depende de x complica muito a tarefa.

Nossa estratégia será a seguinte: primeiro substituimos a função peso na integral local da pressão por outra que não depende de x, mas apenas de t. Isto permitirá reduzir nosso problema a uma estimativa de uma intergral de $|\nabla\pi|^2$ ao invés de $|\pi|^2$. Então, usando a equação verificada por (φ,π) (ver (3.7)), a meta será estimar duas integrais locais envolvendo $|\Delta\varphi|^2$ e $|\varphi_t|^2$.

As definições de $\hat{\alpha}$, ξ^* e $\hat{\theta}$ (ver (3.10)) nos dão:

$$s^2\lambda^2 \iint_{\omega_2\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^2\,|\pi|^2\,dxdt \leq \iint_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2\,|\pi|^2\,dxdt.$$

Podemos assumir, em virtude de uma formulação fraca para o sistema de Navier-Stokes, que a pressão π tem medida zero em ω_2, isto é

$$\int_{\omega_2} \pi(t)dx = 0,$$

para cada $t \in (0,T)$.

Assim, usando a desigualdade de Poincaré-Wirtinger (Teorema 1.4), existe $C_5 > 0$ tal que

$$\int_{\omega_2} |\pi(t)|^2 \, dx \leq C_5 \int_{\omega_2} |\nabla \pi(t)|^2 \, dx,$$

donde temos que

$$\iint_{\omega_2 \times (0,T)} |\hat{\theta}|^2 \, |\pi|^2 \, dxdt \leq C_5 \iint_{\omega_2 \times (0,T)} |\hat{\theta}|^2 \, |\nabla \pi|^2 \, dxdt.$$

Então, de (3.7), segue que

$$\begin{aligned} s^2\lambda^2 \iint_{\omega_2 \times (0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^2 \, |\pi|^2 \, dxdt \;\; &\leq \;\; C_6 \Big(\iint_{\omega_2 \times (0,T)} |\hat{\theta}|^2 \, |g|^2 \, dxdt \\ &+ \;\; \iint_{\omega_2 \times (0,T)} |\hat{\theta}|^2 \, |\varphi_t|^2 \, dxdt \\ &+ \;\; \|\overline{y}\|_\infty^2 \iint_{\omega_2 \times (0,T)} |\hat{\theta}|^2 \, |\nabla \varphi|^2 \, dxdt \\ &+ \;\; \iint_{\omega_2 \times (0,T)} |\hat{\theta}|^2 \, |\Delta \varphi|^2 \, dxdt \Big), \qquad (3.24) \end{aligned}$$

Etapa 4. Estimativa da integral local envolvendo $|\Delta \varphi|^2$

Nesta etapa iremos limitar o último termo no lado direito de (3.24) . Primeiro introduzimos dois conjuntos abertos ω_3 e ω_4 de forma que

$$\omega_2 \subset\subset \omega_3 \subset\subset \omega_4 \subset\subset \omega,$$

e uma função $\rho \in \mathcal{D}(\omega_4)$, com $\rho \equiv 1$ em ω_3.

Em seguida definamos

$$u(x,t) = \hat{\theta}(t)\rho(x)\Delta\varphi(x, T-t) \;\; \text{em } \mathbb{R}^N \times (0,T).$$

Notemos que u é zero fora de ω_4.

A meta desta etapa é estimar a seguinte integral:

$$\iint_{\omega_2 \times (0,T)} |u|^2 \, dxdt.$$

Primeiro vejamos que u satisfaz uma equação do calor. De fato, aplicando o operador de Laplace em (3.7), e tendo em mente (3.14), vemos que

$$(\Delta\varphi(T-t))_t - \Delta(\Delta\varphi(T-t)) = f \quad \text{em} \quad Q, \tag{3.25}$$

onde

$$f = \Delta(D\varphi\overline{y})(T-t) + \Delta g(T-t) - \nabla(\nabla\cdot(D\varphi\overline{y})(T-t)) - \nabla(\nabla\cdot g(T-t)).$$

De (3.25) deduzimos que

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = F & \text{em } \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ u(0) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{3.26}$$

onde

$$F = \hat{\theta}\rho f + \hat{\theta}'\rho\Delta\varphi(T-t) - 2\hat{\theta}\nabla\rho\cdot\nabla\Delta\varphi(T-t) - \hat{\theta}\Delta\rho\Delta\varphi(T-t).$$

Observação 3.5.

1. *O sistema (3.26) possui um única solução* $u \in L^2(\mathbb{R}^N \times (0,T))^N$ *(ver [33]).*

2. *Sabemos a priori que* $u \in L^2(\mathbb{R}^N \times (0,T))^N$ *(veja observação 3.1), e é facil ver que* $F \in L^2(0,T;H^{-2}(\mathbb{R}^N)^N)$*. Então, da equação (3.26), temos que* $u_t \in L^2(0,T;H^{-2}(\mathbb{R}^N)^N)$ *e, portanto, segue que o cálculo de* u *em* $t=0$ *faz sentido.*

3. *Podemos definir* $\hat{\theta}(0) = \hat{\theta}(T) = 0$ *e obter que* $\hat{\theta} \in C[0,T]$*. Logo é natural que* $u(0) = 0$*.*

Agora, reescreveremos F em um modo mais apropriado, isto é, como a soma de duas funções: a primeira, juntamos todos os termos onde encontramos derivadas parciais de segunda ordem de g, $D\varphi\overline{y}$ e φ; na segunda, incluimos todos os outros termos. Notamos que esta segunda função tem suporte contido em $\omega_4\backslash\overline{\omega}_3$ (pois derivadas de ρ aparecem em todas elas). Precisamente, colocamos $F = F_1 + F_2$, com

$$\begin{aligned} F_1 &= \hat{\theta}\Delta(\rho(D\varphi\overline{y})(T-t)) + \hat{\theta}\Delta(\rho g(T-t)) - \hat{\theta}\nabla(\nabla\cdot(\rho(D\varphi\overline{y})(T-t)))) \\ &\quad -\hat{\theta}\nabla(\nabla\cdot(\rho g(T-t))) + \hat{\theta}'\Delta(\rho\varphi(T-t)) \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
F_2 &= -2\hat{\theta}\nabla\rho\cdot\nabla(D\varphi\overline{y})(T-t)-\hat{\theta}\Delta\rho(D\varphi\overline{y})(T-t)-2\hat{\theta}\nabla\rho\cdot\nabla g(T-t)\\
&\quad -\hat{\theta}\Delta\rho g(T-t)+\hat{\theta}\nabla(\nabla\rho\cdot(D\varphi\overline{y})(T-t))+\hat{\theta}\nabla\rho(\nabla\cdot(D\varphi\overline{y})(T-t))\\
&\quad +\hat{\theta}\nabla(\nabla\rho\cdot g(T-t))+\hat{\theta}\nabla\rho(\nabla\cdot g(T-t))-2\hat{\theta}'\nabla\rho\cdot\nabla\varphi(T-t)\\
&\quad -\hat{\theta}'\Delta\rho\varphi(T-t)-2\hat{\theta}\nabla\rho\cdot\nabla\Delta\varphi(T-t)-\hat{\theta}\Delta\rho\Delta\varphi(T-t).
\end{aligned}
$$

Notamos que $F, F_1 \in L^2(0,T;H^{-2}(\mathbb{R}^N)^N)$, enquanto $F_2 \in L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}^N)^N)$. Se pudermos encontrar duas funções u^1 e u^2 em $L^2(\mathbb{R}^N\times(0,T))^N$ satisfazendo

$$
\begin{cases}
u^i_t-\Delta u^i=F_i & \text{em } \mathbb{R}^N\times(0,T),\\
u^i(0)=0 & \text{em } \mathbb{R}^N,
\end{cases}
\tag{3.27}
$$

para $i=1,2$, então teríamos $u=u^1+u^2$ e seria suficiente estimar as integrais

$$
\iint_{\omega_2\times(0,T)}\left|u^i\right|^2 dxdt.
$$

Portanto, nas próximas duas etapas nos concentraremos em encontrar tais funções u^1 e u^2.

Etapa 4.1. Definição e estimativa de u^1

Dizemos que $u^1\in L^2(\mathbb{R}^N\times(0,T))^N$ é solução por transposição do problema 3.27 (para $i=1$) quando para cada $h\in L^2(\mathbb{R}^N\times(0,T))^N$ tem-se

$$
\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^N\times(0,T)} u^1\cdot h dxdt &= \iint_{\mathbb{R}^N\times(0,T)}(\hat{\theta}\rho(g+D\varphi\overline{y})(T-t))\cdot\Delta z dxdt\\
&\quad -\iint_{\mathbb{R}^N\times(0,T)}\hat{\theta}\rho(D\varphi\overline{y})(T-t)\cdot\nabla(\nabla\cdot z)dxdt\\
&\quad -\iint_{\mathbb{R}^N\times(0,T)}\hat{\theta}\rho g(T-t)\cdot\nabla(\nabla\cdot z)dxdt\\
&\quad +\iint_{\mathbb{R}^N\times(0,T)}\hat{\theta}\rho\varphi(T-t)\cdot\Delta z dxdt,
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

onde z é solução de

$$
\begin{cases}
-z_t-\Delta z=h & \text{em } \mathbb{R}^N\times(0,T),\\
z(T)=0 & \text{em } \mathbb{R}^N.
\end{cases}
\tag{3.29}
$$

Para todo $h\in L^2(\mathbb{R}^N\times(0,T))^N$, o problema (3.29) possui exatamente uma solução $z\in L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^N)^N)$, que depende continuamente de h. Então u^1 está bem definida e

$$
\left\|u^1\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N\times(0,T))^N}\le \hat{C}_1\left\|F_1\right\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\mathbb{R}^N)^N)},
\tag{3.30}
$$

para uma constante positiva $\hat{C}_1$. Além disso, mostra-se que $u^1 \in C^0([0,T]; H^{-2}(\mathbb{R}^N)^N)$ e que u^1 resolve (3.27) para $i = 1$ em um sentido fraco (ver [31] e [33]).

Deduzimos de (3.30) que

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^N \times (0,T)} \left|u^1\right|^2 dxdt \quad &\leq \quad \hat{C}_2\Big(\iint_{\mathbb{R}^N \times (0,T)} |\hat{\theta}\rho g|^2 dxdt \\ &+ \iint_{\mathbb{R}^N \times (0,T)} |\hat{\theta}\rho D\varphi\overline{y}|^2 dxdt + \iint_{\mathbb{R}^N \times (0,T)} |\hat{\theta}'\rho\varphi|^2 dxdt\Big),\end{aligned}$$

para uma constante positiva $\hat{C}_2$. Aqui nós usamos o fato que

$$\hat{\theta}(T-t) = \hat{\theta}(t), \quad \forall t \in (0,T).$$

Gracas à propriedade de ρ, finalmente obtemos

$$\begin{aligned}\iint_{\omega_2 \times (0,T)} \left|u^1\right|^2 dxdt \quad &\leq \quad \iint_{\mathbb{R}^N \times (0,T)} \left|u^1\right|^2 dxdt \\ &\leq \hat{C}_3\Big(\iint_{\omega_4 \times (0,T)} |\hat{\theta}g|^2 dxdt + \iint_{\omega_4 \times (0,T)} |\hat{\theta}'\varphi|^2 dxdt \\ &\iint_{\omega_4 \times (0,T)} |\hat{\theta}D\varphi\overline{y}|^2 dxdt\Big), \qquad (3.31)\end{aligned}$$

com $\hat{C}_3(\omega) > 0$.

Etapa 4.2. Definição e estimativa de u^2

Agora trataremos do problema de Cauchy 3.27 (para $i = 2$), com lado direito em $L^2(0,T; H^{-1}(\mathbb{R}^N)^N)$. Sabemos que existe uma única $u^2 \in L^2(0,T; H^1(\mathbb{R}^N)^N)$ satisfazendo (3.27) (Ver [33]). E relembremos que $F_2(t)$ tem suporte em $\omega_4 \backslash \overline{\omega}_3$ para quase todo $t \in (0,T)$ e que ω_2 é disjunto de $\omega_4 \backslash \overline{\omega}_3$. Este fato será muito importante na sequência.

Primeiro escreveremos u^2 em termos da solução fundamental $G = G(x,t)$ da equação do calor. Para isso, notemos que F_2 pode ser escrita na forma

$$F_2 = F_{21} + \nabla \cdot F_{22},$$

onde F_{21} e F_{22} são funções de L^2 com suporte em $(\omega_4 \backslash \overline{\omega}_3) \times [0,T]$, que podem ser escritas como somas de derivadas até segunda ordem de produtos $\hat{\theta}D^\beta\rho g, \hat{\theta}D^\beta\rho\varphi$, $\hat{\theta}D^\beta D\varphi\overline{y}$ e $\hat{\theta}'D^\beta\rho\varphi$, com $1 \leq |\beta| \leq 4$. Observemos que, para qualquer $y \in \omega_4 \backslash \overline{\omega}_3$ e qualquer $x \in \omega_2$, temos $|x - y| \geq dist(\partial\omega_2, \partial\omega_3) = d > 0$. Então, nós temos:

$$\begin{aligned}u^2(x,t) \quad &= \quad \iint_{(\omega_4 \backslash \overline{\omega}_3) \times (0,t)} G(x-y, t-s) F_{21}(y,s) dyds \\ &- \iint_{(\omega_4 \backslash \overline{\omega}_3) \times (0,t)} \nabla_y G(x-y, t-s) \cdot F_{22}(y,s) dyds, \qquad (3.32)\end{aligned}$$

para todo $(x,t) \in \omega_2 \times (0,T)$, onde

$$G(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-|x|^2/4t} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \forall t > 0$$

e ∇_y é o gradiente em relação a y.

Integrando por partes com respeito a y em (3.32), isto é, passando todas as derivadas de F_{21} e F_{22} para G e $\nabla_y G$ (Isto é possível, pois estamos integrando em uma região onde G é C^∞), encontramos uma expressão para u^2 na forma

$$u^2(x,t) = \iint_{(\omega_4 \backslash \overline{\omega}_3)\times(0,t)} \sum_{\alpha\in I, \beta\in J} D_y^\alpha G(x-y,t-s) D_y^\beta \rho(y) z_{\alpha,\beta}(y,s)\,dyds,$$

onde $\alpha \in I$ satisfaz $|\alpha| \leq 3$ e $\beta \in J$ satisfaz $1 \leq |\beta| \leq 4$ e

$$z_{\alpha,\beta}(y,s) = \hat{\theta}(s)(C_{\alpha,\beta} g(y,s) + D_{\alpha,\beta}\varphi(y,s) + E_{\alpha,\beta}(D\varphi\overline{y})(y,s)) + U_{\alpha,\beta}\hat{\theta}'\varphi(y,s),$$

com $C_{\alpha,\beta}, D_{\alpha,\beta}, E_{\alpha,\beta}, U_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$.

Segue-se imediatamente que

$$\left|u^2(x,t)\right| \leq \iint_{(\omega_4 \backslash \overline{\omega}_3)\times(0,t)} \sum_{\alpha\in I} \left|D_y^\alpha G(x-y,t-s)\right| |z(y,s)|\, dyds,$$

para todo $(x,t) \in \omega_2 \times (0,T)$, onde

$$z(y,s) = \hat{\theta}(s)(\hat{C}_4 g(y,s) + \hat{C}_5\varphi(y,s) + \hat{C}_6(D\varphi\overline{y})(y,s) + \hat{C}_7\hat{\theta}'\varphi(y,s).$$

Obviamente, para $0 < \delta < d$ existe uma constante $\hat{C}_8(\delta,\omega)$ tal que

$$\left|D_y^\alpha G(x-y,t-s)\right| \leq \hat{C}_8 \exp\left(\frac{-\delta^2}{4(t-s)}\right),$$

para todo $(x,t) \in \omega_2 \times (0,T)$, todo $(y,s) \in (\omega_4 \backslash \overline{\omega}_3) \times (0,t)$ e qualquer $\alpha \in I$. Assim

$$\left|u^2(x,t)\right| \leq \hat{C}_9 \iint_{(\omega_4 \backslash \overline{\omega}_3)\times(0,t)} \exp(\frac{-\delta^2}{4(t-s)})\, |z(y,s)|\, dyds,$$

com $\hat{C}_9 = \hat{C}_9(\omega) > 0$.

Integrando esta última desigualdade em $\omega_2 \times (0,T)$ e usando a desigualdade de Holder, temos

$$\iint_{\omega_2\times(0,T)} |u^2|^2 dxdt \leq \hat{C}_{10} \int_0^T \left(\int_0^t \exp(\frac{-\delta^2}{4(t-s)})\, \|z(y,s)\|^2_{L^2(\omega_4)}\, ds\right) dt,$$

para algum $\hat{C}_{10}(\omega) > 0$.

Escrevendo este último termo como uma convolução, isto é,

$$\int_0^T (f_1 * f_2)(t)dt,$$

onde $f_1(t) = e^{-\delta^2/t} 1_{(0,\infty)}(t) \in L^1(\mathbb{R})$, $f_2(t) = \|z(t)\|^2_{L^2(\omega_4)} 1_{[0,T]}(t) \in L^1(\mathbb{R})$ e usando a desigualdade de Young nesta convolução, temos

$$\iint_{\omega_2 \times (0,T)} |u^2|^2 dxdt \leq \hat{C}_{11} T \iint_{\omega_4 \times (0,T)} |z|^2 dxdt.$$

De acordo com a expressão de z, obtemos

$$\begin{aligned} \iint_{\omega_2 \times (0,T)} |u^2|^2 dxdt \quad &\leq \quad \hat{C}_{12} T \big(\iint_{\omega_4 \times (0,T)} |\hat{\theta}' \varphi|^2 dxdt \\ &\quad + \iint_{\omega_4 \times (0,T)} |\hat{\theta}|^2 (|D\varphi \overline{y}|^2 + |\varphi|^2 + |g|^2) dxdt \big). \end{aligned} \tag{3.33}$$

Juntando (3.33) e (3.31) nós encontramos a estimativa procurada na quarta etapa:

$$\begin{aligned} \iint_{\omega_2 \times (0,T)} |\hat{\theta}|^2 |\Delta \varphi|^2 dxdt \qquad &\leq \hat{C}_{13}(1+T) \Big(\iint_{\omega_4 \times (0,T)} |\hat{\theta}' \varphi|^2 dxdt \\ &\quad + \iint_{\omega_4 \times (0,T)} |\hat{\theta}|^2 (|D\varphi \overline{y}|^2 + |\varphi|^2 + |g|^2) dxdt \Big). \end{aligned} \tag{3.34}$$

Etapa 5. Estimativa da integral local de $|\varphi_t|^2$

Nesta etapa iremos limitar o segundo termo no lado direito de (3.24). Para este fim, iremos decompor nossa solução como a soma de duas outras soluções de sistemas tipo Stokes ψ_1 e ψ_2, com diferentes propriedades. A primeira receberá um tratamento global e aplicamos apenas estimativas de energia para o sistema de Stokes. Por outro lado, iremos trabalhar com termos locais de ψ_2, mas, como veremos, com a vantagem que $\psi_{2,tt}$ fará sentido.

Sejam (ψ_1, q_1) e (ψ_2, q_2) as soluções (únicas), respectivamente, dos seguintes sistemas:

$$\begin{cases} -\psi_{1,t} - \Delta \psi_1 - D\psi_1 \overline{y} + \nabla q_1 = \theta g & \text{em } Q, \\ \nabla \cdot \psi_1 = 0 & \text{em } Q, \\ \psi_1 = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \psi_1(T) = 0 & \text{em } \Omega \end{cases} \tag{3.35}$$

e

$$
\begin{cases}
-\psi_{2,t} - \Delta\psi_2 - D\psi_2\overline{y} + \nabla q_2 = -\theta'\varphi & \text{em } Q, \\
\nabla \cdot \psi_1 = 0 & \text{em } Q, \\
\psi_1 = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\
\psi_1(T) = 0 & \text{em } \Omega,
\end{cases}
\tag{3.36}
$$

(ver (3.10) para a definição de θ). Adicionando (3.35) e (3.36) vê-se que $(\psi_1 + \psi_2, q_1 + q_2)$ resolve o mesmo sistema que $(\theta\varphi, \theta\pi)$, onde (φ, π) é a solução de (3.7). Pela unicidade do sistema de Stokes, concluimos que:

$$
\theta\varphi = \psi_1 + \psi_2 \ \text{ e } \ \theta\pi = q_1 + q_2.
$$

O termo a ser limitado é

$$
\iint_{\omega_2\times(0,T)} \hat{\theta}|^2|\varphi_t|^2 dxdt = \iint_{\omega_2\times(0,T)} \theta^{-2}|\hat{\theta}|^2|\theta\varphi_t|^2 dxdt
$$

$$
= s^{-11/2}\lambda^2 \iint_{\omega_2\times(0,T)} e^{-2s\alpha^*+2s\hat{\alpha}}(\xi^*)^{-11/2}|\psi_{1,t} + \psi_{2,t} - \theta'\varphi|^2 dxdt. \tag{3.37}
$$

Assim iremos focar nossa atenção em estimar a derivada no tempo de ψ_1 e ψ_2.

Etapa 5.1. Estimativa da integral local de $\psi_{1,t}$

Nesta parte iremos estimar a integral de $e^{-2s\alpha^*+2s\hat{\alpha}}(\xi^*)^{-11/2}|\psi_{1,t}|^2$ em $\omega_2 \times (0,T)$. Até o momento não se sabe como obter estimativas locais com peso para $\psi_{1,t}$, depedendo apenas dos dados. Por isso limitaremos $\psi_{1,t}$ globalmente em $\Omega \times (0,T)$, usando estimativas conhecidas para o sistema de Stokes, e sem a ajuda das funções peso.

Tomando s e λ tal que $s \geq s_1^* T^8$ e $\lambda \geq \lambda_1^*$ obtemos

$$
e^{-2s\alpha^*+2s\hat{\alpha}} \leq e^{-C_2^* s T^{-8} e^{\lambda m \left\|\eta^0\right\|_\infty}} \leq e^{-C_1^* e^{\lambda m \left\|\eta^0\right\|_\infty}}
$$

e

$$
s^{-11/2}\lambda^2(\xi^*)^{-11/2} e^{-2s\alpha^*+2s\hat{\alpha}} \leq C_3^* \lambda^2 e^{-C_1^* e^{\lambda m \left\|\eta^0\right\|_\infty}}.
$$

Usando o Lema A.1 no sistema (3.35), deduzimos, entre outras coisas, que $\psi_{1,t} \in L^2(Q)^N$ e

$$
\|\psi_{1,t}\|^2_{L^2(Q)^N} + \|\psi_1\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega)^N)} \leq C_4^* \|\theta g\|^2_{L^2(Q)^N}.
$$

Consequentemente, usando as estimativas acima, obtemos diretamente que

$$
s^{-11/2}\lambda^2 \iint_{\omega_2\times(0,T)} e^{-2s\alpha^*+2s\hat{\alpha}}(\xi^*)^{-11/2}|\psi_{1,t}|^2 dxdt
$$

$$
\leq C_6^*(1 + \|\overline{y}\|^2_\infty e^{C_5^* T \|\overline{y}\|^2_\infty}) \iint_Q |\theta|^2|g|^2 dxdt. \tag{3.38}
$$

Etapa 5.2. Estimativa de $\psi_{2,t}$

Agora nos concentraremos na integral de $e^{-2s\alpha^*+2s\hat{\alpha}}(\xi^*)^{-11/2}|\psi_{2,t}|^2$. Nesta etapa será necessário uma estimativa de $\psi_{2,t}$ em termos de outras integrais que serão absorvidas posteriormente. Isto será possível pelas hipóteses de regularidade impostas em (3.5) sobre $\overline{y}$. As ferramentas utilizadas serão estimativas a priori para o sistema de Stokes e para a equação do calor. Mais precisamente, integrando duas vezes por partes em relação a t o termo em (3.37) envolvendo $\psi_{2,t}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
&s^{-11/2}\lambda^2 \iint_{\omega_2\times(0,T)} e^{-2s\alpha^*+2s\hat{\alpha}}(\xi^*)^{-11/2}|\psi_{2,t}|^2 dxdt \\
&= \frac{1}{2}s^{-11/2}\lambda^2 \iint_{\omega_2\times(0,T)} (e^{-2s\alpha^*+2s\hat{\alpha}}(\xi^*)^{-11/2})_{tt}|\psi_2|^2 dxdt \\
&= s^{-11/2}\lambda^2 \iint_{\omega_2\times(0,T)} e^{-2s\alpha^*+2s\hat{\alpha}}(\xi^*)^{-11/2}\psi_{2,tt}\cdot\psi_2 dxdt. \qquad (3.39)
\end{aligned}$$

Tal integração é possível, uma vez que $e^{-2s\alpha^*+2s\hat{\alpha}}(\xi^*)^{-11/2} \in C_0^\infty(0,T)$.

Assim como fizemos na Etapa 3, podemos mostrar que

$$(e^{-2s\alpha^*+2s\hat{\alpha}}(\xi^*)^{-11/2})_{tt}$$

é limitado superiormente para $s \geq s_2^*(T^4 + T8)$ e $\lambda \geq \lambda_2^*$.

Introduzamos a função

$$\theta^* = s^{-11/2}\lambda^{-4}e^{-2s\alpha^*+2s\hat{\alpha}}(\xi^*)^{-11/2}$$

e nos concentremos na integral da última linha de (3.39).

Utilizando a desigualdade de Holder deduzimos que

$$\begin{aligned}
&-\lambda^6 \iint_{\omega_2\times(0,T)} \theta^*\psi_{2,tt}\cdot\psi_2 dxdt \\
&\leq \lambda^6 \left\|\theta^*\psi_{2,tt}\right\|_{L^2(0,T;L^r(\omega_2)^N)} \left\|\psi_2\right\|_{L^2(0,T;L^{r'}(\omega_2)^N)} \\
&\leq \frac{1}{2}\left\|\theta^*\psi_{2,tt}\right\|_{L^2(0,T;L^r(\omega_2)^N)} + \frac{1}{2}\lambda^{12}\left\|\psi_2\right\|_{L^2(0,T;L^{r'}(\omega_2)^N)}, \qquad (3.40)
\end{aligned}$$

onde $\frac{6}{5} < r < \sigma$ se $N = 3$ e $1 < r < \sigma$ se $N = 2$ e $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$.

Observação 3.6. *Uma vez que $\psi_2 \in L^2(0,T;H^2(\Omega)^N)$ e, como veremos a seguir, $\theta^*\psi_{2,tt} \in L^2(0,T;L^r(\omega_2)^N)$ temos pelas imersões de Sobolev que está tudo em ordem com (3.40).*

Trataremos agora do último termo do lado direito de (3.40). Para isso consideremos uma função $\zeta \in C_c^2(\omega_3)$ tal que

$$supp\ \zeta \subset \omega_3 \text{ e } \zeta = 1 \text{ em } \omega_2.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}\|\psi_2\|^2_{L^2(0,T;L^{r'}(\omega_2)^N)} &\leq C_7^* \|\Delta(\zeta\psi_2)\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega_3)^N)} \\ &= C_7^* \|\psi_2\Delta\zeta + 2\nabla\zeta\cdot\nabla\psi_2 + \zeta\Delta\psi_2\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega_3)^N)},\end{aligned}$$

uma vez que $H^2(\omega_3)^N \cap H_0^1(\omega_3)$ está continuamente imerso em $L^{r'}(\omega_3)^N$ para todo $r' < \infty$.

Agora, agindo como na Etapa 4, obteremos uma estimativa de $\|\zeta\Delta\psi_2\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega_3)^N)}$. De fato, uma vez que $\psi_2(T) = 0$, é suficiente aplicar a estimativa (3.24) com $\varphi = \psi_2$, $\hat{\theta} = 1$, $\omega_2 = \omega_3$ e $\omega_4 = \omega_5$, onde ω_5 é um novo aberto satisfazendo

$$\omega_4 \subset\subset \omega_5 \subset\subset \omega.$$

Isto nos dá

$$\|\psi_2\|^2_{L^2(0,T;L^{r'}(\omega_2)^N)} \leq C_8^*(1 + \|\overline{y}\|^2_\infty)(1+T)\iint_{\omega_5\times(0,T)}(|\psi_2|^2 + |\nabla\psi_2|^2)dxdt.$$

Segue imediatamente das definições de ψ_1 e ψ_2 que:

$$|\psi_2|^2 + |\nabla\psi_2|^2 \leq 2(|\psi_1|^2 + |\nabla\psi_1|^2 + |\theta|^2(|\varphi|^2 + |\nabla\varphi|^2)).$$

Então, usando os resultados da etapa 5.1, nós temos que:

$$\begin{aligned}\|\psi_2\|^2_{L^2(0,T;L^{r'}(\omega_2)^N)} \leq\ & C_9^*(1 + \|\overline{y}\|^2_\infty)(1+T)\Bigg(e^{C_{10}^* T\|\overline{y}\|^2_\infty}\|\theta g\|^2_{L^2(Q)^N} \\ &+ \iint_{\omega_5\times(0,T)}(|\theta|^2 + |\theta'|^2)|\varphi|^2 dxdt \\ &+ \iint_{\omega_5\times(0,T)}|\theta|^2|\nabla\varphi|^2 dxdt\Bigg). \qquad (3.41)\end{aligned}$$

No que segue, iremos manter os dois primeiros termos no lado direito de (3.41) e o terceiro será estimado posteriormente.

Agora consideraremos a norma envolvendo $\psi_{2,tt}$ em (3.40).

O par $(\psi, q) := (\theta^*\psi_{2,t}, \theta^* q_2, t)$ satisfaz

$$
\begin{cases}
-\psi_t - \Delta\psi - D\psi\overline{y} + \nabla q = G & \text{em } Q, \\
\nabla \cdot \psi = 0 & \text{em } Q, \\
\psi = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\
\psi(T) = 0 & \text{em } \Omega,
\end{cases}
\tag{3.42}
$$

onde

$$
G = -\theta^*\theta''\varphi - \theta^*\theta'\varphi_t + \theta^* D\varphi_2\overline{y}_t - (\theta^*)'\psi_{2,t}.
$$

Observação 3.7. *Considerando uma sequência de funções regulares* $\{\overline{y}^n\}$ *satisfazendo:*

$$
\overline{y}^n \longrightarrow \overline{y} \text{ fraco estrela em } L^\infty(Q)^N \quad \text{e} \quad \overline{y}_t^n \longrightarrow \overline{y}_t \text{ fraco em } \ L^2(0,T;L^\sigma(\Omega)^N)
$$

e tomando:

$$
G^n = -\theta^*\theta''\varphi - \theta^*\theta'\varphi_t + \theta^* D\varphi_2\overline{y}_t^n - (\theta^*)'\psi_{2,t}
$$

para todo $n \geq 1$. *Tem-se para cada* $n \in \mathbb{N}$ *a existência e unicidade de solução* (ψ^n, q^n) *para (3.42) com* G^n *no lugar de* G. *Então, passando o limite e usando a hipótese (3.5), conclui-se que* (ψ, q) *é na verdade a solução de (3.42).*

Para obtermos uma estimativa de ψ_t em $L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)$, primeiro encontramos uma estimativa do termo $(D\psi\overline{y})$ no mesmo espaço. De fato, se olharmos ψ como a solução fraca de (3.42), nós temos que $\psi \in L^2(0,T;V)$ e

$$
\|\psi\|_{L^2(0,T;V)} \leq C_{11}^* e^{C_{12}^* T \|\overline{y}\|_\infty^2} \|G\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^N)}, \tag{3.43}
$$

e assim o mesmo vale para $\|D\psi\|_{L^2(Q)^N}$.

Por enquanto assumiremos que $\theta^* D\psi\overline{y}_t \in L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)$, isto será provado na sexta etapa. Agora, seguindo [18], decompomos os termos na equação satisfeita por ψ que não tem divergência livre, isto é, que o divergente não é nulo. Mais precisamente, usando decomposição de Helmholtz garantimos a existência de funções g_1, g_2, g_3 e g_4 com $g_1, \nabla g_2 \in L^2(Q)^N$, $\nabla \cdot g_1 = 0$, $g_3, \nabla g_4 \in L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)$ e $\nabla \cdot g_3$ tal que

$$
D\psi\overline{y} = g_1 + \nabla g_2 \quad \text{e} \quad \theta^* D\psi_2\overline{y}_t = g_3 + \nabla g_4,
$$

com $g_1, \nabla g_2$ e $g_3, \nabla g_4$ dependendo continuamente de $D\psi\overline{y}$ e $\theta^* D\psi_2\overline{y}_t$ nos espaços $L^2(Q)^N$ e $L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)$ respectivamente. Deste modo, a equação verificada por

ψ pode ser escrita na forma:

$$-\psi_t - \Delta\psi + \nabla\widetilde{q} = J$$

onde

$$\widetilde{q} = q - g_2 - g_4 \quad \text{e} \quad J = \theta^*\theta''\varphi - \theta^*\theta'\varphi_t + g_3 - (\theta^*)'\psi_{2,t} + g_1.$$

Observação 3.8. *J tem divergência livre, ou seja, $\nabla \cdot J = 0$.*

Sob estas condições podemos aplicar o Lema A.2 e deduzir, em particular, que $\psi_t \in L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)$ e

$$\|\psi_t\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)} \le C_{13}^* \|J\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)}, \tag{3.44}$$

para uma constante positiva C_{13}^* dependendo apenas de Ω. Consequentemente $\psi_{2,t} \in L^2(0,T;L^r(\omega_2)^N)$, como haviamos mencionado.

Uma vez que $L^r(\Omega)$ é continuamente imerso em $H^{-1}(\Omega)$, (3.43) e (3.44) nos dão

$$\begin{aligned}\|\theta^*\psi_{2,tt}\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)} \le\ & C_{14}^*(1+\|\overline{y}\|_\infty)e^{C_{15}^*T\|\overline{y}\|_\infty^2}(\|\theta^*\theta''\varphi\|_{L^2(Q)^N} + \|\theta^*\theta'\varphi_t\|_{L^2(Q)^N} \\ & + \|(\theta^*)'\psi_{2,t}\|_{L^2(Q)^N} + \|\theta^* D\psi_2\overline{y}_t\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)}).\end{aligned}$$

De (3.39), (3.40), (3.41) e desta última estimativa, temos

$$\begin{aligned}& s^{-11/2}\lambda^2 \iint_{\omega_2\times(0,T)} e^{-2s\alpha^*+2s\hat{\alpha}}(\xi^*)^{-11/2}|\psi_{2,t}|^2dxdt \\ & \le C_{16}^*(1+\|\overline{y}\|_\infty^2)e^{C_{17}^*T\|\overline{y}\|_\infty^2}(\lambda^{12}(1+T)(\|\theta g\|_{L^2(Q)^N}^2 + \|\theta\varphi\|_{L^2(0,T;L^2(\omega_5)^N)}^2 \\ & + \|\theta'\varphi\|_{L^2(0,T;L^2(\omega_5)^N)}^2 + \|\theta\nabla\varphi\|_{L^2(0,T;L^2(\omega_5)^N)}^2) + \|\theta^*\theta''\varphi\|_{L^2(Q)^N}^2 \\ & + \|\theta^*\theta'\varphi_t\|_{L^2(Q)^N}^2 + \|(\theta^*)'\psi_{2,t}\|_{L^2(Q)^N}^2 + \|\theta^* D\psi_2\overline{y}_t\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)}^2).\end{aligned} \tag{3.45}$$

Para finalizar esta etapa combinamos (3.37), (3.38) e (3.45) e obtemos a seguinte estimativa para φ_t:

$$\begin{aligned}& \iint_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2|\varphi_t|^2dxdt \\ & \le C_{18}^*(1+\|\overline{y}\|_\infty^2)e^{C_{19}^*T\|\overline{y}\|_\infty^2}(\lambda^{12}(1+T)(\|\theta g\|_{L^2(Q)^N}^2 + \|\theta\varphi\|_{L^2(0,T;L^2(\omega_5)^N)}^2 \\ & + \|\theta'\varphi\|_{L^2(0,T;L^2(\omega_5)^N)}^2 + \|\theta\nabla\varphi\|_{L^2(0,T;L^2(\omega_5)^N)}^2) + \|\theta^*\theta''\varphi\|_{L^2(Q)^N}^2 \\ & + \|\theta^*\theta'\varphi_t\|_{L^2(Q)^N}^2 + \|(\theta^*)'\psi_{2,t}\|_{L^2(Q)^N}^2 + \|\theta^* D\psi_2\overline{y}_t\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)}^2).\end{aligned} \tag{3.46}$$

Etapa 6. Estimativa de $\theta^* D\psi_2\overline{y}_t$ em $L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)$

A estratégia que seguiremos nesta etapa é obter uma estimativa de $\theta^*\psi_2$ em $L^\infty(0,T;W^{1,l}(\Omega)^N)$ para $l<\infty$, com dependência explícita com respeito aos dados. Nesta etapa precisaremos das seguintes imersões:

$$L^2(0,T;H^2(\Omega)^N)\cap L^\infty(0,T;V)\subset L^{k_1}(0,T;L^{k_2}(\Omega)^N),$$

com

$$\frac{2}{k_1}+\frac{6}{k_2}=1 \tag{3.47}$$

e

$$L^2(0,T;L^6(\Omega)^N)\cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^N)\subset L^{k_1}(0,T;L^{k_2}(\Omega)^N),$$

com

$$\frac{4/3}{k_3}+\frac{2}{k_4}=1. \tag{3.48}$$

Estes resultados estão provados em [38].

Uma vez encontrada esta estimativa para $\theta^*\psi_2$ em $L^\infty(0,T;W^{1,l}(\Omega)^N)$ para $l<\infty$, de (3.5) e da escolha feita para r, não é dificil obter uma estimativa de $\theta^*\psi_2\overline{y}_t$ em $L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)$. De fato, o par $(\theta^*\psi_2,\theta^*q_2)$ é solução forte do sistema

$$\begin{cases} -(\theta^*\psi_2)_t-\Delta(\theta^*\psi_2)-D(\theta^*\psi_2)\overline{y}+\nabla(\theta^*q_2)=-(\theta^*)'\psi_2-\theta^*\theta\varphi & \text{em } Q,\\ \nabla\cdot(\theta^*\psi_2)=0 & \text{em } Q,\\ \theta^*\psi_2=0 & \text{sobre } \Sigma,\\ (\theta^*\psi_2)(T)=0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{3.49}$$

Utilizando o fato que $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^6(\Omega)$, temos que

$$D(\theta^*\psi_2)\overline{y}\in L^2(0,T;L^6(\Omega)^N)\cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^N),$$

e podemos escrever

$$D(\theta^*\psi_2)\overline{y}=g_5+\nabla g_6\in L^{k_3}(0,T;L^{k_4}(\Omega)^N),\quad \nabla\cdot g_5=0,$$

para algum g_5 e g_6, com dependência contínua no espaço $L^{k_3}(0,T;L^{k_4}(\Omega)^N)$.

Agora podemos olhar a equação (3.49) com uma pressão $\theta^*q_2-g_6$ e um lado direito $-(\theta^*)'\psi_2-\theta^*\theta'\varphi+g_5$, que tem divergência livre.

Usando o Lema A.2, deduzimos que $\theta^*\psi_2\in L^{k_3}(0,T;W^{2,k_4}(\Omega)^N)$ e que

$$\|\theta^*\psi_2\|_{L^{k_3}(0,T;W^{2,k_4}(\Omega)^N)}\le C_7\left\|-(\theta^*)'\psi_2-\theta^*\theta'\varphi+g_5\right\|_{L^{k_3}(0,T;L^{k_4}(\Omega)^N)}. \tag{3.50}$$

Consequentemente $\theta^* D\psi_2 \in L^{k_3}(0,T;W^{1,k_4}(\Omega)^N)$. Então, tomando $3 \leq k_4 < 6$, $k_1 = k_3$ e $k_2 = l > 6$, deduzimos que $\theta^* D\psi_2 \in L^{k_1}(0,T;L^{k_2}(\Omega)^N)$.

Fazendo outra decomposição de Helmholtz de $\theta^* D\psi_2\overline{y}$, mas desta vez no espaço $L^{k_3}(0,T;L^l(\Omega)^N)$, escrevemos

$$\theta^* D\psi_2\overline{y} = g_7 + \nabla g_8, \quad \nabla\cdot g_7 = 0.$$

Utilizando novamente o lema A.2, temos que $\nabla(\theta^* q_2 - g_8) \in L^{k_3}(0,T;L^l(\Omega)^N)$ e

$$\|\nabla(\theta^* q_2 - g_8)\|_{L^{k_3}(0,T;L^l(\Omega)^N)} \leq C_8 \left\|-(\theta^*)'\psi_2 - \theta^*\theta'\varphi + g_7\right\|_{L^{k_3}(0,T;L^l(\Omega)^N)}.$$

De acordo com (3.50) e a dependência contínua de g_7 e g_5 com respeito a $D(\theta\psi_2\overline{y})$ temos que

$$\begin{aligned}\|\nabla(\theta^* q_2 - g_8)\|_{L^{k_3}(0,T;L^l(\Omega)^N)} \leq\;& C_9(1+\|\overline{y}\|_\infty^2)(\|\theta^*\Delta\psi_2\|_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*)'\Delta\psi_2\|_{L^2(Q)^N}\\ &+ \|(\theta^*\psi_2)_t\|_{L^2(Q)^N} + \|((\theta^*)'\psi_2)_t\|_{L^2(Q)^N}\\ &+ \|\theta^*\theta'\Delta\varphi\|_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*\theta'\varphi)_t\|_{L^2(Q)^N}). \end{aligned} \tag{3.51}$$

Esta desigualdade é suficiente para assegurar que $\theta^*\psi_2 \in L^\infty(0,T;W^{1,l}(\Omega)^N)$, com estimativas explícitas. De fato, olhando para (3.49) como um sistema de N equações do calor com lado direito

$$B_i := -(\theta^*)'\psi_2^i - \theta^*\theta'\varphi^i + g_7^i + \partial(\theta^* q_2 - g_8).$$

E utilizando resultados de regularidade para a equação do calor, temos que

$$\|\theta^*\psi_2\|_{L^\infty(0,T;W^{1,l}(\Omega)^N)} \leq C_{10}(1-k_3'/2)^{-1/k_3'}T^{-1/2+1/k_3'}\|B\|_{L^{k_3}(0,T;L^l(\Omega)^N)},$$

onde $k_3 > 2$ e $1/k_3 + 1/k_3' = 1$.

De (3.51) obtemos a regularidade desejada para $\theta^*\psi_2$:

$$\begin{aligned}\|\theta^*\psi_2\|_{L^\infty(0,T;W^{1,l}(\Omega)^N)} \leq\;& C_{11}T^{-1/2+1/k_3'}(1+\|\overline{y}\|_\infty^2(\|\theta^*\Delta\psi_2\|_{L^2(Q)^N}\\ &+ \|(\theta^*)'\Delta\psi_2\|_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*\psi_2)_t\|_{L^2(Q)^N}\\ &+ \|((\theta^*)'\psi_2)_t\|_{L^2(Q)^N} + \|\theta^*\theta'\Delta\varphi\|_{L^2(Q)^N}\\ &+ \|(\theta^*\theta'\varphi)_t\|_{L^2(Q)^N}). \end{aligned} \tag{3.52}$$

Como mencionamos anteriormente, combinando (3.5) e (3.52) encontramos que $\theta^* D\psi_2 \overline{y}_t \in L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)$ e

$$\begin{aligned}
&\|\theta^* D\psi_2 \overline{y}_t\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)} \\
&\leq \|\theta^* D\psi_2\|_{L^\infty(0,T;L^l(\Omega)^N)} \|\overline{y}_t\|_{L^2(0,T;L^\sigma(\Omega)^N)} \\
&\leq C_{12} \|\overline{y}_t\|_{L^2(0,T;L^\sigma(\Omega)^N)} T^{-1/2+1/k_3'}(1+\|\overline{y}\|_\infty^2)(\|\theta^*\Delta\psi_2\|_{L^2(Q)^N} \\
&+ \|(\theta^*)'\Delta\psi_2\|_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*\psi_2)_t\|_{L^2(Q)^N} + \|((\theta^*)'\psi_2)_t\|_{L^2(Q)^N} \\
&+ \|\theta^*\theta'\Delta\varphi\|_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*\theta'\varphi)_t\|_{L^2(Q)^N}). \qquad (3.53)
\end{aligned}$$

Observação 3.9. *As potências de T depedem somente de σ, uma vez que σ determina os valores admissíveis de k_3. De fato, de $2 < k_3 \leq 4$ encontramos $4/3 \leq k_3' < 2$ e $0 < -1 + 2/k_3' < 1/2$.*

Combinando as estimativas (3.46) e (3.53) obtemos:

$$\begin{aligned}
\iint_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2|\varphi_t|^2 dxdt \;\leq\; & C_{13}(1+\|\overline{y}\|_\infty^6)\,\|\overline{y}_t\|_{L^2(L^\sigma)}^2\, e^{C_{14}T\|\overline{y}\|_\infty^2}(\lambda^{12}(1+T)(\|\theta g\|_{L^2(Q)^N}^2 \\
&+ \|\theta\varphi\|_{L^2(0,T;L^2(\omega_5)^N)}^2 + \|\theta'\varphi\|_{L^2(0,T;L^2(\omega_5)^N)}^2 \\
&+ \|\theta\nabla\varphi\|_{L^2(0,T;L^2(\omega_5)^N)}^2) + (1+T^{1/2})(\|\theta^*\theta''\varphi\|_{L^2(Q)^N}^2 \\
&+ \|(\theta^*)'\theta'\varphi\|_{L^2(Q)^N}^2 + \|\theta^*\theta'\varphi_t\|_{L^2(Q)^N}^2 + \|\theta^*\theta'\Delta\varphi\|_{L^2(Q)^N}^2 \\
&+ \|\theta^*\psi_{2,t}\|_{L^2(Q)^N}^2 + \|(\theta^*)'\psi_{2,t}\|_{L^2(Q)^N}^2 + \|(\theta^*)'\psi_2\|_{L^2(Q)^N}^2 \\
&+ \|(\theta^*)''\psi_2\|_{L^2(Q)^N}^2 + \|\theta^*\Delta\psi_2\|_{L^2(Q)^N}^2 \\
&+ \|(\theta^*)'\Delta\psi_2\|_{L^2(Q)^N}^2)). \qquad (3.54)
\end{aligned}$$

Etapa 7. Últimas estimativas e conclusões Uma vez que $\psi_2 = -\psi_1 + \theta\varphi$ e de (3.54), temos que

$$
\begin{aligned}
\iint_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2|\varphi_t|^2 dxdt \;\leq\;& C_{15}(1+\|\overline{y}\|_\infty^6)\,\|\overline{y}_t\|^2_{L^2(L^\sigma)}\, e^{C_{16}T\|\overline{y}\|^2_\infty}(\lambda^{12}(1+T)(\|\theta g\|^2_{L^2(Q)^N}\\
&+\|\theta\varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega_5)^N)}+\|\theta'\varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega_5)^N)}\\
&+\|\theta\nabla\varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega_5)^N)})+(1+T^{1/2})(\|\theta^*\theta''\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}\\
&+\|\theta^*\theta'\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}+\|(\theta^*)''\theta\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}+\|(\theta^*)'\theta'\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}\\
&+\|\theta^*\theta\Delta\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}+\|\theta^*\theta'\Delta\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}+\|(\theta^*)'\theta\Delta\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}\\
&+\|\theta^*\theta\varphi_t\|^2_{L^2(Q)^N}+\|\theta^*\theta'\varphi_t\|^2_{L^2(Q)^N}+\|(\theta^*)'\theta\varphi_t\|^2_{L^2(Q)^N}\\
&+\|\theta^*\Delta\psi_1\|^2_{L^2(Q)^N}+\|(\theta^*)'\Delta\psi_1\|^2_{L^2(Q)^N}+\|\theta^*\psi_{1,t}\|^2_{L^2(Q)^N}\\
&+\|(\theta^*)'\psi_1\|^2_{L^2(Q)^N}+\|(\theta^*)''\psi_1\|^2_{L^2(Q)^N}\\
&+\|(\theta^*)'\psi_{1,t}\|^2_{L^2(Q)^N})). \qquad (3.55)
\end{aligned}
$$

Para todos os termos referentes a ψ_1 podemos usar a estimativa (3.38), uma vez que θ^*, $(\theta^*)'$ e $(\theta^*)''$ são funções limitadas em $(0,T)$, para $s \geq s_6(T^4+T^8)$. Consequentemente,

$$
\begin{aligned}
\iint_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2|\varphi_t|^2 dxdt \;\leq\;& C_{17}(1+\|\overline{y}\|_\infty^6)\,\|\overline{y}_t\|^2_{L^2(L^\sigma)}\, e^{C_{18}T\|\overline{y}\|^2_\infty}(\lambda^{12}(1+T)(\|\theta g\|^2_{L^2(Q)^N}\\
&+\|\theta\varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega_5)^N)}+\|\theta'\varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega_5)^N)}\\
&+\|\theta\nabla\varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega_5)^N)})+(1+T^{1/2})(\|\theta^*\theta''\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}\\
&+\|\theta^*\theta'\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}+\|(\theta^*)''\theta\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}+\|(\theta^*)'\theta'\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}\\
&+\|\theta^*\theta\Delta\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}+\|\theta^*\theta'\Delta\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}+\|(\theta^*)'\theta\Delta\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}\\
&+\|\theta^*\theta\varphi_t\|^2_{L^2(Q)^N}+\|\theta^*\theta'\varphi_t\|^2_{L^2(Q)^N}\\
&+\|(\theta^*)'\theta\varphi_t\|^2_{L^2(Q)^N})). \qquad (3.56)
\end{aligned}
$$

Agora iremos estimar os termos globais em φ, $\Delta\varphi$ e φ_t e mostraremos que eles podem ser eliminados usando o lado esquerdo de (3.23). Para isto usaremos as seguintes estimativas para as funções peso:

$$|\theta^*\theta'|+|(\theta^*)'\theta| \leq C_{19}Ts^{-3/4}\lambda^{-4}e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{-1/2}$$

e

$$|(\theta^*)'\theta'|+|(\theta^*)''\theta|+|\theta^*\theta''| \leq C_{20}T^2s^{1/4}\lambda^{-4}e^{-s\alpha^*}\hat{\xi}^{3/4}.$$

Com isto, para $0<\beta\leq 1/2$, tem-se

$$T^\beta(|\theta^*\theta'|+|(\theta^*)'\theta|) \leq C_{21}s^{-1/2}\lambda^{-4}e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{-1/2}$$

e

$$T^\beta(|(\theta^*)'\theta'|+|(\theta^*)''\theta|+|\theta^*\theta''|\le C_{22}s^{3/2}\lambda^{-4}e^{-s\alpha^*}\hat\xi^{3/2},$$

para $s\ge s_7(T^7+T^8)$.

Combinando este resultado com (3.56), obtemos

$$\begin{aligned}\iint_{\omega_2\times(0,T)}|\hat\theta|^2|\varphi_t|^2dxdt \;&\le\; C_{23}(1+\|\overline{y}\|_\infty^6)\,\|\overline{y}_t\|^2_{L^2(L^\sigma)}\,e^{C_{24}T\|\overline{y}\|^2_\infty}(\lambda^{12}(1+T)(\|\theta g\|^2_{L^2(Q)^N}\\ &\quad+\|\theta\varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega_5)^N)}+\|\theta'\varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega_5)^N)}\\ &\quad+\|\theta\nabla\varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega_5)^N)})+s^3\lambda^{-8}\iint_Q e^{-2s\alpha^*}\hat\xi^3|\varphi|^2dxdt\\ &\quad s^{-1}\lambda^{-8}\iint_Q e^{-2s\alpha^*}(\xi^*)^{-1}(|\varphi_t|^2+|\Delta\varphi|^2)dxdt)\end{aligned}$$

para $s\ge s_8(T^4+T^8)$.

Como $\alpha^*(t)=\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}\alpha(x,t)$, tomando

$$\lambda\ge\lambda_6(1+\|\overline{y}\|_\infty+\|\overline{y}\|^2_{L^2(0,T;L^\sigma(\Omega)^N}+e^{\lambda_7T\|\overline{y}\|^2_\infty})\ge 2,$$

vemos que

$$\begin{aligned}\iint_{\omega_2\times(0,T)}|\hat\theta|^2|\varphi_t|^2dxdt \;&\le\; C_{25}\lambda^{20}(1+T)(\|\theta g\|^2_{L^2(Q)^N}\,\|\theta\nabla\varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega_5)^N)}\\ &\quad+\|\theta\varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega_5)^N)}+\|\theta'\varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega_5)^N)})\\ &\quad+\frac{1}{2}I(s,\lambda;\varphi).\end{aligned}$$

Combinando esta última estimativa, (3.23), (3.24) e (3.34), encontramos:

$$\begin{aligned}I(s,\lambda,\varphi)\;&\le\; C_{26}\lambda^{20}(1+T)(\|\theta g\|^2_{L^2(Q)^N}\,\|\theta\nabla\varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega_5)^N)}\\ &\quad+\|\theta\varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega_5)^N)}+\|\theta'\varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega_5)^N)}),\end{aligned}\tag{3.57}$$

para $s\ge s_9(T^4+T^8)$ e $\lambda\ge\lambda_8(1+\|\overline{y}\|_\infty+\|\overline{y}\|^2_{L^2(0,T;L^\sigma(\Omega)^N}+e^{\lambda_9T\|\overline{y}\|^2_\infty})$.

Neste momento é necessário apenas obter uma estimativa do termo local de $\nabla\varphi$ aparecendo no lado direito de (3.57). Assim introduzimos uma função $\zeta\in C^2_c(\omega)$ tal que

$$\zeta\equiv 1 \text{ em } \omega_5,\quad 0\le\zeta\le 1.$$

Então,

$$\begin{aligned}\iint_{\omega_5\times(0,T)}|\hat\theta|^2|\nabla\varphi|^2dxdt \;&\le\; \iint_{\omega\times(0,T)}|\theta|^2\zeta|\nabla\varphi|^2dxdt\\ &=\;\frac{1}{2}\iint_{\omega\times(0,T)}|\theta|^2\Delta\zeta|\varphi|^2dxdt-\iint_{\omega\times(0,T)}|\theta|^2\zeta\Delta\varphi\cdot\varphi dxdt.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young na última integral obtemos seguinte estimativa:

$$
\begin{aligned}
\iint_{\omega_5\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2|\nabla\varphi|^2dxdt \ &\leq \ C_{27}s\lambda^{20}(1+T)\iint_{\omega\times(0,T)} e^{2s\alpha^*}|\theta|^4\xi^*|\varphi|^2dxdt \\
&+ \ \frac{s^{-1}\lambda^{-20}(1+T)^{-1}}{2C_{26}}\iint_{\omega\times(0,T)} e^{-2s\alpha^*}|\theta|^4(\xi^*)^{-1}|\Delta\varphi|^2dxdt,
\end{aligned}
$$

para uma constante $C_{27}(\Omega,\omega)>0$ e, consequentemente, para quaisquer

$$
s\geq s_9(T^4+T^8) \text{ e } \lambda\geq\lambda_8(1+\|\overline{y}\|_\infty+\|\overline{y}\|^2_{L^2(0,T;L^\sigma(\Omega)^N}+e^{\lambda_9T\|\overline{y}\|^2_\infty}).
$$

Dessa forma podemos concluir de (3.57) que

$$
\begin{aligned}
I(s,\lambda,\varphi) \ &\leq \ C_{28}(1+T^2)(s^{15/2}\lambda^{20}\iint_Q e^{-4s\hat{\alpha}+2s\alpha^*}(\xi^*)^{15/2}|g|^2dxdt \\
&+\iint_{\omega\times(0,T)} e^{-8s\hat{\alpha}+6s\alpha^*}(\xi^*)^{16}|\varphi|^2dxdt),
\end{aligned}
$$

à qual é exatamente a desigualdade de Carleman dada no Teorema 3.2. ■

3.3 Controlabilidade nula de um sistema linear

Nesta seção iremos resolver o problema da controlabilidade nula para o sistema (3.6) com lado direito que decai exponencialmente quando $t\longrightarrow T^-$.

Este resultado será usado para deduzir a controlabilidade de (3.1) na próxima seção.

De fato, gostariamos de encontrar $v\in L^2(\omega\times(0,T))^N$ tal que a solução de

$$
\begin{cases}
Ly+\nabla p=f+v1_\omega & \text{em } \ Q,\\
\nabla\cdot y=0 & \text{em } \ Q,\\
y=0 & \text{sobre } \ \Sigma,\\
y(0)=y^0 & \text{em } \ \Omega,
\end{cases}
\tag{3.58}
$$

onde

$$
Ly=y_t-\Delta y+y\cdot\nabla\overline{y}+\overline{y}\cdot\nabla y, \tag{3.59}
$$

satisfaz

$$
y(T)=0 \text{ em } \Omega. \tag{3.60}
$$

Além disso, será conveniente provar a existência de uma solução para o problema (3.58) em um espaço "com peso" apropriado, que depende da dimensão espacial.

Antes de introduzirmos estes espaços, iremos deduzir uma desigualdade de Carleman com funções peso que não se anulam em $t = 0$. Mais precisamente, consideremos a função

$$l(t) = \begin{cases} T^2/4 & \text{para} \quad 0 \leq t \leq T/2, \\ t(T-t) & \text{para} \quad T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$

e as seguintes funções peso:

$$\begin{aligned} &\beta(x,t) = \frac{e^{\frac{5}{4}\lambda m||\eta^0||_\infty} - e^{\lambda(m||\eta^0||_\infty + \eta^0(x))}}{l(t)^4}, \\ &\gamma(x,t) = \frac{e^{\lambda(m||\eta^0||_\infty + \eta^0(x))}}{l(t)^4}, \\ &\hat{\beta}(t) = \min_{x\in\overline{\Omega}} \beta(x,t), \ \beta^*(t) = \max_{x\in\overline{\Omega}} \beta(x,t), \\ &\gamma^*(t) = \max_{x\in\overline{\Omega}} \gamma(x,t), \ \hat{\gamma}(t) = \min_{x\in\overline{\Omega}} \gamma(x,t). \end{aligned}$$

Lema 3.1. *Com a notação anterior, para qualquer $\overline{y}$ satisfazendo (3.5), existe uma constante C positiva, dependendo de T, s e λ, tal que toda solução para (3.7) satisfaz:*

$$\begin{aligned} &\iint_Q e^{-2s\beta}\gamma^3|\varphi|^2 dxdt + \iint_Q e^{-2s\beta}\gamma|\nabla\varphi|^2 dxdt + \|\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)^N} \\ &\leq C\left(\iint_Q e^{-4s\hat{\beta}+2s\beta^*}\gamma^{*15/2}|g|^2 dxdt + \iint_{\omega\times(0,T)} e^{-8s\hat{\beta}+6s\beta^*}\gamma^{*16}|\varphi|^2 dxdt \right), \end{aligned} \tag{3.61}$$

onde s e λ são tomados como no Teorema 3.2.

Prova: Iniciamos com uma simples estimativa a priori para o sistema de Stokes 3.7:

$$\begin{aligned} &\|\varphi\|_{L^2(0,T/2;V)} + \|\varphi\|_{L^\infty(0,T/2;H)} \\ &\leq Ce^{CT\|\overline{y}\|^2_\infty}\left(\|g\|_{L^2(0,3T/4;L^2(\Omega)^N)} + \frac{1}{T}\|\varphi\|_{L^2(T/2;3T/4;L^2(\Omega)^N)} \right). \end{aligned} \tag{3.62}$$

Para provar isto é suficiente introduzir uma função $\eta \in C^1([0,T])$ com

$$\eta = 1 \text{ em } [0, T/2], \quad \eta \equiv 0 \text{ em } [3T/4, T], \quad |\eta'| \leq C/T$$

e usar as estimativas clássicas de energia para $\eta\varphi$, que resolve, juntamente com $\eta\pi$, um problema de Stokes (ver Observação A.1). De fato, temos

$$\begin{aligned} &\|\eta\varphi\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega)^N)} + \|\eta\varphi\|^2_{\mathrm{L}^\infty(0,T;H)} \\ &\leq Ce^{CT\|\overline{y}\|^2_\infty}\left(\|\eta g\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^N)} + \|\eta'\varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^N)} \right), \end{aligned} \tag{3.63}$$

que nos dá (3.62). Como uma consequência, obtemos uma primeira estimativa em $\Omega \times (0, T/2)$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{T/2}\int_\Omega e^{-2s\beta}\gamma^3|\varphi|^2 dxdt + \int_0^{T/2}\int_\Omega e^{-2s\beta}\gamma|\nabla\varphi|^2 dxdt + \|\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)^N} \\
\leq C(T, s; \lambda)&\bigg(\int_0^{3t/4}\int_0^{\Omega} e^{-4s\hat{\beta}+2s\beta^*}\gamma^{*15/2}|g|^2 dxdt + \int_{T/2}^{3T/4}\int_\Omega e^{-8s\hat{\beta}+6s\beta^*}\gamma^{*16}|\varphi|^2 dxdt\bigg).
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Por outro lado, uma vez que $\alpha = \beta$ em $\Omega \times (T/2, T)$, temos:

$$\begin{aligned}
&\int_{T/2}^{T}\int_\Omega e^{-2s\beta}\gamma^3|\varphi|^2 dxdt + \int_{T/2}^{T}\int_\Omega e^{-2s\beta}\gamma|\nabla\varphi|^2 dxdt \\
&= \int_{T/2}^{T}\int_\Omega e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2 dxdt + \int_{T/2}^{T}\int_\Omega e^{-2s\alpha}\xi|\nabla\varphi|^2 dxdt \\
&\leq CI(s, \lambda; \varphi).
\end{aligned}$$

Assim, em virtude da desigualdade de Carleman dada no Teorema 3.2, temos:

$$\begin{aligned}
&\int_{T/2}^{T}\int_\Omega e^{-2s\beta}\gamma^3|\varphi|^2 dxdt + \int_{T/2}^{T}\int_\Omega e^{-2s\beta}\gamma|\nabla\varphi|^2 dxdt \\
&\leq C(T, s, \lambda)\bigg(\iint_Q e^{-4s\hat{\alpha}+2s\alpha^*}(\xi^*)^{15/2}|g|^2 dxdt \\
&+ \iint_{\omega\times(0,T)} e^{-8s\hat{\alpha}+6s\alpha^*}(\xi^*)^{16}|\varphi|^2 dxdt\bigg).
\end{aligned}$$

Finalmente, da definição de β, β^*, $\hat{\beta}$, γ e γ^*, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{T/2}^{T}\int_\Omega e^{-2s\beta}\gamma^3|\varphi|^2 dxdt + \int_{T/2}^{T}\int_\Omega e^{-2s\beta}\gamma|\nabla\varphi|^2 dxdt \\
&\leq C(T, s, \lambda)\bigg(\iint_Q e^{-4s\hat{\beta}+2s\beta^*}(\gamma^*)^{15/2}|g|^2 dxdt \\
&+ \iint_{\omega\times(0,T)} e^{-8s\hat{\beta}+6s\beta^*}(\gamma^*)^{16}|\varphi|^2 dxdt\bigg)
\end{aligned}$$

que, juntamente com (3.64), nos dá (3.61). ■

Com a ajuda do lema anterior, provaremos agora uma resultado de controlabilidade nula para (3.58) sem regularidade adicional para o controle v e o estado y.

Proposição 3.1. *Sejam $y^0 \in H$ e $e^{s\beta^*}(\hat{\gamma})^{-1/2}f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^N)$. Podemos encontrar $v \in L^2(\omega \times (0, T))^N$ tal que (3.58)-(3.60)é satisfeito.*

Prova: Primeiro, usando o método desenvolvido em [7], provaremos um resultado de controlabilidade aproximada para (3.58)-(3.60).

Consideremos, para cada $\psi^0 \in H$, a solução para (3.7) (com lado direito nulo), isto é,

$$\begin{cases} -\psi_t - D\psi\overline{y} - \Delta\psi + \nabla q = 0 & \text{em } Q, \\ \nabla \cdot \psi = 0 & \text{em } Q, \\ \psi = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \psi(T) = \psi^0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{3.65}$$

Introduzamos, para cada $\epsilon > 0$, o seguinte funcional:

$$J_\epsilon(\psi^0) = \frac{1}{2}\iint_{\omega\times(0,T)} |\psi|^2\, dxdt + \epsilon \left\|\psi^0\right\|_H + \int_\Omega \psi(0)\cdot y^0 dx + \int_0^T < f, \psi > dt \ \ \forall \psi^0 \in H.$$

Aqui, $< .,. >$ denota a dualidade entre $H^{-1}(\Omega)^N$ e $H_0^{-1}(\Omega)^N$.

Provemos que para todo $\epsilon > 0$, J_ϵ possui um único mínimo.

De fato, é imediato verificar que J_ϵ é contínuo (e consequentemente semicontínuo inferiormente). Utilizando o fato que a desigualdade de Carleman (3.61) é equivalente a uma propriedade de continuação única para o sistema (3.65) (Ver [6]), temos que J_ϵ é estritamente convexo. Portanto, se provarmos que J_ϵ é coercivo, segue, em vista do Teorema 1.8, que J_ϵ possui um único mínimo. Dessa forma, provemos que

$$\liminf_{\|\psi^0\|_H \longrightarrow \infty} \frac{J_\epsilon(\psi^0)}{\left\|\psi^0\right\|_H} \geq \epsilon. \tag{3.66}$$

Para isso, consideremos $\{\psi_j^0\}$ uma sequência em H tal que

$$\left\|\psi_j^0\right\|_H \longrightarrow \infty \text{ quando } j \longrightarrow \infty. \tag{3.67}$$

E denotemos por $\{\psi_j\}$ a sequência de soluções correspondentes. Consideremos também

$$\widehat{\psi_j^0} = \frac{\psi_j^0}{\left\|\psi_j^0\right\|_H}, \qquad \widehat{\psi_j} = \frac{\psi_j}{\left\|\psi_j^0\right\|_H}.$$

Obviamente $\widehat{\psi_j}$ é a solução associada de (3.65), com dado normalizado $\widehat{\psi_j^0}$.

Temos

$$\frac{J_\epsilon(\psi_j^0)}{\left\|\psi_j^0\right\|_H} = \frac{1}{2}\left\|\psi_j^0\right\|_H \iint_{\omega\times(0,T)} \left|\widehat{\psi_j}\right|^2 dxdt + \epsilon + \int_\Omega \widehat{\psi_j}(0)\cdot y^0 dx + \int_0^T < f, \widehat{\psi_j} > dt. \tag{3.68}$$

Distinguiremos os seguintes casos:

Caso 1. $\liminf_{j\longrightarrow\infty} \iint_{\omega\times(0,T)} \left|\widehat{\psi_j}\right|^2 dxdt > 0$;

Neste caso, devido a (3.67), o primeiro termo em (3.68) tende a $+\infty$, enquanto os outros termos permanecem limitados. Portanto, neste caso teremos

$$\liminf_{j\longrightarrow\infty} \frac{J_\epsilon(\psi^0)}{\|\psi^0\|_H} = +\infty.$$

Caso 2. $\liminf_{j\longrightarrow\infty} \iint_{\omega\times(0,T)} \left|\widehat{\psi_j}\right|^2 dxdt = 0$;

Consideremos uma subsequência (ainda denotada pelo índice j, para simplificar a notação) tal que

$$\iint_{\omega\times(0,T)} \left|\widehat{\psi_j}\right|^2 dxdt \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad j \longrightarrow \infty. \tag{3.69}$$

Extraindo subsequências, podemos deduzir, uma vez que a sequência é limitada, que

$$\widehat{\psi_j^0} \rightharpoonup \widehat{\psi^0} \;\; \text{em} \;\; H. \tag{3.70}$$

Temos também

$$\widehat{\psi_j} \rightharpoonup \widehat{\psi} \;\; \text{em} \;\; L^2(0,T;V) \quad e \quad \widehat{\psi_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \widehat{\psi} \;\; \text{em} \;\; L^\infty(0,T;H) \tag{3.71}$$

onde $\widehat{\psi}$ é, juntamente com algum $\widehat{q_1}$, a solução de (3.65) com dado $\widehat{\psi^0}$. De acordo com (3.69), temos que

$$\widehat{\psi} \equiv 0 \;\; \text{em} \;\; \omega\times(0,T)$$

e, como consequência de (3.61), que $\widehat{\psi^0} \equiv 0$. Assim

$$\widehat{\psi_j^0} \rightharpoonup 0 \;\; \text{em} \;\; H,$$

e, portanto,

$$\widehat{\psi} \equiv 0 \;\; \text{em} \;\; Q.$$

Como consequência, deduzimos que

$$\liminf_{j\longrightarrow\infty} \frac{J_\epsilon(\psi^0)}{\|\psi^0\|_H} \geq \liminf_{j\longrightarrow\infty} \left[\epsilon + \int_\Omega \widehat{\psi_j}(0)\cdot y^0 dx + \int_0^T < f, \widehat{\psi_j} > dt\right] \geq \epsilon$$

e J_ϵ é coercivo. Segue que J_ϵ possui um único mínimo ψ_ϵ^0. Denotamos por ψ_ϵ a solução de (3.65) correspondente a esse dado minimizante.

Façamos $v_\epsilon = \psi_\epsilon 1_\omega$ e denotemos por y_ϵ a solução associada de (3.58). Do fato que $J_\epsilon(\psi_\epsilon^0) \leq J_\epsilon(0) = 0$ e usando (3.61), encontramos

$$\|\psi_\epsilon 1_\omega\|_{L^2(Q)^N} \leq C(\left\|y^0\right\|_H + \left\|e^{s\beta^*}(\hat{\gamma})^{-1/2} f\right\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^N)} \tag{3.72}$$

e, em particular, v_ϵ é uniformemente limitada em $L^2(\omega \times (0,T))^N$.

Por outro lado, usando o fato que $J_\epsilon(\psi_\epsilon^0) \leq J_\epsilon(\psi_\epsilon^0 + \lambda\psi^0)$ para todo $\psi^0 \in H$ e a dualidade entre y_ϵ e ψ, deduzimos que

$$\|y_\epsilon(T)\|_H \leq \epsilon. \tag{3.73}$$

De fato, sendo $J_\epsilon(\psi_\epsilon^0) \leq J_\epsilon(\psi_\epsilon^0 + \lambda\psi^0)$, obtemos

$$\begin{aligned} -\lambda \iint_{\omega\times(0,T)} \psi_\epsilon \cdot \psi dxdt \;\; &\leq \;\; \frac{\lambda^2}{2} \iint_{\omega\times(0,T)} |\psi|^2 dxdt + \lambda \int_\Omega \psi(0) \cdot y^0 dx \\ &+\lambda \int_0^T < f, \psi > dt + \epsilon|\lambda| \left\|\psi^0\right\|, \end{aligned}$$

onde ψ é a solução de (3.65) com dado ψ^0. Então, dividindo por $\lambda \neq 0$ e fazendo $\lambda \to 0$ pela direita, vemos que

$$-\epsilon||\psi^0|| \leq \iint_{\omega\times(0,T)} \psi_\epsilon \cdot \psi dxdt + \int_\Omega \psi(0) \cdot y^0 dx + \int_0^T < f, \psi > dt.$$

Analogamente, fazendo $\lambda \to 0$ pela esquerda, vemos que

$$\iint_{\omega\times(0,T)} \psi_\epsilon \cdot \psi dxdt + \int_\Omega \psi(0) \cdot y^0 dx + \int_0^T < f, \psi > dt \leq \epsilon||\psi^0||.$$

Portanto,

$$\left| \iint_{\omega\times(0,T)} \psi_\epsilon \cdot \psi dxdt + \int_\Omega \psi(0) \cdot y^0 dx + \int_0^T < f, \psi > dt \right| \leq \epsilon||\psi^0||.$$

Como mencionado acima, temos que y_ϵ é solução de

$$\begin{cases} Ly + \nabla p = f + \psi_\epsilon 1_\omega & \text{em } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{em } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y^0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação do sistema acima por ψ e utilizando a dualidade entre y_ϵ e ψ, concluimos que

$$(y_\epsilon(T), \psi^0) = (y^0, \psi(0)) + \iint_{\omega\times(0,T)} \psi_\epsilon \cdot \psi dxdt + \int_0^T < f, \psi > dt,$$

ou seja,

$$|(y_\epsilon(T), \psi^0)| \leq \epsilon||\psi^0||, \quad \forall \psi^0 \in H,$$

que é justamente (3.73).

Combinando (3.72) e (3.73) garatimos a existência de um controle v (o limite fraco de uma subsequência de (v_ϵ) em $L^2(\omega \times (0,T))^N$) tal que a solução associada a (3.58) satisfaz (3.60). Isto nos dá a controlabilidade nula para (3.58)-(3.60). $\blacksquare$

Apresentamos agora um segundo resultado de controlabilidade nula para (3.58), onde olharemos para soluções mais regulares. Este resultado será usado para deduzir a controlabilidade para o sistema não-linear (3.1) na última seção.

Para este fim, daremos a definição dos espaços onde o sistema (3.58) será resolvido. Uma vez que estes espaços dependem da dimensão, eles serão denotados por E_N. Consideremos os seguintes espaços:

$$E_2 = \Big\{ (y,v) \in E_0 : \exists p \text{ tal que } e^{s\beta^*}(\hat{\gamma})^{-1/2}(Ly + \nabla p - v1_\omega) \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^2) \Big\}$$

e

$$\begin{aligned} E_3 \;\; = \;\; & \Big\{ (y,v) \in E_0 : e^{s\beta^*/2}(\hat{\gamma})^{-1/4} y \in L^4(0,T;L^{12}(\Omega)^3), \\ & \exists p \text{ tal que } e^{s\beta^*}(\hat{\gamma})^{-1/2}(Ly + \nabla p - v1_\omega) \in L^2(0,T;W^{-1,6}(\Omega)^3) \Big\}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} E_0 \;\; = \;\; & \Big\{ (y,v) : e^{2s\hat{\beta} - s\beta^*}(\gamma^*)^{-15/4} y, \;\; e^{4s\hat{\beta} - 3s\beta^*}(\gamma^*)^{-8} v1_\omega \in L^2(Q)^N, \\ & e^{s\beta^*/2}(\hat{\gamma})^{-1/4} y \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H) \Big\}. \end{aligned}$$

Nós temos que E_2 e E_3 são espaços de Banach com as respectivas normas

$$\begin{aligned} ||(y,v)||_{E_2} \;\; = \;\; & \Big(||e^{2s\hat{\beta} - s\beta^*}(\gamma^*)^{-15/4} y||^2_{L^2(Q)^2} + ||e^{4s\hat{\beta} - 3s\beta^*}(\gamma^*)^{-8} v1_\omega||^2_{L^2(Q)^2} \\ & + ||e^{s\beta^*/2}(\hat{\gamma})^{-1/4} y||^2_{L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)} \\ & + ||e^{s\beta^*}(\hat{\gamma})^{-1/2}(Ly + \nabla p - v1_\omega)||^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^2)} \Big)^{1/2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} ||(y,v)||_{E_3} \;\; = \;\; & \Big(||e^{2s\hat{\beta} - s\beta^*}(\gamma^*)^{-15/4} y||^2_{L^2(Q)^3} + ||e^{4s\hat{\beta} - 3s\beta^*}(\gamma^*)^{-8} v1_\omega||^2_{L^2(Q)^3} \\ & + ||e^{s\beta^*/2}(\hat{\gamma})^{-1/4} y||^2_{L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)} \\ & + ||e^{s\beta^*/2}(\hat{\gamma})^{-1/2} y||^2_{L^4(0,T;L^{12}(\Omega)^3)} \\ & + ||e^{s\beta^*}(\hat{\gamma})^{-1/2}(Ly + \nabla p - v1_\omega)||^2_{L^2(0,T;W^{-1,6}(\Omega)^3)} \Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Observação 3.10. *Uma vez que* $(y,v) \in E_N$*, então podemos aplicar a Proposição 3.1 e concluir que* $y(T) = 0$*. Portanto* y *e* v *resolvem, juntamente com algum* p *um problema de controlailidade nula para o sistema (3.6) com lado direito* f *apropriado.*

Em vista da desigualdade de Carleman (3.61), temos o seguinte resultado:

Proposição 3.2. *Assumindo que* $\overline{y}$ *satisfaz (3.5) e que as seguintes hipóteses adicionais sobre a condição inicial e o lado direito valem:*

- *Se* $N = 2: \; y^0 \in H, \; e^{s\beta^*}(\hat{\gamma})^{-1/2} f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^2)$.
- *Se* $N = 3: y^0 \in H \cap L^4(\Omega)^3, \; e^{s\beta^*}(\hat{\gamma})^{-1/2} f \in L^2(0,T;W^{-1,6}(\Omega)^3)$.

Então existe um controle $v \in L^2(\omega \times (0,T))^N$ *tal que, se* y *é (juntamente com algum* p*) a solução associada para (3.58) nós temos que* $(y,v) \in E_N$*. Em particular, (3.60) vale.*

Prova: Ver [14, 20] . ■

3.4 Controlabilidade exata para trajetórias

Nesta seção, usando argumentos similares aos desenvolvidos em [20], daremos a prova do Teorema 3.1. Veremos que os resultados da seção anterior nos permitirão "inverter" localmente uma equação não-linear. De fato, a regularidade dada na seção anterior será suficiente para aplicar um teorema de aplicação inversa (ver Teorema A.1).

Assim, fazemos $y = \overline{y} + z$ e $p = \overline{p} + q$ e substituimos em (3.1). Uma vez que $(\overline{y},\overline{p})$ resolve (3.4), encontramos:

$$\begin{cases} Lz + z \cdot \nabla z + \nabla q = v 1_\omega & \text{em } Q, \\ \nabla \cdot z = 0 & \text{em } Q, \\ z = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z(0) = y^0 - \overline{y}^0 & \text{em } \Omega \end{cases} \tag{3.74}$$

(lembramos que L é dado por (3.59)).

Desse modos reduzimos nosso problema a um resultado de controlabilidade local nula para a solução (z,q) do problema não-linear (3.74).

No que segue iremos usar o Teorema A.1 com os espaços $E = E_N$, e

$$G = \begin{cases} L^2(e^{s\beta^*}(\hat{\gamma})^{-1/2}(0,T); H^{-1}(\Omega)^2) \times H & \text{se} \quad N = 2, \\ L^2(e^{s\beta^*}(\hat{\gamma})^{-1/2}(0,T); W^{-1,6}(\Omega)^3) \times (H \cap L^4(\Omega)^3) & \text{se} \quad N = 3 \end{cases}$$

e o operador

$$\mathcal{A}(z,v) = (Lz + z \cdot \nabla z + \nabla q - v1_\omega, z(0)) \ \ \forall (z,v) \in E_N.$$

Temos o seguinte resultado:

Proposição 3.3. *Assumindo que* $\overline{y} \in L^\infty(Q)^N$. *Então* $\mathcal{A} \in C^1(E;G)$.

Prova: Da definição dos espaços E_N, temos que todos os termos, exceto o termo $z \cdot \nabla z$, aparecendo na definição de $\mathcal{A}$ são lineares e contínuos (e consequentemente C^1). Entretanto o operador

$$\big((z_1,v_1),(z_2,v_2)\big) \mapsto z_2 \cdot \nabla z_1 \tag{3.75}$$

é bilinear, assim é suficiente apenas mostrar sua continuidade de $E \times E$ em W, onde

$$W = \begin{cases} L^2(e^{s\beta^*}(\hat{\gamma})^{-1/2}(0,T); H^{-1}(\Omega)^2) & \text{se} \quad N = 2, \\ L^2(e^{s\beta^*}(\hat{\gamma})^{-1/2}(0,T); W^{-1,6}(\Omega)^3) & \text{se} \quad N = 3. \end{cases}$$

No que segue iremos usar o seguinte fato: $(z_2 \cdot \nabla z_1)_i = \displaystyle\sum_{j=1}^N \partial_j(z_{1,i}z_{2,j})$, $i = 1, \dots, N$.

Para $N = 2$ podemos usar que $e^{s\beta^*/2}(\hat{\gamma})^{-1/4} \in L^4(Q)^2$ para qualquer $(z,v) \in E$ (ver [39, cap. 3, seção 3.3]) e, portanto,

$$\begin{aligned} &\|z_2 \cdot \nabla z_1\|_{L^2(e^{s\beta^*}(\hat{\gamma})^{-1/2}(0,T);H^{-1}(\Omega)^2)} \leq C\|\sum_{i,j=1}^2 z_{1,i}z_{2,j}\|_{L^2(e^{s\beta^*}(\hat{\gamma})^{-1/2}(0,T);L^2(\Omega)^2)} \\ &\leq C\left\|e^{s\beta^*/2}(\hat{\gamma})^{-1/4}z_1\right\|_{L^4(Q)^2}\left\|e^{s\beta^*/2}(\hat{\gamma})^{-1/4}z_2\right\|_{L^4(Q)^2} \\ &\leq \widetilde{C}\left\|e^{s\beta^*/2}(\hat{\gamma})^{-1/4}z_1\right\|_{L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)}\left\|e^{s\beta^*/2}(\hat{\gamma})^{-1/4}z_2\right\|_{L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)}. \end{aligned}$$

Por outro lado, para $N = 3$ encontramos que

$$\begin{aligned} &\|z_2 \cdot \nabla z_1\|_{L^2(e^{s\beta^*}(\hat{\gamma})^{-1/2}(0,T);W^{-1,6}(\Omega)^3)} \leq C\|\sum_{i,j=1}^3 z_{1,i}z_{2,j}\|_{L^2(e^{s\beta^*}(\hat{\gamma})^{-1/2}(0,T);L^6(\Omega)^3)} \\ &\leq C\|z_1\|_{L^4(e^{s\beta^*/2}(\hat{\gamma})^{-1/4};L^{12}(\Omega)^3)}\|z_2\|_{L^4(e^{s\beta^*/2}(\hat{\gamma})^{-1/4};L^{12}(\Omega)^3)}. \end{aligned}$$

Portanto em ambos os casos a continuidade de (3.75) é estabelecida. E isto prova o resultado. ■

Como uma consequência deste resultado podemos aplicar o Teorema A.1 para $e_0 = 0 \in \mathbb{R}^N$ e $h_0 = 0$. De fato, $\mathcal{A}'(0,0) : E \longrightarrow G$ é dado por:

$$\mathcal{A}'(0,0)(z,v) = (Lz + \nabla q, z(0)), \quad \forall (z,v) \in E.$$

Temos que $\mathcal{A}'(0,0)$ é sobrejetiva devido ao resultado de controlabilidade nula para o sistema linearizado (3.58) dado na Proposição 3.2.

Como uma conclusão, aplicando o Teorema A.1, temos que existe $\delta > 0$ tal que se $\|z(0)\|_{L^{2N-2}(\Omega)^N} \leq \delta$ então podemos encontrar um controle v tal que a solução associada a (3.74) satisfaz $z(T) = 0$ em Ω, concluindo a prova do Teorema 3.1.

Apêndice A

Resultados Complementares

Este capítulo é destinado a apresentar alguns resultados de existência, unicidade, regularidade e de teoria do controle e que foram utilizadas na presente dissertação.

Lema A.1. *Assuma que* $\psi^0 \in V$ *e* $g \in L^2(Q)^N$*. Então a solução fraca* (ψ, h) *do sistema linear de Stokes*

$$\begin{cases} -\psi_t - \Delta\psi + \nabla h = g & em\ Q, \\ \nabla \cdot \psi = 0 & em\ Q, \\ \psi = 0 & sobre\ \Sigma, \\ \psi(T) = \psi^0 & em\ \Omega. \end{cases} \tag{A.1}$$

é, na verdade, uma solução forte. Mais precisamente, temos

$$\psi \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap C([0,T];V), \ \psi_t \in L^2(Q) \ e \ h \in L^2(0,T;H^1(\Omega)).$$

Além disso, existem uma constante $C > 0$*, dependendo somente de* Ω*, tal que*

$$||\psi||_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + ||\psi_t||_2 + ||h||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C(||\psi^0||_{H^1} + ||g||_2). \tag{A.2}$$

Prova: Ver [11]. ■

Observação A.1. *Se supormos* $\psi^0 \in H$ *e* $g \in L^2(Q)^N$ *então o problema (A.1) tem exatamente uma solução fraca definida na classe* $L^2(0,T;V) \cap C([0,T];H)$*, e tem-se uma estimativa de energia equivalente à (A.2).*

Lema A.2. *Assuma que* $1 < q_1, q_2 < \infty$*,* $g \in L^{q_1}(0,T;L^{q_2}(\Omega)$ *e* $\psi^0 \in W^{1,q_2}(\Omega) \cap H$*. Então a solução única* (ψ, h) *do sistema (A.1) satisfaz*

$$\psi \in L^{q_1}(0,T;W^{2,q_2}(\Omega)), \ \psi_t \in L^{q_1}(0,T;L^{q_2}(\Omega)), \ \nabla h \in L^{q_1}(0,T;L^{q_2}(\Omega).$$

Além disso, existe uma constante positiva C, dependendo apenas de Ω, tal que

$$\|\psi\|_{L^{q_1}(0,T;W^{2,q_2})} + \|\psi_t\|_{L^{q_1}(0,T;L^{q_2})} + \|\nabla h\|_{L^{q_1}(0,T;L^{q_2})} \leq C(\|g\|_{L^{q_1}(0,T;L^{q_2})} + \|\psi_0\|_{W^{1,q_2}}).$$

Prova: Ver [18]. ∎

Lema A.3. *Assuma que $u^0 \in L^2(\Omega)$ e $g \in L^2(Q)$. Seja u a solução do seguinte sistema adjunto da equação do calor:*

$$\begin{cases} -u_t - \Delta u = g & \text{em } Q, \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ u(T) = u^0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{A.3}$$

Então existe uma constante positiva $C > 0$, dependendo somente de Ω e ω, tal que

$$I(s,\lambda,u) \leq C\left(s^3\lambda^4 \iint_{\omega_1\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3|u|^2dxdt + \iint_Q e^{-2s\alpha}|g|^2dxdt\right),$$

para qualquer $s \geq C(T^7+T^8)$ e qualquer $\lambda \geq C$. Aqui, $\omega_1 \subset \omega$ é aberto não-vazio e $I(s,\lambda,u)$ é definido em (3.11) *para $\varphi = u$ e as funções peso α e ξ são definidas em* (3.10).

Prova: Ver [14]. ∎

Enunciamos a seguir um teorema muito utilizado na resolução de problemas de controle. Este resultado é, em verdade, uma consequência de um teorema de função inversa.

Teorema A.1. *Sejam E e G dois espaços de Banach e seja $\mathcal{A} : E \to G$ tal que $\mathcal{A} \in C^1(E;G)$. Assumindo que $e_0 \in E$, $\mathcal{A}(e_0) = h_0$ e $\mathcal{A}'(e_0) : E \to G$ é sobrejetiva. Então existe $\delta > 0$ tal que, para todo $h \in G$ satisfazendo $||h - h_0||_G < \delta$, existe uma solução da equação*

$$\mathcal{A}(e) = h, \quad e \in E.$$

Prova: Ver [1]. ∎

O resultado a seguir garante a existência da função peso básica η^0 utilizada na demonstração da desigualdade de Carleman no Capítulo 3.

Lema A.4. *Seja ω um aberto não vazio arbitrário tal que $\omega \subset \Omega$. Então existe uma função $\eta^0 \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que*

$$\eta^0(x) > 0, \forall x \in \Omega, \quad \eta^0 \equiv 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \quad |\nabla\eta^0(x)| > 0, \ \forall x \in \overline{\Omega\backslash\omega}.$$

Prova: Ver [14]. ■

O próximo resultado é uma desigualdade tipo Carleman para a solução y de uma equação elítica de segunda ordem (geral) com lado direito em $H^{-1}(\Omega)$ e com o valor na fronteira pertencente a $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Esta desigualdade nos permite obter, por exemplo, boas estimativas sobre o termo de pressão no sistema de Navier-Stokes que se mostra muito útil no contexto de problemas de controle.

Consideremos Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^{n+1}$ com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2. Seja $y \in H^1(\Omega)$ uma solução do problema elíptico:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=0}^{n} b_j(x)\frac{\partial y}{\partial x_i} + \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(c_i(x)y) + d(x)y = f + \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \text{ em } \Omega, \\ y = g \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{A.4}$$

onde $a_{ij} \in C^2(\overline{\Omega}),\ b_j, c_i, d \in L^\infty(\Omega)$ para $j = 0, \dots, n$ e os a_{ij} verificam

$$\exists\beta > 0,\ \forall\xi \in \mathbb{R}^{n+1},\ \forall x \in \Omega,\ \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \beta|\xi|^2.$$

Suponhamos que $f \in L^2(\Omega),\ f_j \in L^2(\Omega),\ j = 0, \dots, n,\ g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Considerando a função η^0 dada pelo Lema $A.4$, colocamos $\eta(x) = e^{\lambda\eta^0(x)},\ \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \geq 1$ e temos:

Teorema A.2. *Assumindo as hipóteses acima e seja $y \in H^1(\Omega)$ uma solução de A.4. Então, existe uma constante $C > 0$ independente de s e λ e parâmetros $\hat{\lambda} > 1$ e $\hat{s} > 1$ tal que $\forall\lambda \geq \hat{\lambda}, \forall s \geq \hat{s}$,*

$$\int_\Omega |\nabla y|^2 e^{2s\eta} dx + s^2\lambda^2 \int_\Omega \eta^2 |y|^2 e^{es\eta} dx \leq C\bigg(s^{\frac{1}{2}} e^{2s} ||g||^2_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \frac{1}{s\lambda^2} \int_\Omega \frac{|f|^2}{\eta} e^{2s\eta} dx \\ + \sum_{j=0}^{n} s \int_\Omega |f_j|^2 \eta e^{2s\eta} dx + \int_\omega (|\nabla y|^2 + s^2\lambda^2\eta^2|y|^2) e^{2s\eta} dx \bigg).$$

Prova: Ver [21]. ■

Referências Bibliográficas

[1] V. M. Alekseev, V. M. Tikhomirov, S. V. Fomin, Optimal control, Contemp. Soviet Math, Consultants Bureau, New York, 1987. Traduzido do Russo por V. M. Volosov.

[2] J. P. Aubin, I. Ekeland, Applied Nolinear Analysis, Dover, New York, 2006.

[3] H. Brézis, Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications, Dunod, Paris, 1999.

[4] Yu. V. Egorov, Some problems in the theory of optimal control, Zh. Vyschisl. Mat. i Mat. Fiz. 5 (1963) 887-904; traduzido em USSR Comput. Math. and Math. Phys. 5 (1963).

[5] L. C. Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, 1997.

[6] C. Fabre, Uniquiness results for Stokes equations and their consequences in linear and nonlinear control problems, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 1 (1995/1996), 35-75.

[7] C. Fabre, J. -P. Puel, E. Zuazua, Approximated controllability of the semilinear heat equations, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 125 (1995), 31-61.

[8] J.M. Coron, On the controllability of $2-D$ incompressible perfect fluids. J.M.P.A., 75 (1996), 155-188.

[9] J.M. Coron, On the controllability of the 2-D incompressible Navier-Stokes equations with the Navier slip boundary conditions", ESAIM Control Optim. Calc. Var. (www.emath.fr/cocv/), 1 (1996), 35-75.

[10] H. Fattorini, Boundary control of temperature distribuitons in a parallepipedon, SIAM J. Control Optim., 13 (1975), 1-13.

[11] E. Fernández-Cara, S. Guerrero, Local exact controllability of micropolar fluids, J. Math. Fluid. Mech., 9 (2007) , 419-453.

[12] E. Fernández-Cara, S. Guerrero, O. Yu. Imanuvilov, J. -P. Puel, Local exact controllability of the Navier-Stokes system, J. Math. Pures Appl., 83 (12)(2004), 1501-1542.

[13] A. V. Fursikov, Exact boundary zero controllability of three dimensional Navier-Stokes equations, J. Dynamical and Control Systems, 1 (1995), 325-350.

[14] A. V. Fursikov, O. Yu. Imanuvilov, Controllability of Evolutions Equations, Lectures Notes Series, Vol. 34, Seoul National University, 1996.

[15] A. V. Fursikov, O. Yu. Imanuvilov, Exact controllability of the Navier-Stokes equations and Boussinesq equation, Russian Math. Surveys, 54 (3) (1999), 565-618.

[16] A. V. Fursikov, O. Yu. Imanuvilov, Exact local controllability of two dimensional Navier-Stokes equations (Russo), Mat. Sb. 187 (9) (1996) 103-138; traduzido em Sb. Math., 187 (9) (1996), 1335-1390.

[17] A. V. Fursikov, O. Yu. Imanuvilov, On exact boundary zero-controllability of two-dimensional Navier-Stokes equations", Acta Appl. Math., 37 (1994), 67-76.

[18] Y. Giga, H. Sohr, Abstract L^p estimates for the Cauchy problem with aplications to the Navier-Stokes equations in exterior domains, J. Functional Anal., 102 (1991), 72-94.

[19] O. Glass, Contrôlabilité exacte frontière de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles en dimension 3", C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 325 (1997), 987-992.

[20] O. Yu. Imanuvilov, Remarks on exact controllability for the Navier-Stokes equations, ESAIM Control Optim. Cal. Var., 6 (2001), 39-72.

[21] O. Yu. Imanuvilov, J. -P. Puel, Global Carleman estimates for weak solutions of elliptic nonhomogeneous Dirichlet problems C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 335 (2002), 33-38.

[22] S. Kesavan, Topics in Functional Analysis and Applications, Wiley Easten Limited, New Delhi, 1990.

[23] J. -L. Lions, Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome I. Contrôlabilité Exacte, Rech. Math. Appl. 8, Masson, Paris, 1988.

[24] J. -L. Lions, Exact controllability, stabilizaty and pertubations for distribuited systems, SIAM Review, 30 (1988), 1-68.

[25] J. -L. Lions, Remarks sur la contrôlabilité approchée, in "Spanish-French Conference on Distribuited Systems Control", Univ. Málaga, (1990), 77-87.

[26] J. -L. Lions, Quelques Méthodes de Résolution des Problémes aux Limites Non Lineáires, Dunod, Paris, 1969.

[27] J. -L. Lions, E. Zuazua, Contrôlabilité exacte des approximations de Galerkin des équations de Navier-Stokes, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 234 (1997) , 1015-1021.

[28] J. -L. Lions, E. Zuazua, Exact boundary controllability of Galerkin's approximations of Navier-Stokes equations, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., XXVI (4) (1998) , 605-621.

[29] J. -L. Lions, E. Zuazua, On the cost of controlling unstable systems: The case of boundary controls, J. Anal. Math., 73 (1997).

[30] M. P. Matos, Integral de Bochner e Espaços $L^p(0,T;X)$, Notas de Aulas do Curso de Verão, UFPB, João Pessoa, 1998.

[31] L. A. Medeiros, Exact Controllability for Wave Equations-HUM, 37º Seminário Brasileiro de Análise, Rio de Janeiro (1993), 63-173.

[32] L. A. Medeiros, Tópicos em Equações Diferenciais Parciais, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2006.

[33] L. A. Medeiros, J. L. Ferrer, Remarks on Approximate Controllability in Noncylindrical Domains, Comunications in Applied Analysis 6 (3) (2002), 375-392.

[34] L. A. Medeiros, P. H. Rivera, Espaços de Sobolev e Equacões Diferenciais Parciais, Textos de Métodos Matemáticos n°9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1975.

[35] R. T. Rockafellar, Convex Analysis, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1969.

[36] D. Russel, A unified boundary controllability theory for hiperbolic and parabolic partial and differential equations, Stud. Appl. Math., 52 (1973), 189-212.

[37] D. Russel, Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations. Recent progress and open questions, SIAM Rev., 20 (1978), 639-739.

[38] L. Tartar, An introduction to Sobolev Spaces and interpolation spaces, Lectures Notes of the Unione Matematica Italiana, 2000.

[39] R. Temam, Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis, Stud. Math. Appl., vol. 2, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1977.