Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Controlabilidade Finito-Aproximada e Nula para a Equação do Calor Semilinear

Elielson Mendes Pires

2010

Controlabilidade Finito-Aproximada e Nula para a Equação do Calor Semilinear

por

Elielson Mendes Pires

sob orientação de

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna (UFPB)

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba - UFPB, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Julho/2010
João Pessoa - PB

Controlabilidade Finito-Aproximada e Nula para a Equação do Calor Semilinear

por

Elielson Mendes Pires

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba - UFPB, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna (Orientador)

(Universidade Federal da Paraíba - UFPB)

Profa. Dra. Bianca Morelli Rodolfo Calsavara

(Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP)

Prof. Dr. Miguel Fidencio Loayza Lozano

(Universidade Federal de Pernambuco - UFPE)

Universidade Federal da Paraíba

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Ficha Catalográfica

PIRES, Elielson Mendes.

Controlabilidade Finito-Aproximada e Nula para Equação do Calor Semilinear.

Elielson Mendes Pires.

João Pessoa: UFPB/DM, 2010.

73 p.   29cm

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Paraíba, DM.

1. Equação do calor.   2. EDP's não lineares.

3. Controlabilidade.   4. Continuação única.

I. Análise   II. Título

Agradecimentos

A Deus, o Criador e sabedor de todas as coisas, a quem devemos toda honra, toda glória e todo louvor. *"De tudo o que se tem ouvido, o fim é: Teme à Deus, e guarda os seus mandamentos; porque isto é o dever de todo o homem"*.

Aos meus pais, Maria Venina e Gregório, que são minha inspiração e exemplos de vida. Quem dera eu um dia, ser metade do que eles foram. Agradeço-os pelo total incentivo desde o início para que eu me dedicasse ao máximo pelos estudos, por todos os ensinamentos dados a mim até hoje, principalmente o maior de todos, o amor.

À toda família, em especial, aos meus irmãos, Eli Carlos, Elizângela, Elis Regina, Milton, Antônio, Têca e (Em Memória) Haroldo. Agradeço-os por todo apoio moral, financeiro e ensinamentos preciosos dados até hoje. Deus estará sempre conosco.

Aos professores da graduação na UFMA, especialmente Cleber Cavalcanti, Marcos Antônio, Hilkias Jordão, Artur e Maxwell, pelos ensinamentos matemáticos e pelos incentivos que colaboraram pra eu estar aqui hoje.

Aos professores da Pós-Graduação, especialmente Daniel Marinho Pellegrino, João Marcos do Ó, Pedro Antônio Hinojosa Vera, pelos ensinamentos matemáticos preciosos dados durante o curso, nos quais irei reter para minha vida profissional.

Ao professor Fágner Dias Araruna, pelos ensinamentos matemáticos relevantes que obtive, pela paciência em orientar-me.

Aos professores Bianca Morelli Rodolfo Calsavara, Miguel Fidencio Loyaza Lozano e Shirley Maria Santos e Souza, pela participação na banca desta dissertação.

Aos colegas de Pós-Graduação, pelos ensinamentos obtidos através de discussões sadias, pelo suporte durante todo o curso, em especial, Adriano (tá me ouvindo?), Andréia (Andleia), Anderson, Flávio, Jairo (Ma), Roberto (Capistrano), Simeão, Tiago (Velanga), Valdecir (Ma) e Zé Francisco.

Aos amigos que fiz aqui: Anselmo (Júnior), Eduardo (Baiano), Elano (ap. 103),

Diego, Disson (ap. 103), Pitágoras (Negisfai), Maurício, Márcio (ap. 103), Rosângela, pelo companheirismo, por compartilhar momentos de felicidade, momentos de tristeza, pela amizade sincera. Que Deus os abençoe.

Ao CNPQ, pelo apoio financeiro.

Aos meus pais, Maria e Gregório.

Resumo

Consideremos a equação do calor semilinear envolvendo termos do gradiente em um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$. Assumimos que a não-linearidade é globalmente Lipschtz. Usando o método do ponto fixo, provamos que o sistema é finito-aproximadamente controlável e nulamente controlável, quando o controle age em um subconjunto não vazio do domínio.

Palavras-chave:

Equação do Calor, EDP's não lineares, Controlabilidade, Continuação Única.

Abstract

We consider the semilinear heat equation involving gradient terms in a bounded domain of $\mathbb{R}^n$. It is assumed the non-linearity is globally Lipschitz. We prove that the system is approximately controllable when the control acts on a bounded subset of the domain. The proof uses a variant of a classical fixed point method and is a simpler alternative to the earlier proof existing in the literature by means of the penalization of an optimal control problem. We also prove that the control may be built so that, in addition to the approximate controllability requirement, it ensures that the state reaches exactly a finite number of constraints.

Key-words:

Heat equation, Nonlinear PDE's, Controllability, Uniqueness Continuation.

Sumário

Notações e Simbologias:

- $(\cdot,\cdot)$ designa o produto interno em L^2;
- $|\cdot|$ designa a norma em L^2;
- $((\cdot,\cdot))$ designa o produto interno em H_0^1;
- $\|\cdot\|$ designa a norma em H_0^1;
- $\langle\cdot,\cdot\rangle$ quando não especificado, designa diferentes pares de dualidades;
- $\Delta = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ designa o operador laplaciano;
- q.s. - quase sempre;
- $\hookrightarrow$ designa imersão contínua;
- $\overset{c}{\hookrightarrow}$ designa imersão compacta;
- C quando não especificada, é uma constante positiva e arbitrária;
- $\prime = \dfrac{\partial}{\partial t}$;
- $\to$ designa convergência forte;
- $\rightharpoonup$ designa convergência fraca;
- $\overset{*}{\rightharpoonup}$ designa convergência fraca estrela.

.

Introdução

A palavra *controle* tem um significado duplo. Primeiramente, controlar um sistema pode ser entendido simplesmente testando ou certificando-se que seu comportamento é satisfatório. Em um sentido mais profundo, o controle é também agir, com a finalidade de garantir que o sistema se comporte como desejado.

"*... se cada instrumento pudesse realizar seu próprio trabalho, obedecendo ou antecipando a vontade de outra... se a lançadeira de tecido e a picareta tocassem o objetivo sem uma mão para os guiar, os engenheiros não necessitariam de empregados, nem os senhores de escravos.*"

Esta sentença de Aristóteles descreve de maneira transparente o objetivo principal da Teoria de Controle: a necessidade de automatizar processos deixou o ser humano ganhar mais liberdade e qualidade de vida.

Voltando ao tempo, concluiríamos facilmente que os romanos usaram alguns elementos da Teoria de Controle em seus arquedutos. De fato, sistemas ingênuos de válvulas regulantes eram usadas em sequência, nessas construções, para manter o nível de água constante.

Algumas pessoas dizem que, na antiga Mesopotânea, mais de 2000 anos a.C., o controle dos sistemas de irrigação era também uma arte bem conhecida.

Já no século VIII, J.Watt adaptou algumas idéias conhecidas por ele quando inventou a *máquina a vapor* e isto constituiu um passo magnífico na revolução industrial. Neste mecanismo, quando a velocidade das bolas aumenta, uma ou várias válvulas abrem-se e deixa o vapor escapar. Isto faz com que a pressão diminua. Quando isto acontece, isto é, quando a pressão dentro da caldeira fica mais fraca, a velocidade começa a baixar. A meta de introduzir e usar este mecanismo é manter, sempre que possível, a velocidade constante.

O astrônomo britânico G. Aéreo foi o primeiro cientista a analisar matematicamente o sistema regulados inventado por Watt. Mas a primeira e definitiva descrição matemática só foi determinada nos trabalhos de J.C.Maxwell, em 1868, onde alguns dos comportamentos irregulares encontrados na máquina a vapor eram descrito e alguns mecanismos de controle foram propostos.

As idéias centrais de Teoria de Controle logo ganhou um impacto notável e, nos anos vinte, engenheiros estavam preferindo usar o processo contínuo e técnicas de controle semi-automáticas ou automáticas. Deste modo, a Engenharia de Controle germinou e adquiriu o conhecimento de uma disciplina distinta.

Os desenvolvimentos de Indústrias e Tecnologia tiveram um tremendo impacto na história da Engenharia de Controle. Mas o desenvolvimento da Matemática tem um efeito semelhante. Realmente, depois dos anos trinta, eis que surgem duas estratégias já estabelecidas. A primeira estava baseada no uso de equações diferenciais e, então, as contribuições feitas pelos mais célebres matemáticos entre os séculos XVII e XIX desempenharam um papel fundamental nesta aproximação. A segunda, baseada em uma aproximação frequente, foi enormemente influenciado pelos trabalhos de J. Fourier.

Adequadamente, Teoria de Controle pode ser considerada, hoje em dia, sob dois pontos de vista diferentes e complementares: como um apoio teórico da Engenharia de Controle (uma parte de Engenharia de Sistema) e também como uma disciplina matemática. Na prática, o limite entre esses dois submundos é extremamente vago. De fato, Teoria de Controle é hoje em dia, uma das áreas mais interdisciplinares da Ciência, onde Engenharia e Matemáica fundem-se perfeitamente e enriquece um ao outro.

R. Kalman, um dos maiores protagonistas de Teoria de Controle moderna, disse em 1974 que, no futuro, os principais avanços em Controle e Otimização de sistemas dependeria mais do progresso matemático do que desenvolvimento tecnológico. Hoje, o estado da arte e as possibilidades que a tecnologia oferece são tão imprescindíveis que aquela declaração, provavelmente seria muito arriscada. Mas, sem nenhuma dúvida, o desenvolvimento da

Teoria de Controle vai exigir contribuições profundas que vêm de ambos os campos.

Devido à rica história da Teoria de Controle e todas as realizações matemáticas que foram empreendidas em seu domínio de influência, pode-se perguntar se este tempo chegou ao fim. Mas, na realidade, isto está longe de acontecer. Nossa sociedade prevê problemas novos diariamente para a Teoria de Controle e este fato estimula a criação de uma nova Matemática.

Vamos indicar brevemente como os problemas de controle são apresentados, hoje em dia, em termos matemáticos. Para fixar as idéias, suponha que queremos encontrar um bom comportamento de um sistema físico governado pela equação de estado

$$A\left(y\right)=f\left(v\right). \tag{1}$$

Aqui, y é o estado, o termo desconhecido do sistema que estamos dispostos a controlar. Ele pertence ao *conjunto de controles admissíveis* U_{ad}. Essa é a variável que podemos escolher livremente em U_{ad} para agir sobre o sistema.

Vamos assumir que $A:D\left(A\right)\subset Y\to Y$ e $f:U_{ad}\to Y$ sejam duas aplicações (lineares ou não lineares) dadas. O operador A determina a equação que deve ser satisfeita pelo estado y variável, de acordo com as leis da física. A função f indica a maneira como o controle v age no sistema que governa o estado. Por simplicidade, vamos supor que, para cada $v\in U_{ad}$, a equação do estado (1) possui exatamente uma solução $y=y\left(v\right)$ em Y. Veremos que, quando o sistema é controlável, o controle pode ser construído por meio de um funcional minimizante (função custo). O "melhor"entre todos os controles existentes que atinja o objetivo desejado é frequentemente chamado de controle ótimo.

Nesta dissertação, estudaremos algumas propriedades da equação do calor como existência de solução, unicidade e controlabilidade para o sistema com condições de contorno. Vamos ao problema:

Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$, $n\geq 1$, com fronteira Γ suficientemente regular.

Para $T > 0$, consideremos a equação do calor semilinear.

$$\begin{cases} u' - \Delta u + f\left(u, \nabla u\right) = v 1_{\omega} & \text{em } Q = \Omega \times \left(0, T\right), \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma = \Gamma \times \left(0, T\right), \\ u\left(x, 0\right) = u^{0}\left(x\right) & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Em (2), $u = u\left(x,t\right)$ é o estado, $v = v\left(x,t\right)$ é a função controle que age no sistema através do subconjunto não vazio ω e 1_{ω} denota a função característica de um subconjunto aberto não vazio ω de Ω.

Sobre a função $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n} \to \mathbb{R}$, assumimos por simplicidade que $f\left(0,0\right) = 0$, e que f será considerada globalmente Lipschtiz, ou seja,

$$\exists L > 0; \left|f\left(y, \zeta\right) - f\left(z, \eta\right)\right| \leq L\left(\left|y - z\right| + \left|\zeta - \eta\right|\right), \tag{3}$$

para todo, $y, z \in \mathbb{R}$ e $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^{n}$.

A equação de calor é um modelo usado em muitos fenômenos de difusão. Por exemplo, (2) prevê uma descrição da distribuição de temperatura e evolução em um corpo que ocupa a região Ω. Então, o controle v representa uma fonte localizada de calor.

O interesse em analisar a equação de calor acima não só resume-se ao fato de que é um modelo para uma grande classe de fenômenos físicos, mas também uma das equações diferenciais parciais mais significantes de tipo parabólico. Como nós veremos posteriormente, as propriedades principais de equações parabólicas como irreversibilidade no tempo e efeito regularizante tem algumas consequências muito importantes em problemas de controle.

O problema de controlabilidade aproximada de (2) pode ser formulado como segue: Dado $T > 0$, $u^{0}, u^{1} \in L^{2}\left(\Omega\right)$ e $\epsilon > 0$, encontrar um controle $v \in L^{2}\left(\omega \times \left(0, T\right)\right)$ tal que a solução u de (2) satisfaça

$$\left|u\left(T\right) - u^{1}\right| \leq \epsilon. \tag{4}$$

A grosso modo, queremos trazer o estado $u\left(T\right)$ para perto do objetivo desejado que é u^{1}. Em outras palavras, o problema de controlabilidade aproximada de (2) consiste em estudar a imagem da solução de (2) no tempo T.

$$R\left(u^{0}, T\right) = \left\{u\left(\cdot, T\right);\ u \text{ solução de (2) com } v \in L^{2}\left(\omega \times \left(0, T\right)\right)\right\},$$

é denso em $L^2(\Omega)$ ou não.

Estudaremos também uma versão mais forte deste problema que nos referimos como problema de controle finito-aproximado. Dado E, um subespaço de dimensão finita de $L^2(\Omega)$, o resto dos parâmetros do problema (2) continua inalterado. Procuramos um controle $v \in L^2(\omega \times (0,T))$ tal que a solução u de (2), satisfaz

$$\begin{cases} |u(T) - u^1| \leq \epsilon \\ \pi_E(u(T)) = \pi_E(u^1), \end{cases} \tag{5}$$

sendo π_E a projeção ortogonal de $L^2(\Omega)$ sobre E. Note que, além da controlabilidade aproximada exigida (4), o controle é pedido de tal forma que as projeções sobre E do estado $u(T)$ e do objetivo u^1 coincidam.

Veremos que, para este caso, a partir da controlabilidade aproximada podemos encontrar a controlabilidade nula do sistema (2) que também será objeto de estudo de nosso trabalho. A saber: diz-se que o sistema (2) é *nulamente controlável* ou *controlável a zero* no instante T se existe um controle $v \in L^2(\omega \times (0,T))$ tal que o correspondente problema de valor inicial e fronteira possui uma solução u, tal que

$$u(T) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{6}$$

Em outras palavras, o conjunto $R(u^0, T)$ formado por todos os estados alcançáveis no tempo T contém o zero, ou seja, $0 \in R(u^0, T)$.

Como provado em Lions e Zuazua [33], no contexto do sistema de controles lineares, controlabilidade finito-aproximada é uma consequência da controlabilidade aproximada.

Porém, no contexto não-linear, uma propriedade pode não ser deduzida como consequência da outra.

Estes problemas foram o objeto de pesquisa intensiva nos últimos anos. Em Fabre-Puel-Zuazua [9], adaptou-se o método do ponto fixo descrito em Zuazua [32], para provar a controlabilidade aproximada de (2), em particular para o caso em que $f = f(y)$, sendo f globalmente Lipschitz. Note que, neste resultado, a não linearidade não depende do gradiente do estado. Depois de Zuazua [33], a noção de controlabilidade finito-aproximada foi introduzida e, para isso, foi mostrado que vale quando $f = f(y)$, sendo f como em (3).

O caso $f = f(y, \nabla y)$, onde a não-linearidade também depende do gradiente, foi abordado em Fernández-Cara e Zuazua [12], por meio de aproximação ótima de controle introduzida por Lions [19]. Em [12], foi mostrado que, sob a suposição da f satisfazer (3), o sistema é aproximadamente controlável e de controlabilidade finito-aproximada. Um dos ingredientes fundamentais da prova em [12], foi o resultado de continuação única de Fabre [8] para a equação linear do calor

$$\varphi' - \Delta\varphi + a\varphi + \operatorname{div}(b\varphi) = 0,$$

com potenciais limitados $a \in L^{\infty}(Q)$, $b \in [L^{\infty}(Q)]^n$.

A meta desta dissertação é mostrar como a abordagem do ponto fixo pode ser adaptada para resolver estes dois problemas de controlabilidade para o sistema (2), em que a não-linearidade depende do seu estado e de seu gradiente. Para isto fizemos um estudo detalhado do trabalho devido a Zuazua [31].

Há uma limitação clara na aplicação deste método do ponto fixo: a suposição (3). Porém esta condição é necessária. De fato, um exemplo bem conhecido de A. Bamberger [15], mostra que o sistema (2) não é aproximadamente controlável quando $f(y) = |y|^{p-1} y$ para algum $p > 1$. Este contra exemplo não mostra que a suposição (3) é nítida, mas faz isto no contexto da não linearidade que cresce infinitamente como potência de y. Note, porém, que, como provado em Fernandez-Cara [10], quando $f = f(y)$, a controlabilidade nula vale sob a condição de crescimento mais fraca

$$|f(s)| \leq c\,|s| \log |s|\,, \quad \text{com} \;\; |s| \to \infty.$$

Posteriormente, Fernández-Cara e Zuazua em [11] consideraram a condição

$$|f(s)| \leq c(s) \log^{\frac{3}{2}} |s|\,, \;\; \text{com} \quad |s| \to \infty, \tag{7}$$

com $c > 0$ suficientemente pequeno, e estudaram a controlabilidade aproximada para o sistema.

Existem muitos outros trabalhos relacionados com o tema proposto. São eles: Naito-Seidman [25], Limaco-Medeiros [17], Bezerra [5], Teresa [28], Teresa-Zuazua [29], dentre outros.

No contexto da equação do calor linear, com coeficientes independentes do tempo, em Russell [26] foi provado que a controlabilidade nula da equação do calor é uma consequência da controlabilidade exata da equação da onda. Anos depois, em Lebeau-Robbiano [16], foi provado a controlabilidade nula sem qualquer suposição no controle de subdomínio ω, usando o desenvolvimento da série de Fourier e estimativa pontual nas autofunções do laplaciano.

Um resultado similar porém, em um contexto mais geral incluindo os coeficientes dependentes do tempo, foi provado em Fursikov-Imanuvilov [13], usando Desigualdade de Global de Carleman para a equação do calor. Em [13], os resultados de controlabilidade nula local foram também provados para a equação do calor semilinear. Anos depois, a conexão entre controlabilidade nula e aproximada foram investigadas em Fernández-Cara e Zuazua [11].

Vamos descrever agora o conteúdo desta dissertação, que está dividida em 4 capítulos.

No Capítulo 1, introduzimos alguns resultados básicos e algumas notações necessárias para o entendimento do trabalho.

No Capítulo 2, provamos a existência, unicidade e regularidade de soluções forte, fraca e ultra fraca da equação do calor linear. Usaremos o método de Faedo Galerkin para provarmos a existência de soluções forte. A solução fraca é obtida como limite de soluções fortes, enquanto a solução ultra fraca é obtida por meio do Teorema da Representação de Riesz.

No Capítulo 3, estudaremos a controlabilidade finito-aproximada e nula para o sistema linear do calor. A controlabilidade finito-aproximada é obtida via minimização de funcional, quanto a controlabilidade nula, é obtida como consequência da controlabilidade aproximada.

No Capítulo 4, estudaremos a controlabilidade finito-aproximada e nula, para o sistema semilinear do calor, que é obtida através do método do ponto fixo, em que se define uma aplicação $\mathcal{N}$, e mostra-se que esta aplicação é contínua, compacta e possui imagem limitada. Daí, aplicamos o Teorema do ponto fixo de Schauder e concluímos que $\mathcal{N}$ tem um ponto fixo e, portanto, temos a controlabilidade.

Para finalizar o trabalho, escrevemos um apêndice, que é apresentado o resultado que nos garante a existência e prologamento de soluções aproximadas, que é essencial para obtermos solução forte para a equação linear do calor.

Capítulo 1

Notações e Resultados

Neste capítulo serão fixadas terminologias, a notação e certos resultados sobre teoria das distribuições, resultados estes a serem usados no desenvolver deste texto.

1.1 Distribuições

1.1.1 Espaço de Funções Testes

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e uma função contínua $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, define-se suporte de f, e denota-se por $supp(f)$, o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega;\ f(x) \neq 0\}$. Assim, $\sup p\,(f)$ é um subconjunto fechado de Ω.

Uma n-upla de inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ é denominada de multi-índice e sua ordem é definida por $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Representa-se por D^α o operador de derivação de ordem $|\alpha|$, isto é,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, 0, ..., 0)$, define-se $D^0 u = u$, para toda função u.

Por $C_0^\infty(\Omega)$ denota-se o espaço vetorial, com as operações usuais, das funções infinitamente diferenciáveis definidas e com suporte compacto em Ω.

Um exemplo clássico de uma função de $C_0^\infty(\Omega)$ é dado por

Exemplo 1.1 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto tal que* $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| < 1\} \subset\subset \Omega$ *(fecho contido compactamente). Consideremos* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, *tal que*

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2 - 1}}, & se\ \|x\| < 1 \\ 0, & se\ \|x\| \geq 1 \end{cases},$$

onde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *e* $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ *é a norma euclidiana de* x. *Temos que* $f \in C^\infty(\Omega)$ *e* $supp(f) = \overline{B_1(0)}$ *é compacto, isto é* $f \in C_0^\infty(\Omega)$.

Definição 1.1 *Diz-se que uma sequência* $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *em* $C_0^\infty(\Omega)$ *converge para* φ *em* $C_0^\infty(\Omega)$, *quando forem satisfeitas as seguintes condições:*

(i) Existe um compacto K de Ω tal que $\text{supp}(\varphi) \subset K$ e $\text{supp}(\varphi_n) \subset K$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

(ii) $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ uniformemente em K, para todo multi-índice α.

Observação 1.1 *É possível dotar* $C_0^\infty(\Omega)$ *com uma topologia de forma que a noção de convergência nessa topologia coincida com a dada pela Definição 1.1.* (*veja* [27]).

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido da convergência acima definida, será denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado de Espaço das Funções Testes sobre Ω.

1.1.2 Distribuições sobre um aberto Ω do $\mathbb{R}^n$.

Uma distribuição (escalar) sobre Ω é todo funcional linear contínuo sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. Mais precisamente, uma distribuição sobre Ω é um funcional $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$, $\forall\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall\ \varphi,\ \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

(ii) T é contínua, isto é, se $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $(T(\varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$.

É comum denotar o valor da distribuição T em φ por $\langle T, \varphi \rangle$.

O conjunto de todas as distribuições sobre Ω com as operações usuais é um espaço vetorial, o qual representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Os seguintes exemplos de distribuições escalares desempenham um papel fundamental na teoria.

Exemplo 1.2 *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. O funcional $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x) \varphi(x) \, dx,$$

é uma distribuição sobre Ω univocamente determinada por u (ver [23]). Por esta razão, identifica-se u à distribuição T_u por ela definida e, desta forma, $L^1_{loc}(\Omega)$ será identificado a um subconjunto próprio de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemplo 1.3 *Consideremos $0 \in \Omega$ e o funcional $\delta_0 : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por*

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Em [23], vê-se que δ_0 é uma distribuição sobre Ω. Além disso, mostra-se que δ_0 não é definido por uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$.

Definição 1.2 *Diz-se que uma sequência $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge para T em $\mathcal{D}'(\Omega)$, quando a sequência numérica $(\langle T_n, \varphi \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ convergir para $\langle T, \varphi \rangle$ em $\mathbb{R}$, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*

Definição 1.3 *Sejam T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A derivada $D^\alpha T$ (no sentido das distribuições) de ordem $|\alpha|$ de T é o funcional definido em $\mathcal{D}(\Omega)$ por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observação 1.2 *Decorre da Definição 1.3 que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens.*

Observação 1.3 *$D^\alpha T$ é uma distribuição sobre Ω, onde $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. De fato, vê-se facilmente que $D^\alpha T$ é linear. Agora, para a continuidade, consideremos $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergindo para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Assim, $|\langle D^\alpha T, \varphi_n \rangle - \langle D^\alpha T, \varphi \rangle| \leq |\langle T, D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi \rangle| \to 0$, quando $n \to \infty$.*

Observação 1.4 *Vê-se em [24] que a aplicação* $D^{\alpha} : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ *tal que* $T \mapsto D^{\alpha}T$ *é linear e contínua no sentido da convergência definida em* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

1.1.3 Propriedades Elementares dos Espaços de Sobolev.

Dado um número inteiro $m > 0$, por $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, representa-se o espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω, isto é, o espaço vetorial das classes de funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que $D^{\alpha}u \in L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α, com $|\alpha| \leq m$.

Munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ quando } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} ess \, |D^{\alpha}u(x)|, \text{ quando } p = \infty,$$

$W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach (veja [24]).

Observação 1.5 *Quando* $p = 2$, *o espaço* $W^{m,2}(\Omega)$ *é denotado por* $H^m(\Omega)$, *o qual munido do produto interno*

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^{\alpha}u(x) \, D^{\alpha}v(x) \, dx$$

é um espaço de Hilbert.

Dado um espaço de Banach X, denotaremos por $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço de Banach das (classes de) funções u, definidas em $]0, T[$ com valores em X, que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X^p$ é integrável a Lebesgue em $]0, T[$, com a norma

$$\|u(t)\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por $L^{\infty}(0, T; X)$ representa-se o espaço de Banach das (classes de) funções u, definidas em $]0, T[$ com valores em X, que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X$ possui supremo essencial finito em $]0,T[$, com a norma

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{L^\infty(0,T;X)} &= \sup_{t\in]0,T[} ess\, \|u(t)\|_X \\ &= \inf\{c>0; \|u(t)\|_X \leq c \text{ q.s. em } \Omega\}\end{aligned}$$

Observação 1.6 *Quando $p=2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por*

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X \, dt.$$

Consideremos o espaço $L^p(0,T;X)$, $1<p<\infty$, com X sendo Hilbert separável, então podemos fazer a seguinte identificação

$$[L^p(0,T;X)]' \approx L^q(0,T;X'),$$

onde $(1/p)+(1/q)=1$. Quando $p=1$, faremos a identificação

$$\left[L^1(0,T;X)\right]' \approx L^\infty(0,T;X').$$

Essas identificações encontram-se em [21].

O espaço vetorial das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X é denominado de Espaço das Distribuições Vetoriais sobre $]0,T[$ com valores em X e denotado por $\mathcal{D}'(0,T;X)$.

Definição 1.4 *Dada $S\in\mathcal{D}'(0,T;X)$, define-se a derivada de ordem n como sendo a distribuição vetorial sobre $]0,T[$ com valores em X dada por*

$$\left\langle \frac{d^n S}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle S, \frac{d^n\varphi}{dt^n}\right\rangle, \ \forall\ \varphi\in\mathcal{D}(0,T).$$

Exemplo 1.4 *Dadas $u\in L^p(0,T;X)$, $1\leq p<\infty$, e $\varphi\in\mathcal{D}(0,T)$. A aplicação $T_u:\mathcal{D}(0,T)\to X$, definida por*

$$T_u(\varphi) = \int_0^T u(t)\,\varphi(t)\,dt,$$

é integral de Bochner em X, é linear e contínua no sentido da convergência de $\mathcal{D}(0,T)$, logo uma distribuição vetorial. A aplicação $u \mapsto T_u$ é injetiva, de modo que podemos identificar u com T_u e, neste sentido, temos $L^p(0,T;X) \subset \mathcal{D}'(0,T;X)$.

Consideremos o espaço

$$W^{m,p}(0,T;X) = \left\{u \in L^p(0,T;X)\,;\ u^{(j)} \in L^p(0,T;X)\,,\ j = 1,...,m\right\},$$

onde $u^{(j)}$ representa a j-ésima derivada de u no sentido das distribuições vetoriais. Equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(0,T;X)} = \left(\sum_{j=0}^{m} \left\|u^{(j)}\right\|^p_{L^p(0,T;X)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

$W^{m,p}(0,T;X)$ é um espaço de Banach (vide [2]).

Observação 1.7 *Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $W^{m,p}(0,T;X)$ será denotado por $H^m(0,T;X)$ que munido do produto interno*

$$(u,v)_{H^m(0,T;X)} = \sum_{j=0}^{m} \left(u^{(j)}, v^{(j)}\right)_{L^2(0,T;X)}$$

é um espaço de Hilbert. Denota-se por $H_0^m(0,T;X)$ o fecho, em $H^m(0,T;X)$, de $\mathcal{D}(0,T;X)$ e por $H^{-m}(0,T;X)$ o dual topológico de $H_0^m(0,T;X)$.

1.2 Principais Resultados Utilizados

Lema 1.1 (Imersão de Sobolev) *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular.*

(i) Se $n > 2m$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, onde $p \in \left[1, \dfrac{2n}{n-2m}\right]$.

(ii) Se $n = 2m$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, onde $p \in [1, +\infty[$.

(iii) Se $n = 1$ e $m \geq 1$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Prova Ver [4]. ■

Lema 1.2 (Rellich-Kondrachov) *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular.*

(i) Se $n > 2m$, então $H^m(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$, onde $p \in \left[1, \dfrac{2n}{n-2m}\right[$.

(ii) Se $n = 2m$, então $H^m(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$, onde $p \in [1, +\infty[$.

(iii) Se $2m > n$ então $H^m(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^k\left(\overline{\Omega}\right)$, onde k é um inteiro não negativo tal que $k < m - (n/2) \leq k + 1$

Prova Ver [4]. ■

Teorema 1.1 (Banach-Alaoglu-Bourbaki) *O conjunto $\boldsymbol{B}_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\}$ é compacto pela topologia fraca * $\sigma(E', E)$, onde E é um espaço de Banach.*

Prova Ver [4]. ■

Lema 1.3 (Lema de Lions) *Sejam $\mathcal{O}$ um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$, $(g_m)_m$ e g funções de $L^q(\mathcal{O})$, $1 < q < \infty$, tais que:*

$$\|g_m\|_{L^q(\mathcal{O})} \leq C \text{ e } g_m \to g \text{ q.s. em } \mathcal{O}.$$

Então $g_m \rightharpoonup g$ fraco em $L^q(\mathcal{O})$.

Prova Ver [18]. ■

Lema 1.4 (Desigualdade de Gronwall) *Seja $z(t)$ uma função real absolutamente contínua em $[0, a[$ tal que para todo $t \in [0, a[$ tem-se*

$$z(t) \leq C + \int_0^t z(s)\, ds,$$

onde $C > 0$. Então $z(t) \leq Ce^t$, $\forall\, t \in [0, a[$.

Prova Ver [23]. ■

Lema 1.5 (Du Bois Raymond) *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Então*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0, \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

se, e somente se, $u = 0$ *quase sempre em* Ω.

Prova Ver [24]. ■

Teorema 1.2 (Desigualdade de Poincaré) *Seja* Ω *um aberto do* $\mathbb{R}^n$ *limitado em alguma direção* x_i. *Então, existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\int_\Omega |u|^2 \, dx \leq C \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.

Prova Ver [23]. ■

Teorema 1.3 *Sejam* X *e* Y *espaços de Hilbert tal que* $X \hookrightarrow Y$ *e* $\mu \in L^p(0,T;X)$ *e* $\mu' \in L^p(0,T;Y)$, $1 \leq p < \infty$, *então* $\mu \in C^0([0,T];Y)$.

Prova Ver [4]. ■

Teorema 1.4 (Teorema da Representação de Riesz) *Seja* $1 < p < \infty$, *com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *e seja* $\varphi \in (L^p)'$. *Então existe um único* $u \in L^{p'}$ *tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int uf, \ \forall f \in L^p.$$

Mais ainda,

$$\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{(L^p)'}.$$

Prova Ver [4] ■

Teorema 1.5 (Base Hilbertiana) *Todo espaço de Hilbert separável admite uma base Hilbertiana.*

Prova Ver [4]. ■

Teorema 1.6 *Seja* $X \hookrightarrow B \hookrightarrow Y$ *com imersão compacta de* X *em* B, *(*X, B *e* Y *são espaços de Banach). Se* F *limitada em* $L^{\infty}(0,T;X)$ *e* $F' \in L^{r}(0,T;Y)$ *onde* $r > 1$, *então* F *é relativamente compacta em* $C(0,T;B)$.

Prova Ver [30]. ■

Teorema 1.7 *Suponha* $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, *com* $u' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$.
(i) *Então*

$$u \in C\left([0,T];L^2(\Omega)\right).$$

(ii) *A aplicação*

$$t \mapsto \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

é absolutamente contínua, com

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2}\langle u'(t), u(t)\rangle$$

para $0 \leq t \leq T$.
(iii) *Além disso, temos a estimativa*

$$\max_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\|u\|_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)} + \|u'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\right),$$

com C *dependendo apenas de* T.

Prova Ver [7]. ■

Teorema 1.8 (Gauss-Green) *Se* $u \in C^1\left(\bar{\Omega}\right)$, *então*

$$\int_{\Omega} u_{x_i}dx = \int_{\Gamma} u\nu^i d\Gamma$$

para $i = 1, ..., n$.

Prova Ver [4] ■

Lema 1.6 (Compacidade de Aubin-Lions) *Considere* $1 < p_i < \infty$, $i = 1, 2$ *e* $B_0 \subset B \subset B_1$ *espaços de Banach reflexivos sendo as injeções contínuas e* $B_0 \subset B$ *compacta. Para* $0 < T < \infty$, *seja*

$$W = \{v; v \in L^{p_0}(0, T; B_0), v' \in L^{p_1}(0, T; B_1)\}$$

munido da norma

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^{p_0}} + \|v'\|_{L^{p_1}}.$$

Resulta que W *é um espaço de Banach sendo* W *continuamente imerso em* $L^{p_0}(0, T; B)$. *Com as hipóteses acima sobre* $B_0 \subset B \subset B_1$, $0 < p_i < \infty$, $i = 1, 2$, *resulta ser compacta a imersão de* W *em* $L^{p_0}(0, T; B)$.

Prova Ver [22]. ■

Teorema 1.9 (Teorema do Ponto Fixo de Schauder) *Suponha* $K \subset X$, *com* X *um espaço de Banach, compacto e convexo, e além disso,*

$$A : K \to K$$

é contínua. Então A *tem um ponto fixo em* K.

Prova Ver [7]. ■

Teorema 1.10 *Seja* Ω *um aberto limitado com fronteira* Γ *de classe* C^2. *Seja* $f \in L^2(\Omega)$ *e seja* $u \in H_0^1(\Omega)$ *verificando*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi, \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Então $u \in H^2(\Omega)$ *e* $\|u\|_{H^2} \leq C|f|$, *onde* C *é uma constante que só depende de* Ω.

Prova Ver [4]. ■

Teorema 1.11 *Se* E *um espaço reflexivo e* $\varphi : E \to]-\infty, \infty]$ *é convexa, coerciva e semicontínua inferiormente, então* φ *possui um ponto de mínimo global. Se* φ *é estritamente convexa, então este ponto é único.*

Prova Ver [1] ■

Capítulo 2

Soluções da Equação do Calor Linear

Neste capítulo, temos como objetivo estudar a existência, unicidade e regularidade de soluções para um problema misto associado à equação do calor linear.

Inicialmente, iremos fixar as notações. Representaremos por V e H dois espaços de Hilbert. Suponhamos $V \subset H$ imerso continuamente em H. Vamos considerar o espaço vetorial

$$W(0,T;V,H) = \{z \in L^2(0,T;V)\,;\; z' \in L^2(0,T;H)\},$$

onde z' é a derivada de z no sentido das distribuições com relação ao tempo t. Temos que W é um espaço de Hilbert, podemos muní-lo com a norma

$$\|z\|^2_{W(0,T,V,H)} = \|z\|^2_{L^2(0,T;V)} + \|z'\|^2_{L^2(0,T;H)}\,,$$

e ainda é imerso continuamente no espaço $C^0([0,T]\,;H)$. Assim, se $z \in W(0,T;V;H)$, então faz sentido falar em $z(0)$ e $z(T)$.

Consideremos Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ suficientemente regular. Denotaremos ν o vetor normal exterior à Γ e $T > 0$ um número real. Seja $Q = \Omega \times (0,T) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um cilindro com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$. Consideremos o problema

$$\begin{cases} z' - \Delta z + az + b \cdot \nabla z = \varphi \quad \text{em} \quad Q, \\ z = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \\ z(\cdot,0) = z_0(y) \quad \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $a \in L^\infty(Q)$ e $b \in [L^\infty(Q)]^n$.

2.1 Solução Forte

Definição 2.1 *Dizemos que $z : Q \to \mathbb{R}$ é solução forte de (2.1) quando*

$$z \in W\left(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), L^2(\Omega)\right)$$

e

$$z' - \Delta z + az + b \cdot \nabla z = \varphi \ q.s. \ em \ \ Q,$$

com $z(0) = z_0$.

Teorema 2.1 *Se $\varphi \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e $z_0 \in H_0^1(\Omega)$, então o problema (2.1) tem uma única solução forte z.*

Prova Existência

Para provar a existência de soluções, usaremos o método de Faedo Galerkin que consiste em três etapas: Obtenção de soluções aproximadas em um espaço de dimensão finita, obtenção de estimativas a priori para as soluções aproximadas e passagem ao limite das soluções aproximadas voltando para caso infinito dimensional.

Vamos considerar uma base Hilbertiana $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $H_0^1(\Omega)$. Se $V_m = [w_1, ..., w_m]$ é o subespaço gerado pelo m primeiro vetores da base, nós definimos o *problema aproximado* como:

$$\begin{cases} z_m(t) \in V_m, \\ (z_m'(t), v) + (\nabla z_m(t), \nabla v) + (a \cdot z_m(t), v) + (b \cdot \nabla z_m(t), v) = (\varphi, v), \quad \forall v \in V_m, \\ z_m(0) = z_{0m} \to z_0 \text{ em } L^2(\Omega). \end{cases} \tag{2.2}$$

O sistema de equações diferenciais ordinárias (2.2) tem solução local definida em $[0, t_m]$, com $0 < t_m < T$, ver (Corolário A.2 no Apêndice). A extensão da solução local para $[0,T]$ é consequência das estimativas abaixo.

Estimativas à priori:

Fazendo $v = z'_m(t)$ em (2.2), obtemos

$$(z'_m(t), z'_m(t)) + (\nabla z_m(t), \nabla z'_m(t)) + (a z_m(t), v) + (b \cdot \nabla z_m(t), z'_m(t)) = (\varphi, z'_m(t)),$$

a qual implica em

$$|z'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z_m(t)\|^2 \le |(a z_m(t), z'_m(t))| + |(b \cdot \nabla z_m(t), z'_m(t))| + |(\varphi, z'_m(t))|. \quad (2.3)$$

Integrando (2.3) de 0 a t, $t \le t_m$, e usando teorema de Green, desigualdades de Cauchy-Schwartz e Poincaré, temos,

$$\begin{aligned}\int_0^t |z'_m(s)|^2 ds + \frac{1}{2}\|z_m(t)\|^2 \le \frac{1}{2}\|z_0\|^2 + a_0 c_0 \int_0^t \|z_m(s)\| \, |z'_m(s)| \, ds \quad (2.4)\\ + b_0 \int_0^t \|z_m(s)\| \, |z'_m(s)| \, ds + \int_0^t |\varphi(s)| \, |z'_m(s)| \, ds,\end{aligned}$$

onde, $a_0 = \|a\|_{L^\infty(Q)}$, $b_0 = \|b\|_{(L^\infty(Q))^n}$ e $c_0 > 0$ é tal que $|\cdot| \le c_0 \|\cdot\|$.

Agora, pela desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}\sqrt{2} a_0 c_0 \int_0^t \|z_m(s)\| \, |z'_m(s)| \, ds \frac{1}{\sqrt{2}} &\le \frac{1}{2}\int_0^t \left(\sqrt{2} a_0 c_0 \|z_m(s)\|\right)^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \left(|z'_m(s)| \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 ds \quad (2.5)\\ &= (a_0 c_0)^2 \int_0^t \|z_m(s)\|^2 ds + \frac{1}{4}\int_0^t |z'_m(t)|^2 ds.\end{aligned}$$

Temos ainda que,

$$\sqrt{2} b_0 \int_0^t \|z_m(s)\| \, |z'_m(s)| \frac{1}{\sqrt{2}} ds \le b_0^2 \int_0^t \|z_m(s)\|^2 ds + \frac{1}{4}\int_0^t |z'_m(s)|^2 ds. \quad (2.6)$$

e

$$\sqrt{2} \int_0^t \|\varphi(s)\| \, |z'_m(s)| \frac{1}{\sqrt{2}} ds \le \int_0^t |\varphi(t)|^2 dt + \frac{1}{4}\int_0^t |z'_m(s)|^2 ds. \quad (2.7)$$

Substituindo (2.5), (2.6) e (2.7) em (2.4), obtemos

$$\frac{1}{4}\int_0^t |z'_m(s)|^2 ds + \frac{1}{2}\|z_m(t)\|^2 \le C + K \int_0^t \|z_m(s)\|^2 ds, \quad (2.8)$$

onde, $C > \frac{1}{2}\|z_{0m}\|^2 + \int_0^t |\varphi(t)| \, dt$ e $K = a_0^2 c_0^2 + b_0^2$.

Logo, pelo lema de Gronwall (Lema 1.4), podemos concluir de (2.8) que

$$\int_0^t |z_m'(s)|^2 \, ds + \|z_m(t)\|^2 \leq C, \tag{2.9}$$

onde $C = C(T)$ independe de m.

Passagem ao limite

Por (2.9), deduzimos que

$$\begin{cases} (z_m)_{m\in\mathbb{N}} & \text{é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ (z_m')_{m\in\mathbb{N}} & \text{é limitada em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \end{cases} \tag{2.10}$$

Pelas limitações em (2.10) e pelo Teorema de Banach Alaoglu Bourbaki, temos a existência de uma subsequência $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$, ainda denotada da mesma forma, tal que

$$z_m \overset{*}{\rightharpoonup} z \text{ em } L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \tag{2.11}$$

e

$$z_m' \rightharpoonup z' \text{ em } L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right). \tag{2.12}$$

Então, $z \in W(0,T;H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$ pela definição de W.

Multiplicando $(2.2)_2$ por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando de 0 a t, $t \leq T$, temos

$$\int_0^t (z_m'(t), v)\,\theta dt + \int_0^t (\nabla z_m(t), \nabla v)\,\theta dt + \int_0^t (a \cdot z_m(t), v)\,\theta dt + \int_0^t (b \cdot \nabla z_m(t), v)\,\theta dt \tag{2.13}$$

$$= \int_0^t (\varphi, v)\,\theta dt.$$

Agora, fazendo $m \to \infty$ em (2.13), usando as convergências (2.11) e (2.12), e o fato de V_m ser denso em $H_0^1(\Omega)$, obtemos que z satisfaz,

$$\int_0^T ((z,\psi))\,dt = \int_0^T (-z' - az - b \cdot \nabla z + \varphi, \psi)\,dt \tag{2.14}$$

para toda $\psi = v\theta$, $v \in H_0^1(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Mas $-z' - az - b \cdot \nabla z + \varphi$ está em $L^2(Q)$. Então pelo Teorema de Regularidade Elíptica (Teorema 1.10), segue que $z \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$.

Assim, por (2.14), temos

$$\int_Q (z' - \Delta z + az + b \cdot \nabla z)\, \psi dxdt = \int_Q \varphi \psi dxdt$$

para toda $\psi \in \mathcal{D}(Q)$, à qual implica em

$$\int_Q (z' - \Delta z + az + b \cdot \nabla z - \varphi)\, \psi dxdt = 0$$

para todo $\psi \in \mathcal{D}(Q)$. Logo, pelo lema de Du Bois Raymond (Lema 1.5), temos

$$z' - \Delta z + az + b \cdot \nabla z = \varphi, \quad \text{q.s. em } Q.$$

Para completar a prova do teorema precisamos verificar que $z \in C^0([0,T]; H_0^1(\Omega))$.

Desde que a solução forte z pertença a $W(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), L^2(\Omega))$, temos que $z \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ e $z' \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$. Assim, pelo Teorema 1.3, concluimos que $z \in C^0([0,T]; L^2(\Omega))$. Dessa forma, faz sentido calcular $z(0)$.

Condição Inicial

Provaremos agora que $z(0) = z_0$.

Segue de (2.12) que

$$\int_0^T (z_m'(t), v)\, \theta(t)\, dt \to \int_0^T (z'(t), v)\, \theta(t)\, dt,$$

para toda $v \in L^2(\Omega)$ e θ uma função de $C^1([0,T])$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. Logo,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(z_m(t), v)\, \theta(t)\, dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}(z(t), v)\, \theta(t)\, dt. \tag{2.15}$$

Integrando por partes (2.15), segue que

$$-(z_{0m}, v) - \int_0^T (z_m(t), v)\, \theta'(t)\, dt \to -(z(0), v) - \int_0^T (z(t), v)\, \theta'(t)\, dt. \tag{2.16}$$

Como por (2.11) ocorre

$$\int_0^T (z_m(t), v)\, \theta'(t)\, dt \to \int_0^T (z(t), v)\, \theta'(t)\, dt,$$

concluimos de (2.16) que

$$(z_{0m}, v) \to (z(0), v), \ \forall v \in L^2(\Omega).$$

Por outro lado, segue de $(2.2)_3$ que

$$(z_{0m}, v) \to (z_0, v)\,,\ \forall v \in L^2\left(\Omega\right).$$

Pela unicidade do limite, temos $(z\left(0\right), v) = (z_0, v)$, para toda $v \in L^2\left(\Omega\right)$, o que nos permite concluir que $z\left(0\right) = z_0$.

Unicidade

Suponhamos que o problema (2.1) tenha duas soluções u_1 e u_2. Chamemos $w = u_1 - u_2$. Então w satisfaz

$$\begin{cases} w' - \Delta w + aw + b \cdot \nabla w = 0 & \text{em } Q, \\ w\left(t\right) = 0 & \text{sobre } \Gamma, \\ w\left(0\right) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{2.17}$$

Multiplicando $(2.17)_1$ por w, integrando em $\Omega \times (0,t)$, $t \leq T$ e usando o Teorema de Green e desigualdade de Cauchy-Schwartz, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}\left|w\left(s\right)\right|^2 ds + \int_0^t \left\|w\left(s\right)\right\|^2 ds \leq \|a\|_{L^\infty(Q)}\int_0^t \left\|w\left(s\right)\right\|^2 ds + \|b\|_{[L^\infty(Q)]^n}\int_0^t \left|w\left(s\right)\right| \left\|w\left(s\right)\right\| ds.$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\left|w\left(t\right)\right|^2 + \int_0^t \left\|w\left(s\right)\right\|^2 ds \leq \|a\|_{L^\infty(Q)}\int_0^t \left\|w\left(s\right)\right\|^2 ds + \|b\|_{[L^\infty(Q)]^n}\int_0^t \left|w\left(s\right)\right| \left\|w\left(s\right)\right\| ds$$

daí temos que

$$\frac{1}{2}\left|w\left(t\right)\right|^2 + \int_0^t \left\|w\left(s\right)\right\|^2 ds \leq a_0\int_0^t \left\|w\left(s\right)\right\|^2 ds + b_0\int_0^t \left|w\left(s\right)\right| \left\|w\left(s\right)\right\| ds. \tag{2.18}$$

Notemos agora que pela desigualdade de Young, obtemos

$$\sqrt{2}b_0\int_0^t \left|w\left(t\right)\right| \left\|w\left(t\right)\right\| \frac{1}{\sqrt{2}}dt \leq \frac{b_0^2}{2}\int_0^t \left|w\left(s\right)\right|^2 ds + \frac{1}{4}\int_0^t \left\|w\left(s\right)\right\|^2 ds. \tag{2.19}$$

Substituindo (2.19) em (2.18), segue que

$$\frac{1}{2}\left|w\left(t\right)\right|^2 + \int_0^t \left\|w\left(s\right)\right\|^2 ds \leq \gamma\int_0^t \left\|w\left(s\right)\right\|^2 ds + \frac{b_0^2}{2}\int_0^t \left|w\left(s\right)\right|^2 ds \tag{2.20}$$

onde $\gamma = a_0 + \frac{1}{2}$.

Daí, de (2.20), temos que

$$\frac{1}{2}\left|w\left(t\right)\right|^2+\int_0^t\left\|w\left(s\right)\right\|^2ds\leq C_1\int_0^t\left|w\left(s\right)\right|^2ds+\frac{b_0^2}{2}\int_0^t\left|w\left(s\right)\right|^2ds, \tag{2.21}$$

onde $C_1=\gamma C$, e C é tal que $\left|\cdot\right|\leq C\left\|\cdot\right\|$.

Fazendo $C_2=C_1+\frac{b_0^2}{2}$ em (2.21), segue que

$$\frac{1}{2}\left|w\left(t\right)\right|^2+\int_0^t\left\|w\left(s\right)\right\|^2ds\leq C_2\int_0^t\left|w\left(s\right)\right|^2ds. \tag{2.22}$$

Logo, pelo Lema de Gronwall (Lema 1.4), podemos concluir de (2.22) que

$$\frac{1}{2}\left|w\left(t\right)\right|^2+\int_0^t\left\|w\left(s\right)\right\|^2ds\leq 0,$$

para todo $t\in\left(0,T\right)$, o que implica em $\left\|w\left(s\right)\right\|=0$. Logo $w=0$ e, portanto, $u_1=u_2$. ■

2.2 Solução Fraca

Nosso objetivo nesta seção é considerar o problema (2.1) com dados iniciais menos regulares. A solução obtida com este grau de regularidade é chamada de solução fraca.

Definição 2.2 *Dizemos que $z:Q\to\mathbb{R}$ é solução fraca de (2.1), quando*

$$z\in W\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right),H^{-1}\left(\Omega\right)\right),$$

satisfaz a condição inicial $z\left(0\right)=z_0$ e satisfaz a identidade

$$-\int_Q z\psi'dxdt+\int_Q\nabla z\nabla\psi dxdt+\int_Q az\psi dxdt+\int_Q b\cdot\nabla z\psi dxdt=\int_Q\varphi\psi dxdt, \tag{2.23}$$

para toda $\psi\in W\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right),L^2\left(\Omega\right)\right)$, tal que $\psi\left(0\right)=\psi\left(T\right)=0$.

Temos o seguinte resultado:

Teorema 2.2 *Se $\varphi\in L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right)$ e $z_0\in L^2\left(\Omega\right)$, o problema (2.1) tem uma única solução fraca z.*

Prova Vamos obter a existência de solução fraca como limite de uma sequência de soluções fortes.

Por densidade, existe uma sequência $(z_{0k})_{k\in\mathbb{N}}$ em $H_0^1(\Omega)$ tal que

$$z_{0k} \to z_0 \text{ em } L^2(\Omega). \tag{2.24}$$

Pelo Teorema 2.1, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe uma única solução forte z_k de (2.1), ou seja,

$$\begin{gathered} z_k \in W\left(0,T; H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega), L^2(\Omega)\right), \\ z_k' - \Delta u_k + a z_k + b\cdot\nabla z_k = \varphi, \quad \text{q.s. em } Q, \\ z_k(0) = z_{0k} \quad \text{em } \Omega. \end{gathered} \tag{2.25}$$

Multiplicando (2.25) por z_k e integrando em $\Omega\times(0,T)$, $t\le T$, e usando Teorema de Green e desigualdade de Cauchy-Schwartz, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|z_k(t)|^2 + \int_0^t \|z_k(s)\|^2\,ds \le \frac{1}{2}|z_{0k}(t)|^2 + a_0\int_0^t |z_k(s)|^2\,ds \\ + b_0\int_0^t \|z_k(s)\|\,|z_k(s)|\,ds + \int_0^t |\varphi(s)|\,|z_k(s)|\,ds, \end{aligned} \tag{2.26}$$

a_0 e b_0 como em (2.4).

Usando os mesmos argumentos como no Teorema 2.1, segue que

$$\frac{1}{2}|z_k(t)|^2 + \int_0^t \|z_k(s)\|^2\,ds \le C + \frac{C_1}{2}\int_0^t |z_k(s)|^2\,ds, \tag{2.27}$$

onde $C \ge \frac{1}{2}|z_{0k}|^2 + \frac{1}{2}\int_0^T |\varphi(t)|^2\,dt$, e $C_1 = (a_0 + \frac{b_0^2}{2} + \frac{1}{2})$.

Pelo Lema de Gronwall (Lema 1.4), podemos concluir de (2.27) que

$$|z_k(t)|^2 + \int_0^t \|z_k(s)\|^2\,ds \le C, \tag{2.28}$$

onde $C = C(T)$ é uma constante que independe de k.

Passagem ao limite

De (2.28) e pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki temos a existência de subsequência de $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ainda denotada da mesma forma, tal que

$$\begin{aligned} z_k &\overset{*}{\rightharpoonup} z \quad \text{em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \\ z_k &\rightharpoonup z \quad \text{em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Multiplicando (2.25) por $\psi \in W\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right),L^2\left(\Omega\right)\right)$ tal que $\psi\left(0\right) = \psi\left(T\right) = 0$, e integrando em Q, obtemos

$$-\int_Q z_k\psi' dxdt + \int_Q \nabla z_k \nabla\psi + \int_Q a z_k \psi dxdt + \int_Q b\cdot\nabla z_k \psi dxdt = \int_Q \varphi\psi dxdt. \tag{2.30}$$

Fazendo $k \to \infty$ em (2.30) e usando as convergências em (2.29), deduzimos que

$$-\int_Q z\psi' dxdt + \int_Q \nabla z \nabla\psi + \int_Q a z \psi dxdt + \int_Q b\cdot\nabla z \psi dxdt = \int_Q \varphi\psi dxdt, \tag{2.31}$$

ou seja, (2.23).

Considerando em (2.31) $\psi = v\theta$, $\theta \in \mathcal{D}\left(0,T\right)$ e $v \in H_0^1\left(\Omega\right)$, segue que

$$\begin{aligned}&\left\langle\left(z\left(t\right),v\right),\theta'\left(t\right)\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} + \left\langle\left(\nabla z\left(t\right),\nabla v\right),\theta\left(t\right)\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} + \left\langle\left(az\left(t\right),v\right),\theta\left(t\right)\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)}\\ &+\left\langle\left(b\cdot\nabla z\left(t\right),v\right),\theta\left(t\right)\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} = \left\langle\left(\varphi\left(t\right),v\right),\theta\left(t\right)\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)},\ \forall\theta\in\mathcal{D}\left(0,T\right),\ \forall v\in H_0^1\left(\Omega\right),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left\langle\left(z'\left(t\right),v\right) + \left(\nabla z\left(t\right),\nabla v\right) + \left(az\left(t\right),v\right) + \left(b\cdot\nabla z\left(t\right),v\right) - \left(\varphi\left(t\right),v\right),\theta\left(t\right)\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} = 0,$$

para todo $\theta \in \mathcal{D}\left(0,T\right)$ e para todo $v \in H_0^1\left(\Omega\right)$. Assim,

$$\left(z'\left(t\right),v\right) + \left(\left(z\left(t\right),v\right)\right) + \left(az\left(t\right),v\right) + \left(b\cdot\nabla z\left(t\right),v\right) = \left(\varphi\left(t\right),v\right),\ \forall v\in H_0^1\left(\Omega\right), \tag{2.32}$$

no sentido de $\theta \in \mathcal{D}'\left(0,T\right)$.

Considerando, em particular, $v \in \mathcal{D}\left(0,T\right)$ em (2.32), segue que

$$\begin{aligned}&\left\langle z'\left(t\right),v\right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} + \left\langle\Delta z\left(t\right),v\right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}\\ &+\left\langle az\left(t\right),v\right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} + \left\langle b\cdot\nabla z\left(t\right),v\right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}\\ &=\left\langle\varphi\left(t\right),v\right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}\ \text{em } \mathcal{D}'\left(0,T\right),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left\langle z' + \Delta z + az + b\cdot\nabla z - \varphi, v\right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = 0,\ \forall v\in\mathcal{D}\left(\Omega\right).$$

No sentido de $\mathcal{D}'\left(0,T\right)$,

$$z' = \Delta z - az - b\cdot\nabla z + \varphi,\ \text{em } \mathcal{D}'\left(Q\right). \tag{2.33}$$

Notemos que fazendo a análise de cada termo, temos $az \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, $\Delta z \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, $b \cdot \nabla z \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e $\varphi \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Dessa forma, segue de (2.33) que

$$L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)+L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)+L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)+L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \hookrightarrow L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right),$$

logo, $z' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Usando o item (i) do Teorema 1.7, concluimos que $z \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$ e, portanto, faz sentido o cálculo $z(0)$.

Utilizando o mesmo raciocínio como no Teorema 2.1, temos a condição inicial e unicidade da solução fraca. ■

2.3 Solução Ultra Fraca

Nesta seção investigaremos a existência, unicidade e regularidade da solução ultra fraca no caso parabólico.

A principal questão consiste em: Dado

$$f \in H^{-1}(\Omega)$$

encontrar p solução do problema parabólico:

$$\begin{cases} -p' - \Delta p + a(x,t)\,p - \operatorname{div}(b(x,t)\,p) = 0 & \text{em } Q, \\ p(x,t) = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ p(x,T) = f & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{2.34}$$

O primeiro passo é deixar claro o que entendemos por solução de (2.34). De fato, iremos, inicialmente, investigar por um processo heurístico. Multiplicamos ambos os lados de (2.34) por uma função $z(x,t)$ e integramos em Q, obtemos:

$$\int_Q p\,[z' - \Delta z + az + b \cdot \nabla z]\,dxdt = \langle f, z(T)\rangle, \tag{2.35}$$

onde supomos

$$z(\cdot,0) = 0 \text{ em } \Omega\ ,\ z = 0 \text{ em } \Sigma \text{ e},$$

representamos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade de $H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

A identidade (2.35) sugere olhar para $z(x,t)$ solução do seguinte sistema misto:

$$\begin{cases} z' - \Delta z + a(x,t)\, z + b(x,t)\, \nabla z = \varphi & \text{em } Q, \\ z = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z(\cdot, 0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{2.36}$$

Se $\varphi \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, pelo Teorema de solução forte 2.1, obtemos que $z \in W(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), L^2(\Omega))$ é solução forte de (2.36). Obtemos também que, $z \in C^0([0,T]; H_0^1(\Omega))$, então $\langle f, z(T) \rangle$ faz sentido para toda $f \in H^{-1}(\Omega)$. Portanto, podemos definir o conceito de solução para (2.34) da seguinte forma:

Definição 2.3 *Chamamos de solução ultra fraca ou solução por transposição de (2.34), a função*

$$p \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$$

satisfazendo a igualdade

$$\int_Q p(x,t)\, \varphi(x,t)\, dxdt = \langle f, z(T) \rangle,$$

para toda $\varphi \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, onde z é solução forte de (2.36).

Consideremos o seguinte resultado:

Teorema 2.3 *Existe uma única solução ultra fraca do problema (2.34).*

Prova Existência: Vamos considerar a forma linear:

$$L : L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \to \mathbb{R}$$

definida por

$$L(\varphi) = \langle f, z(T) \rangle,$$

para toda $\varphi \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $f \in H^{-1}(\Omega)$ e z a única solução forte de (2.36).

Temos que:

$$|\langle f, z(T)\rangle| \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|z(T)\|.$$

Pelas estimativas de solução forte, obtemos:

$$\|z(T)\| \leq C \int_0^T |\varphi(t)|^2 \, dt.$$

Então

$$|\langle f, z(T)\rangle| \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Assim temos que L é uma forma linear contínua em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Pelo Teorema da Representação de Riesz 1.4, existe um único

$$p \in L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right)$$

tal que

$$L(\varphi) = \langle f, z(T)\rangle,$$

para toda $\varphi \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

Portanto, existe $p \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ tal que

$$\int_Q p(x,t)\, \varphi(x,t) = \langle f, z(T)\rangle,$$

provando a existência de solução ultra fraca para o problema (2.34).

Unicidade

Suponhamos que o problema (2.34) tenha duas soluções h_1 e h_2. Chamemos $w = h_1 - h_2$. Então,

$$\int_Q w(x,t)\, \varphi(x,t)\, dxdt = 0$$

para toda $\varphi \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ .Logo, pelo Lema de Du Bois Raymond (Lema 1.5), temos

$$w(x,t) = 0 \quad \text{q.s. em} \quad \Omega.$$

e, portanto, $h_1 = h_2$. ■

O teorema a seguir nos fornece regularidade da solução ultra fraca dependendo de onde a f esteja.

Teorema 2.4 *(i) Se $f \in L^2(\Omega)$, então a solução ultra fraca p pertence a $C^0([0,T];L^2(\Omega))$;*
(ii) Se $f \in H^{-1}(\Omega)$, a solução ultra fraca p pertence a $C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))$.

Prova Parte (i). Seja $(V_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma base Hilbertiana para $H_0^1(\Omega)$ e consideremos o problema aproximado:

$$\begin{cases} (-p_m', v) + ((p_m, v)) + (ap_m, v) + (b \cdot p_m, \nabla v) = 0, \\ \forall v \in V_m \text{ e } p_m \in V_m, \\ p_m(T) = f_m \to f \text{ em } L^2(\Omega). \end{cases} \tag{2.37}$$

O sistema (2.37) de Equações Diferenciais Ordinárias tem solução $p_m(t)$ definida em $[0,T]$. Com efeito, basta verificar a mudança de variável $\tau = T - t$, $0 \le t \le T$, ou seja, fazendo $\bar{p}_n = p_m(T-t)$ em (2.37), teremos $\bar{p}_n(0) = p_m(T)$.

Estimativa

Fazendo $v = p_m(t)$ em (2.37), obtemos

$$-\frac{d}{dt}|p_m(t)|^2 + \|p_m(t)\|^2 \le C|p_m(t)|^2. \tag{2.38}$$

Agora, integrando de t a T, temos

$$|p_m(t)|^2 + \int_t^T \|p_m(s)\|^2 ds \le |p_m(T)|^2 + C\int_t^T |p_m(s)|^2 ds. \tag{2.39}$$

Se definirmos

$$\psi(t) = |p_m(T)|^2 + C\int_t^T |p_m(s)|^2 ds,$$

temos

$$\psi'(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|p_m(T)|^2 + C|p_m(T)|^2 - C|p_m(t)|^2,$$

implica que

$$-\psi'(t) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|p_m(T)|^2 + C|p_m(t)|^2 - C|p_m(T)|^2.$$

Daí, temos por imersão que

$$-\psi'(t) \le -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|p_m(T)|^2 + \|p_m(t)\|^2 - C|p_m(T)|^2.$$

Notemos ainda, que pela desigualdade (2.38), temos

$$\begin{aligned} -\psi'(t) &\leq C\left|p_m(t)\right|^2 - C\left|p_m(T)\right|^2 \\ &\leq C\left|p_m(t)\right|^2 \leq C\psi(t), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\psi'(t) + C\psi(t) \geq 0.$$

Resolvendo a E.D.O., temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(e^{Ct}\psi\right) &= Ce^{Ct}\psi + e^{Ct}\psi' \\ &= e^{Ct}\left(\psi' + C\psi\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Agora, integrando de t a T, segue que

$$\int_t^T \frac{d}{dt}\left(e^{Ct}\psi\right) \geq 0,$$

ou seja,

$$e^{CT}\psi(T) \geq e^{Ct}\psi(t).$$

Daí, temos que

$$\psi(t) \leq e^{Ct}\psi(t) \leq e^{CT}\psi(T),$$

pois $e^{Ct} \geq 1$. Logo, de (2.39), obtemos

$$\left|p_m(t)\right|^2 + \int_t^T \left\|p_m(s)\right\|^2 ds \leq e^{CT}\left|f\right|^2. \tag{2.40}$$

Segue de (2.40) que, extraindo uma subsequência $\left(p_m(t)\right)_{m\in\mathbb{N}}$, temos

$$p_m \overset{*}{\rightharpoonup} p \text{ em } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$$

e

$$p_m \rightharpoonup p \text{ em } L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right).$$

Multiplicando ambos os lados de $(2.37)_1$ por $\theta \in H^1(0,T)$ tal que $\theta(0) = 0$, integrando de 0 a T e fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\int_0^T \left(p, \theta' v - \theta\Delta v + \theta a v + \theta b \cdot \nabla v\right) dt = \left(\theta(T)v, f\right), \quad \forall v \in V_m. \tag{2.41}$$

Consideremos z solução forte de

$$\begin{cases} z' - \Delta z + az + b \cdot \nabla z = g & \text{em } Q, \\ z = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z(0) = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{2.42}$$

com $g \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Sabemos que z é aproximado pelo Método de Galerkin, por meios de funções $z_m(t)$ definidas por:

$$z_m(t) = \sum_{i=1}^{m} \theta_{im}(t)\, w_i, \tag{2.43}$$

que são elementos da base V_m, com $\theta_{im}(0) = 0$ por $1 \leq i \leq m$. Consideremos também as convergências

$$\begin{cases} z_m' \rightharpoonup z' & \text{em } L^2(Q), \\ -\Delta z_m \rightharpoonup -\Delta z & \text{em } L^2(Q), \\ az_m \rightharpoonup az & \text{em } L^2(Q), \\ b \cdot \nabla z_m \rightharpoonup b \cdot \nabla z & \text{em } L^2(Q). \end{cases} \tag{2.44}$$

Temos que, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ continuamente e compactamente e as imersões

$$W\left(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), L^2(\Omega)\right) \hookrightarrow C^0\left([0,T]; H_0^1(\Omega)\right) \hookrightarrow C^0\left([0,T]; L^2(\Omega)\right)$$

são contínuas. Então, segue que

$$z_m(T) \to z(T) \text{ em } L^2(\Omega). \tag{2.45}$$

De (2.41) e (2.43), fazendo $v = w_i$, $\theta = \theta_{im}$, obtemos

$$\int_Q p\,(z_m' - \Delta z_m + az_m + b \cdot \nabla z_m)\, dxdt = (z_m(T), f). \tag{2.46}$$

De (2.44) e (2.45), quando $m \to \infty$ em (2.46), temos

$$\int_Q p\,(z' - \Delta z + az + b \cdot \nabla z)\, dxdt = (z(T), f). \tag{2.47}$$

Assim, (2.47) diz que p é solução ultra fraca do problema (2.34). Quando $n \to \infty$ em $(2.37)_1$, temos

$$p' = -\Delta p + ap - \operatorname{div}(bp) \tag{2.48}$$

em $D'\left(0,T;H^{-1}\left(\Omega\right)\right)$, o que implica que p' está em $L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$. Porém, sabemos que $p\in L^2\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right)\right)$, o que pelo Teorema 1.7, nos diz que

$$p\in C^0\left([0,T];L^2\left(\Omega\right)\right).$$

Utilizando o mesmo raciocínio como no Teorema 2.1, temos a condição inicial para a solução ultra fraca.

Parte (ii) do Teorema 2.4.

Pelo teorema da Representação de Riesz, sabemos que

$$|L|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}=|p|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \tag{2.49}$$

se

$$L\left(\varphi\right)=\int_Q p\varphi dxdt,$$

para toda $\varphi\in L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right)$.

Por definição temos que

$$L\left(\varphi\right)=\langle f,z\left(T\right)\rangle.$$

Dessa forma,

$$|L\left(\varphi\right)|\leq\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}\|z\left(T\right)\|,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}|L\left(\varphi\right)| &\leq C\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\\ &\leq C\|f\|_{H^{-1}(\Omega).}\end{aligned}$$

Assim, por (2.49), esta desigualdade implica

$$|p|_{L^2(Q)}\leq C\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}. \tag{2.50}$$

Como $f\in H^{-1}\left(\Omega\right)$, existe uma $\left(f_m\right)_{m\in\mathbb{N}}\in L^2\left(\Omega\right)$ para toda m, tal que

$$f_m\to f \quad \text{em} \quad H^{-1}\left(\Omega\right). \tag{2.51}$$

Seja $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência de soluções ultra fraca correspondendo a f_m para cada $m \in \mathbb{N}$. A função $p_n - p_m$ é solução ultra fraca correspondendo a $f_n - f_m$. Então, de (2.50) temos

$$|p_m - p_n| \leq c \|f_m - f_n\|_{H^{-1}(\Omega)},$$

provando que $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\Omega)$. Logo

$$p_m \to \bar{p} \text{ em } L^2(\Omega). \tag{2.52}$$

Porém, p_m é a solução ultra fraca correspondente a f_m, isto é,

$$\int_Q p_m \varphi dxdt = \langle z(T), f_m \rangle, \tag{2.53}$$

para toda $\varphi \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Notemos que z é solução forte de (2.1) e p_m a solução ultra fraca de (2.34). Então, segue de (2.51) e (2.53) que

$$\int_Q \bar{p}\varphi dxdt = \langle z(T), f \rangle,$$

isto é, $\bar{p}$ é solução ultra fraca de (2.34) e, por unicidade, $\bar{p} = p$.

De (2.48), temos

$$p_m' - p_n' = -\Delta(p_m - p_n) + a(p_m - p_n) - \operatorname{div} b \cdot (p_m - p_n), \tag{2.54}$$

em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, que está continuamente imerso em $L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$, o que implica que (2.54) é verdade também no sentido de $L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$. Então, para cada $\psi \in L^2(0,T;H_0^2(\Omega))$ temos

$$\begin{aligned} |\langle p_m' - p_n', \psi \rangle| &\leq |\langle p_m - p_n, \Delta\psi \rangle| + |\langle a(p_m - p_n), \psi \rangle| + |\langle p_m - p_n, b \cdot \nabla\psi | \\ &\leq C|p_m - p_n| \|\psi\|_{L^2\left(0,T;H_0^2(\Omega)\right)}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\|p_m' - p_n'\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))} \leq C|p_m - p_n|,$$

o que implica que $(p_m')_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$. Então, obtemos $p_m' \to p'$ em $L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$. Logo, temos $p \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e $p' \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$, isto é,

$$p \in C^0\left([0,T];H^{-1}(\Omega)\right).$$

Temos $p_m \rightarrow p$ em $W(0,T;L^2(\Omega),H^{-2}(\Omega))$ e este espaço é imerso continuamente em $C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))$, daí, obtemos $p_m \rightarrow p$ em $C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))$ e assim, $p_m(T) \rightarrow p(T)$ em $H^{-1}(\Omega)$. Temos $p_m(T) = f_m$ convergindo para f em $H^{-1}(\Omega)$, então $p(T) = f$. $\blacksquare$

Capítulo 3

Controlabilidade do Sistema Linearizado

Neste capítulo, temos como objetivo estudar a controlabilidade finito-aproximada e nula do sistema linear do calor.

Dados os L^{∞}- potenciais $a \in L^{\infty}(Q)$, $b \in (L^{\infty}(Q))^{n}$ e uma constante real λ, consideremos o problema de controle

$$\begin{cases} u' - \Delta u + au + b \cdot \nabla u + \lambda = v1_{\omega} & \text{em } Q, \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ u(0) = u^{0} & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

em que ω é um subconjunto não vazio de Ω e 1_{ω} é a função característica de ω.

3.1 Controle Finito-Aproximado

Nesta seção, iremos mostrar a controlabilidade finito-aproximada do sistema linear do calor.

Definição 3.1 *Dizemos que o sistema (3.1) é finito aproximadamente controlável se, para todo* $\epsilon > 0$, u^{0}, $u^{1} \in L^{2}(\Omega)$, *existe um controle* $v \in L^{2}(\omega \times (0,T))$, *tal que a solução* u *de (3.1), satisfaz*

$$
\begin{cases} \left\|u(T)-u^1\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon \\ \pi_E(u(T)) = \pi_E(u^1), \end{cases} \tag{3.2}
$$

em que E é um subespaço de dimensão finita de $L^2(\Omega)$, e π é a projeção de $L^2(\Omega)$ em E.

Vale o seguinte :

Teorema 3.1 *Seja $T>0$. Então, existe um controle $v \in L^2(\omega \times (0,T))$ tal que a solução fraca de (3.1) satisfaz (3.2). Além disso, para qualquer $R>0$, existe uma constante $C(R)>0$ tal que*

$$
\|v\|_{L^2(\omega\times(0,T))} \leq C(R), \tag{3.3}
$$

com $a \in L^\infty(Q)$ e $b \in (L^\infty(Q))^n$ satisfazendo

$$
\|a\|_{L^\infty(\Omega\times(0,T))} \leq R, \quad \|b\|_{(L^\infty(\Omega\times(0,T)))^n} \leq R. \tag{3.4}
$$

Observação 3.1 *O teorema acima não fornece nenhuma estimativa de como a norma do controle v depende de E, u^0, u^1 e $\epsilon>0$. Contudo, (3.3) garante que v permanece uniformemente limitado quando os potenciais a e b permanecem limitados em L^∞.*

Observação 3.2 *O controle v não é único. A construção que desenvolvemos abaixo nos fornece o controle de norma mínima em L^2. É este controle de norma mínima que procuramos e que como os outros controles, também satisfaz a condição de limitação (3.3).*

Prova [Teorema 3.1] Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\lambda=0$ e $u^0 \equiv 0$. De fato, se considerarmos z a solução de

$$
\begin{cases} z' - \Delta z + az + b\cdot\nabla z + \lambda = 0 & \text{em } Q, \\ z = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z(0) = u^0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{3.5}
$$

então a solução u de (3.1) pode ser decomposta como sendo

$$
u = w + z, \tag{3.6}
$$

onde w resolve

$$\begin{cases} w' - \Delta w + aw + b \cdot \nabla w = v 1_{\omega} & \text{em } Q, \\ w = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ w(0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{3.7}$$

Podemos ver que, (3.2) é equivalente a

$$\begin{cases} \left| w(T) - \left(u^1 - z(T) \right) \right| \leq \epsilon \\ \pi_E \left(w(T) \right) = \pi_E \left(u^1 - z(T) \right). \end{cases} \tag{3.8}$$

Notemos que, o controle v está presente apenas em (3.7). Logo, para provarmos a existência do controle em (3.1), é suficiente mostrarmos a existência do controle para (3.7).

O efeito regularizante da equação do calor permite mostrar que

$$\begin{aligned} &z(T) \text{ permanece em um conjunto relativamente compacto} \\ &\text{de } L^2(\Omega) \text{ quando os potenciais } a \text{ e } b \text{ variam na classe (3.4).} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Isto será importante para obter a limitação uniforme (3.3).

Vamos considerar o sistema adjunto

$$\begin{cases} -\varphi' - \Delta \varphi + a\varphi - \operatorname{div}(b\varphi) = 0 & \text{em } Q, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(T) = \varphi^0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{3.10}$$

A importância deste sistema adjunto será explicada mais a frente e observada de forma clara durante este capítulo. Mediante isso, iremos justificar como obtê-lo.

Considerando $\lambda \equiv 0$ e $u^0 \equiv 0$ em (3.5), multiplicando, formalmente, sua equação por φ solução de (3.10), e integrando em Q, obtemos

$$\int_{\Omega} \int_0^T \left(z'\varphi - \Delta z \varphi + az\varphi + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial z}{\partial x_i} \right) \varphi \right) dxdt = 0. \tag{3.11}$$

Vamos analisar cada termo de (3.11):

1^o Termo

$$\int_{\Omega} \int_0^T z'\varphi dxdt.$$

Segue que

$$\frac{d}{dt}(z\varphi) = z'\varphi + z\varphi',$$

daí, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(\int_0^T \left[\frac{d}{dt}(z\varphi) - z\varphi' \right] dt \right) dx &= \int_\Omega \left((z\varphi)\,|_0^T - \int_0^T z\varphi' dt \right) dx \qquad (3.12)\\
&= \int_\Omega \left(z(T)\,\varphi(T) - z(0)\,\varphi(0) - \int_0^T z\varphi' dt \right) dx\\
&= \int_\Omega \left(z(T)\,\varphi(T) - \int_0^T z\varphi' dt \right) dx.
\end{aligned}$$

2^o termo

$$-\int_Q \Delta z(x,t)\,\varphi(x,t)\,dxdt.$$

Usando o Teorema de Green, segue que

$$\begin{aligned}
-\int_Q \Delta z\varphi dxdt &= \int_0^T \left(\int_\Omega \nabla z \nabla \varphi - \int_\Gamma \frac{\partial z}{\partial \eta}\varphi d\Gamma \right) dt\\
&= \int_0^T \left(\int_\Omega \nabla z \nabla \varphi dx \right) dt\\
&= \int_0^T \left(-\int_\Omega z\Delta\varphi dx + \int_\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} z d\Gamma \right) dt\\
&= -\int_Q z\Delta\varphi dx. \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Notemos que em (3.13) temos considerado $\varphi = 0$ sobre Σ.

Agora o 4^o e último termo. Observemos que

$$\int_\Omega \int_0^T \left(\sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial z}{\partial x_i} \right) \varphi dtdx = \int_Q \sum_{i=1}^n (b_i\varphi) \frac{\partial z}{\partial x_i} dxdt.$$

Segue que

$$\frac{d}{dx_i}((b_i\varphi)\cdot z) = \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i\varphi)\,z + b_i\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_i} z \right).$$

Daí, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dx_i}[b_i\varphi \cdot z] - \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i\varphi)\,z \right) dx \right) dt &= \int_0^T \left(\int_\Omega -z \sum \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i\varphi)\,dx \right) dt \qquad (3.14)\\
&= -\int_0^T \int_\Omega z \operatorname{div}(b\varphi)\,dxdt.
\end{aligned}$$

pois, pelo Teorema 1.8 e levando em consideração $(3.10)_2$, temos

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} [b_i \varphi \cdot z] \, dx = 0.$$

Substituindo (3.12)-(3.14) em (3.11), obtemos

$$\begin{aligned} & -\int_Q z\varphi' dxdt + \textstyle\int_\Omega z(T)\varphi(T)\,dx - \displaystyle\int_Q z\Delta\varphi dxdt \\ & -\int_Q az\varphi - \int_Q z \operatorname{div}(b\varphi)\,dxdt = 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Tomando $\varphi(T) = \varphi^0$ em Ω, conseguimos encontrar o sistema adjunto (3.10). Com efeito, basta multiplicarmos $(3.10)_1$ por z solução de (3.5).

Voltando ao problema (3.10), tendo em conta que os ponteciais a e b são limitados, temos que para qualquer $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$ o sistema (3.10) tem uma única solução na classe $\varphi \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Este fato pode ser provado de forma análoga ao que foi feito no Capítulo 2. Basta fazer a mudança de variável t por $\tau = T - t$. Observemos ainda a dependência contínua da solução de (3.10), com relação ao dado inicial φ^0, ou seja, vale a seguinte desigualdade:

$$|\varphi|_{L^2\left(0,T,H_0^1(\Omega)\right)} \leq C\left|\varphi^0\right|. \tag{3.16}$$

Com efeito, se multiplicarmos $(3.10)_1$ por φ, integrando em $\Omega \times (t,T)$, usando Teorema de Green, desigualdades de Cauchy-Schwartz e de Young, segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|\varphi(t)|^2 + \int_t^T \|\varphi(s)\|^2 ds &\leq \frac{1}{2}\left|\varphi^0\right|^2 + a_0 \int_0^T |\varphi(s)|^2 ds + b_0 \int_0^T |\varphi(s)|\,\|\varphi(s)\|\,ds \\ &\leq \frac{1}{2}\left|\varphi^0\right|^2 + \left(a_0 + \frac{b_0^2}{2}\right)\int_0^T |\varphi(s)|^2 ds. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Por conseguinte, aplicando o Lema de Gronwall (Lema 1.4) em (3.17), segue (3.16).

Vamos agora considerar o funcional $J : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J\left(\varphi^0\right) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_\omega \varphi^2 dxdt + \epsilon\left|(I - \pi_E)\varphi^0\right| - \int_\Omega u^1 \varphi^0 dx. \tag{3.18}$$

Veremos que o funcional J é contínuo, estritatamente convexo e coercivo.

Provaremos com as informações acima, que o funcional J atinge seu mínimo, que também é unico. Mais ainda, o mínimo deste funcional nada mais é do que o dado inicial do sistema adjunto, e que a solução associada a este dado inicial é, por fim o controle procurado.

Continuidade

Consideremos $(\varphi_n^0)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de dados iniciais, tal que

$$\varphi_n^0 \rightarrow \varphi^0 \text{ em } L^2(\Omega). \tag{3.19}$$

Mostraremos que $J(\varphi_n^0) \rightarrow J(\varphi^0)$. Com efeito, estudaremos a convergência para cada termo de (3.18). Para o primeiro termo, consideremos $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, φ_n é solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} -\varphi_n' - \Delta\varphi_n + a\varphi_n - \operatorname{div}(b\varphi_n) = 0 \text{ em } Q, \\ \varphi_n = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ \varphi_n(T) = \varphi_n^0 \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{3.20}$$

Seja φ a solução de (3.10). Subtraindo (3.20) de (3.10), obtemos

$$\begin{cases} -(\varphi_n - \varphi)' - \Delta(\varphi_n - \varphi) + a(\varphi_n - \varphi) - \operatorname{div}(b(\varphi_n - \varphi)) = 0 \text{ em } Q, \\ \varphi_n - \varphi = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ (\varphi_n - \varphi)(T) = \varphi_n^0 - \varphi^0 \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{3.21}$$

Multiplicando $(3.21)_1$ por $\varphi_n - \varphi$, integrando de t a T e, usando teorema de Green e desigualdade de Cauchy-Schwartz, temos

$$\frac{1}{2}|\varphi_n - \varphi|^2 + \int_t^T \|\varphi_n - \varphi\|^2 ds \leq \frac{1}{2}\left|\varphi_n^0 - \varphi^0\right|^2 + a_0 \int_t^T |\varphi_n - \varphi|^2 ds + b_0 \int_t^T |\varphi_n - \varphi| \, \|\varphi_n - \varphi\| \, ds, \tag{3.22}$$

a_0, b_0 como em (2.4).

Usando Desigualdade de Young em (3.22) segue que

$$\frac{1}{2}|\varphi_n - \varphi|^2 + \frac{1}{2}\int_t^T \|\varphi_n - \varphi\|^2 ds \leq \frac{1}{2}\left|\varphi_n^0 - \varphi^0\right|^2 + (a_0 + \frac{b_0^2}{2}) \int_t^T |\varphi_n - \varphi|^2 ds. \tag{3.23}$$

Aplicando Lema de Gronwall (Lema 1.4) em (3.23) e, em seguida, fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos, desde que (3.19) vale, a seguinte convergência:

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \text{ em } L^2(Q).$$

Em particular
$$\int_0^T \int_\omega \varphi_n^2 dxdt \to \int_0^T \int_\omega \varphi^2 dxdt \text{ em } \mathbb{R}. \tag{3.24}$$
Portanto, temos a continuidade do primeiro termo de (3.18).

No segunto termo, façamos $F = I - \pi_E$. Assim
$$\left|F\left(\varphi_n^0 - \varphi^0\right)\right| \leq \|F\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))}\left|\varphi_n^0 - \varphi^0\right| \to 0, \text{ quando } n \to \infty. \tag{3.25}$$

Quanto ao terceiro termo, segue diretamente de (3.19) que
$$\int_\Omega u^1\varphi_n^0 dx \to \int_\Omega u^1\varphi^0 dx \text{ em } \mathbb{R}. \tag{3.26}$$

Dessa forma, de (3.24) – (3.26) segue a continuidade do funcional J.

Convexidade

Provaremos agora a convexidade do funcional J, mais ainda,
$$J : L^2(\Omega) \to \mathbb{R} \text{ é estritamente convexo.} \tag{3.27}$$

Esta propriedade é uma consequência do seguinte resultado de continuação única devido a Fabre [8] :

Proposição 3.1 *Assuma que $a \in L^\infty(Q)$ e $b \in (L^\infty(Q))^n$. Seja $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$ tal que a solução de φ de (3.10) satisfaça*
$$\varphi = 0 \text{ em } \omega \times (0,T). \tag{3.28}$$

Então, necessariamente, $\varphi^0 \equiv 0$.

Vejamos que
$$J\left(\theta\varphi^0 + (1-\theta)\psi^0\right) \leq \theta J\left(\varphi^0\right) + (1-\theta)\psi^0, \ \forall\theta \in [0,1]. \tag{3.29}$$

De fato, por (3.18), temos
$$\begin{aligned} J\left(\theta\varphi^0 + (1-\theta)\psi^0\right) = {} & \frac{1}{2}\int_0^T \int_\omega (\theta\varphi + (1-\theta)\psi)^2 dxdt \\ & + \epsilon\left\|(I-\pi_E)(\theta\varphi_0 + (1-\theta)\psi_0)\right\|_{L^2(\Omega)} \\ & - \int_\Omega \left(u^1(\theta\varphi_0 + (1-\theta)\psi_0)\right) dx. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Vamos analisar cada termo do segundo membro da igualdade acima. Desenvolvendo o primeiro termo, segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega(\theta\varphi+(1-\theta)\psi)^2\,dxdt &= \frac{\theta^2}{2}\int_0^T\int_\omega\varphi^2dxdt+\theta(1-\theta)\int_0^T\int_\omega\varphi\psi dxdt\\ &+\frac{(1-\theta)^2}{2}\int_0^T\int_\omega\psi^2dxdt\\ &\leq\frac{(\theta-\theta^2)}{2}\int_0^T\int_\omega\left(\varphi^2+\psi^2\right)dxdt+\frac{\theta^2}{2}\int_0^T\int_\omega\varphi dxdt \quad (3.31)\\ &+\frac{(1-\theta)^2}{2}\int_0^T\int_\omega\psi^2dxdt\\ &=\frac{\theta}{2}\int_0^T\int_\omega\varphi^2dxdt+\frac{(1-\theta)}{2}\int_0^T\int_\omega\psi^2dxdt.\end{aligned}$$

Note que usamos o fato de que $\frac{a^2+b^2}{2}\geq ab$ com $a=\varphi$ e $b=\psi$. Agora no segundo termo temos

$$\begin{aligned}\epsilon\left\|(I-\pi_E)(\theta\varphi_0+(1-\theta)\psi_0)\right\|_{L^2(\Omega)} &\leq\epsilon\theta\left\|(I-\pi_E)\varphi_0\right\| \quad (3.32)\\ &+\epsilon(1-\theta)\left\|(I-\pi_E)\psi_0\right\|.\end{aligned}$$

Por último, obtemos

$$-\int_\Omega\left(u^1(\theta\varphi_0+(1-\theta)\psi_0)\right)dx=-\theta\int_\Omega u^1\varphi_0dx-(1-\theta)\int_\Omega\psi_0dx. \quad (3.33)$$

Substituindo (3.31) - (3.33) em (3.30), obtemos (3.29).

Mais ainda, $J:L^2(\Omega)\to\mathbb{R}$ é estritamente convexo. Observe que, considerando $\varphi^0\neq\psi^0$ a igualdade em (3.29), acontece quando $\varphi=\psi$ em $\omega\times(0,T)$, ou seja, $\varphi-\psi=0$ em $\omega\times(0,T)$,o que implica, pela Proposição 3.1 que

$$\varphi_0=\psi_0,$$

o que não ocorre pois, $\varphi_0\neq\psi_0$. Portanto, temos que J é estritamente convexo.

Coercividade

O funcional J é também coercivo. Mais precisamente, vale a desigualdade de coercividade

$$\liminf_{|\varphi^0|\to\infty}\frac{J(\varphi^0)}{|\varphi^0|}\geq\epsilon, \quad (3.34)$$

em que $\epsilon > 0$.

Para provar (3.34), usaremos os argumentos de Fabre-Puel-Zuazua [9] e Zuazua [33], combinados com o resultado de continuação única dado na Proposição [8].

Seja $\left\{\varphi_j^0\right\}$ uma sequência em $L^2(\Omega)$, tal que

$$\left|\varphi_j^0\right| \to \infty \text{ quando } j \to \infty. \tag{3.35}$$

Vamos denotar $\{\varphi_j\}$ a correspondente sequência de soluções de (3.10). Também estabelecemos

$$\bar{\varphi}_j^0 = \frac{\varphi_j^0}{\left|\varphi_j^0\right|},\ \ \bar{\varphi}_j = \frac{\varphi_j}{\left|\varphi_j^0\right|}. \tag{3.36}$$

Obviamente $\bar{\varphi}_j$ é solução (3.10) com dado iniciail $\bar{\varphi}_j^0$ normalizado. De (3.36), temos que

$$\frac{J\left(\varphi_j^0\right)}{\left|\varphi_j^0\right|} = \frac{\left|\varphi_j^0\right|}{2}\int_0^T\int_\omega \left|\bar{\varphi}_j\right|^2 dxdt + \epsilon\left|\left(I-\pi_E\right)\bar{\varphi}_j^0\right| - \int_\Omega u^1\bar{\varphi}_j^0 dx. \tag{3.37}$$

Vamos distuinguir em dois casos a seguir:

Caso 1

Consideremos

$$\liminf_{j\to\infty}\int_0^T\int_\omega \left|\bar{\varphi}_j\right|^2 dxdt > 0. \tag{3.38}$$

Devido a (3.35), o primeiro termo em (3.37) tende para infinito enquanto os outros dois permanecem limitados. Deduzimos então que

$$\liminf_{j\to\infty}\frac{J\left(\varphi_j^0\right)}{\left|\varphi_j^0\right|} = \infty.$$

Caso 2

Consideremos agora

$$\liminf_{j\to\infty}\int_0^T\int_\omega \left|\bar{\varphi}_j\right|^2 dxdt = 0. \tag{3.39}$$

De (3.39), obtemos uma subsequência $\left(\bar{\varphi}_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$, ainda denotada da mesma forma, tal que

$$\int_0^T\int_\omega \left|\bar{\varphi}_j\right|^2 dxdt \to 0, \text{ quando } j \to \infty. \tag{3.40}$$

De (3.36), podemos extrair uma subsequência, tal que

$$\bar{\varphi}_j^0 \rightharpoonup \bar{\varphi}^0 \text{ em } L^2(\Omega). \tag{3.41}$$

Temos também a seguinte convergência:

$$\bar{\varphi}_j \rightharpoonup \bar{\varphi} \text{ em } L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \tag{3.42}$$

em que $\bar{\varphi}$ é solução de (3.10) com dado inicial $\bar{\varphi}^0$. De fato, consideremos o problema

$$\left| \begin{array}{ll} -\bar{\varphi}_j' - \Delta\bar{\varphi}_j + a\bar{\varphi}_j - \operatorname{div}(b\bar{\varphi}_j) = 0 & \text{em } Q, \\ \bar{\varphi}_j = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \bar{\varphi}_j(T) = \bar{\varphi}_j^0 & \text{em } \Omega, \end{array} \right. \tag{3.43}$$

com

$$\bar{\varphi}_j^0 = \frac{\varphi_j^0}{\left|\varphi_j^0\right|}, \quad \bar{\varphi}_j = \frac{\varphi_j}{\left|\varphi_j^0\right|}.$$

Seja também $\theta \in L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right)$ e o problema

$$\begin{cases} u' - \Delta u + au + b\cdot\nabla u = \theta & \text{em } Q, \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ u(0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{3.44}$$

Multiplicando $(3.43)_1$ por u solução de (3.44), e integrando em Q, temos

$$-\int_0^T\int_\Omega \bar{\varphi}_j' u\,dxdt - \int_0^T\int_\Omega \Delta\bar{\varphi}_j u\,dxdt + \int_0^T\int_\Omega a\bar{\varphi}_j u\,dxdt - \int_0^T\int_\Omega \operatorname{div}(b\bar{\varphi}_j)\,u\,dxdt = 0.$$

Daí, usando integração por partes e o Teorema de Green, segue que

$$\begin{aligned} 0 = &-\int_\Omega u(T)\,\bar{\varphi}_j(T)\,dx + \int_\Omega u(0)\,\bar{\varphi}_j(0)\,dx + \int_\Omega\int_0^T u'\bar{\varphi}_j\,dtdx - \int_\Omega\int_0^T \Delta u\bar{\varphi}_j\,dtdx \\ &+\int_\Omega\int_0^T \bar{\varphi}_j a u\,dtdx + \int_\Omega\int_0^T b\cdot\nabla u\bar{\varphi}_j\,dtdx = -\int_\Omega u(T)\,\bar{\varphi}_j^0 dx + \int_\Omega\int_0^T \langle u_t - \Delta u + au + b\nabla u, \bar{\varphi}_j\rangle dtdx. \end{aligned}$$

Daí, temos por (3.44) que

$$\int_\Omega\int_0^T \theta\bar{\varphi}_j\,dtdx = \int_\Omega u(T)\,\bar{\varphi}_j^0 dx. \tag{3.45}$$

Por (3.41), segue que

$$\int_\Omega u(T)\,\bar{\varphi}_j^0 dx \to \int_\Omega u(T)\,\bar{\varphi}^0 dx. \tag{3.46}$$

Analogamente, multiplicando a equação $(3.10)_1$ por u solução de (3.44) e integrado em Q, obtemos que

$$\int_\Omega \int_0^T \theta\bar{\varphi} dt dx = \int_\Omega u(T)\,\bar{\varphi}^0 dx. \tag{3.47}$$

Combinando (3.45)-(3.47), podemos concluir que

$$\int_0^T \int_\Omega \theta\bar{\varphi}_j dt dx \to \int_0^T \int_\Omega \theta\bar{\varphi} dt dx,$$

para todo $\theta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e, portanto, segue (3.42).

De (3.40) e (3.42), deduzimos que

$$\bar{\varphi} \equiv 0 \text{ em } \omega \times (0,T).$$

Como consequência da Proposição 3.1, temos que $\bar{\varphi}^0 \equiv 0$. Portanto, de (3.41), vale, necessariamente,

$$\bar{\varphi}_j^0 \rightharpoonup 0 \text{ em } L^2(\Omega). \tag{3.48}$$

Entretanto, considerando (3.48) e sendo E de dimensão finita, temos que π_E é compacta, e por conseguinte, obtemos

$$\pi_E\bar{\varphi}_j^0 \to 0 \;\text{ em }\; L^2(\Omega). \tag{3.49}$$

De (3.49), segue que

$$\left|(I-\pi_E)\,\bar{\varphi}_j^0\right| \to 1, \tag{3.50}$$

desde que $\left|\bar{\varphi}_j^0\right| = 1$, para todo j. Como consequência de (3.48) e (3.50), aplicando o $\liminf$ quando $j \to \infty$ em (3.37), deduzimos que

$$\liminf_{j\to\infty} \frac{J\left(\bar{\varphi}_j^0\right)}{\left|\bar{\varphi}_j^0\right|} \geq \liminf_{j\to\infty}\left[\epsilon\left|(I-\pi_E)\,\bar{\varphi}_j^0\right| - \int_\Omega u^1\bar{\varphi}_j^0 dx\right] = \epsilon.$$

Portanto, segue a desigualdade de coercividade (3.34).

Tendo em vista as propriedades de continuidade, convexidade estrita e coercividade do funcional J, segue do Teorema 1.2 que J atinge o seu mínimo em um único $\bar{\varphi}^0 \in L^2(\Omega)$, isto é,

$$\begin{cases} J\left(\bar{\varphi}^0\right) = \min\limits_{\varphi^0 \in L^2(\Omega)} J\left(\varphi^0\right) \\ J\left(\bar{\varphi}^0\right) < J\left(\varphi^0\right), \quad \forall\varphi^0 \in L^2(\Omega), \quad \varphi^0 \neq \bar{\varphi}^0. \end{cases} \tag{3.51}$$

Veremos agora que o controle procurado é na verdade $v = \bar{\varphi}$ em $\omega \times (0, T)$, sendo $\bar{\varphi}$ solução de (3.10) com o mínimo $\bar{\varphi}^0$ como dado inicial tal que a solução u de (3.7) satisfaz (3.2).

De fato, temos de (3.51), que $J(\bar{\varphi}_0) \leq J(\bar{\varphi}_0 + c\varphi_0)$.

Assim,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^T \int_\omega \bar{\varphi}^2 dxdt + \epsilon \left|(I - \pi_E)(\bar{\varphi}_0)\right| - \int_\Omega u^1 \bar{\varphi}_0 dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^T \int_\omega (\bar{\varphi} + c\varphi)^2 dxdt + \epsilon \left|(I - \pi_E(\bar{\varphi}_0 + c\varphi_0))\right| - \int_\Omega u^1 (\bar{\varphi}_0 + c\varphi_0) dx
\end{aligned}$$

Segue que

$$c\int_\Omega u^1 \varphi_0 dx \leq c^2 \int_0^T \int_\omega \varphi^2 dxdt + c\int_0^T \int_\omega \bar{\varphi}\varphi dxdt + \epsilon \left|(I - \pi_E)(c\varphi_0)\right|.$$

Dividindo a expressão acima por $c > 0$, e fazendo $c \to 0^+$,obtemos

$$-\epsilon \left|(I - \pi_E)\varphi_0\right|_{L^2} \leq \int_0^T \int_\omega \bar{\varphi}\varphi dxdt - \int_\Omega u^1 \varphi_0 dx. \tag{3.52}$$

Da mesma forma, agora para $c < 0$ e fazendo $c \to 0^-$, temos

$$\int_0^T \int_\omega \bar{\varphi}\varphi dxdt - \int_\Omega u^1 \varphi_0 dx \leq -\epsilon \left|(I - \pi_E)\varphi_0\right|. \tag{3.53}$$

De (3.52) e (3.53), deduzimos que

$$\left|\int_{\omega \times (0,T)} \bar{\varphi}\varphi dxdt - \int_\Omega u^1 \varphi_0 dx\right| \leq \epsilon \left|(I - \pi_E)\varphi_0\right|. \tag{3.54}$$

Multiplicando $(3.7)_1$ por φ e integrando em Q, segue que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega u(T)\varphi(T)dx - \int_Q u\varphi_t dxdt - \int_Q u\Delta\varphi dxdt - \int_Q a\varphi u dxdt - \int_Q u \operatorname{div}(b\varphi) dxdt \\
&= \int_Q v 1_\omega \varphi dxdt.
\end{aligned}$$

Logo, por (3.10), temos

$$\int_\Omega u(T)\varphi_0 dx = \int_Q v 1_\omega \varphi dxdt. \tag{3.55}$$

Tomando $\bar{\varphi} = v$, e combinando (3.54) e (3.55), podemos deduzir que

$$\left|\int_0^T \int_\omega v\varphi dxdt - \int_\Omega u^1 \varphi_0 dx\right| \leq \epsilon \left|(I - \pi_E)\varphi_0\right|.$$

Segue que

$$\left|\left\langle u(T) - u^1, \varphi_0 \right\rangle\right| \leq \epsilon \left|(I - \pi_E)\varphi_0\right|, \tag{3.56}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega \left(u(T) - u^1\right)\varphi_0 dx\right| &\leq \epsilon \left|(I - \pi_E)\right| \left|\varphi_0\right| \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, deduzimos que

$$\left|u(T) - u^1\right| \leq \epsilon.$$

Daí, temos a densidade de $R(u^0, T)$ em $L^2(\Omega)$. Em particular, considerando em (3.56) $\varphi_0 \in E$, deduzimos que

$$\pi_E(u(T)) = \pi_E\left(u^1\right).$$

Portanto, temos então a controlabilidade finito-aproximada do sistema linear. ■

Para provarmos a limitação uniforme (3.3), observamos primeiro, como indicado em (3.9), que o problema pode ser reduzido para o caso $u^0 \equiv 0$ e $\lambda \equiv 0$, desde que u^1 é permitido variar em um conjunto relativamente compacto de $L^2(\Omega)$. O seguinte resultado vale:

Proposição 3.2 *Sejam $R > 0$ e K um conjunto relativamente compacto de $L^2(\Omega)$. Então, a propriedade de coercividade (3.34) vale, com $u^1 \in K$ e os potenciais a e b satisfazendo (3.4).*

Observação 3.3 *Note que o funcional J depende dos potenciais a e b e do objetivo u^1. A proposição (3.2) garante a coercividade deste funcional quando $u^1 \in K$, K sendo um conjunto compacto de $L^2(\Omega)$ e os potenciais a e b são limitados. Como uma consequência da proposição (3.2), deduzimos que o mínimo $\bar{\varphi}^0$ do funcional J é limitado quando $u^1 \in K$ e os potenciais a e b são limitados. Consequentemente, os controles $v = \bar{\varphi}$ são uniformemente limitados, pois bastar observar (3.16).*

Prova [Proposição 3.2] A prova é similar a propriedade de coercividade do funcional J. Argumentaremos por contradição. Se a propriedade de coercividade (3.34) não vale, deduzimos a existência de sequências

$$\left(u_j^1\right) \in K, \tag{3.57}$$

$$\left(\varphi_j^0\right) \in L^2(\Omega) \text{ tal que } \left|\varphi_j^0\right| \to \infty \tag{3.58}$$

e

$$\begin{cases} a_j \in L^\infty(\Omega \times (0,T)), \quad b_j \in \left(L^\infty(\Omega \times (0,T))\right)^n \\ \|a_j\|_{L^\infty(\Omega\times(0,T))} \leq R, \quad \|b_j\|_{(L^\infty(\Omega\times(0,T)))^n} \leq R. \end{cases} \tag{3.59}$$

tal que

$$\frac{J_j\left(\varphi_j^0\right)}{\left|\varphi_j^0\right|} \leq \epsilon - \delta, \tag{3.60}$$

para algum $0 < \delta < \epsilon$.

Aqui e em sequência, denotamos J_j o funcional correspondendo ao objetivo u_j^1 e os potenciais a_j, b_j.

Fixamos

$$\bar{\varphi}_j^0 = \frac{\varphi_j^0}{\left|\varphi_j^0\right|}, \quad \bar{\varphi}_j = \frac{\varphi_j}{\left|\varphi_j^0\right|}. \tag{3.61}$$

Temos,

$$\begin{aligned} \frac{J\left(\varphi_j^0\right)}{\left|\varphi_j^0\right|} = & \frac{\left|\varphi_j^0\right|}{2} \int_0^T \int_\omega \left|\bar{\varphi}_j\right|^2 dxdt + \epsilon \left|(I - \pi_E)\,\bar{\varphi}_j^0\right| \\ & - \int_\Omega u_j^1 \bar{\varphi}_j^0 dx. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Tendo em vista (3.58) e (3.60), imediatamente deduzimos que

$$\int_0^T \int_\omega \left|\bar{\varphi}_j\right|^2 dxdt \to 0, \text{ quando } j \to \infty. \tag{3.63}$$

Extraindo subsequência temos

$$\bar{\varphi}_j^0 \rightharpoonup \bar{\varphi}^0 \text{ em } L^2(\Omega), \tag{3.64}$$

$$\bar{\varphi}_j \rightharpoonup \bar{\varphi} \text{ em } L^2\left(0,T; H_0^1(\Omega)\right), \tag{3.65}$$

$$u_j^1 \to u^1 \text{ em } L^2(\Omega), \tag{3.66}$$

$$a_j \overset{*}{\rightharpoonup} a \text{ em } L^{\infty}(Q), \tag{3.67}$$

$$b_j \overset{*}{\rightharpoonup} b \text{ em } (L^{\infty}(Q))^n. \tag{3.68}$$

Tendo em vista (3.63), temos

$$\bar{\varphi} = 0 \text{ em } \omega \times (0,T). \tag{3.69}$$

Por outro lado, considere $\bar{\varphi}$ solução de (3.10) em que os potenciais a e b são limites em (3.67) e (3.68) e o dado inicial $\bar{\varphi}^0$ o limite em (3.64).

De fato, temos que mostrar que

$$a_j \bar{\varphi}_j \rightharpoonup a\bar{\varphi} \text{ em } L^2(Q) \tag{3.70}$$

e

$$b_j \bar{\varphi}_j \rightharpoonup b\bar{\varphi} \text{ em } \left(L^2(Q)\right)^n. \tag{3.71}$$

Isso pode ser feito facilmente, desde que

$$\bar{\varphi}_j' \text{ é limitada em } L^2\left(0,T; H^{-1}(\Omega)\right). \tag{3.72}$$

Combinando (3.65), (3.72) e o Lema de Compacidade de Aubin-Lions, deduzimos que

$$\bar{\varphi}_j \text{ é relativamente compacta em } L^2\left(0,T; L^2(\Omega)\right), \tag{3.73}$$

o que implica na seguinte convergência:

$$\bar{\varphi}_j \to \bar{\varphi} \text{ em } L^2(Q). \tag{3.74}$$

As convergências (3.70) e (3.71) seguem imediatamente de (3.67), (3.68) e (3.74). Isto justifica o fato de que o limite $\bar{\varphi}$ satisfaz (3.10).

De acordo com a Proposição 3.1, segue de (3.69) que $\bar{\varphi}_0 \equiv 0$. De acordo com (3.64), temos

$$\bar{\varphi}_j^0 \rightharpoonup 0 \text{ em } L^2(\Omega).$$

Esta última convergência junto com (3.66), implicam que

$$\int_{\Omega} u_j^1 \bar{\varphi}_j^0 dx \to 0.$$

Por outro lado, como na prova da desigualdade de coercividade (3.34), temos também que

$$\left|(I-\pi_E)\,\bar{\varphi}_j^0\right| \to 1.$$

Portanto,

$$\frac{J_j\left(\bar{\varphi}_j^0\right)}{\left|\bar{\varphi}_j^0\right|} \geq \epsilon\left|(I-\pi_E)\,\bar{\varphi}_j^0\right| - \int_\Omega u_j^1\bar{\varphi}_j^0 dx \geq \epsilon,$$

o que é uma contradição com (3.60). Isto completa a prova da Proposição 3.2 e, consequentemente, do Teorema 3.1. ■

Observação 3.4 *Note que a prova do Teorema 3.1 prevê, não apenas a existência do controle v, mas também uma forma construtiva de encontrá-lo, e escolhê-lo de forma única.*

3.2 Controle Nulo

Nesta seção iremos retratar a controlabilidade nula por meio do controle aproximado no caso da equação do calor linear.

Definição 3.2 *Dizemos que o sistema (3.1) é nulamente controlável, se dados $T>0$ e $u^0 \in L^2(\Omega)$, existe um controle $v \in L^2(\omega\times(0,T))$, tal que*

$$u(T) = 0 \text{ em } \Omega. \tag{3.75}$$

Em outras palavras, o problema de controlabilidade nula se resume em verificar que o conjunto $R(u^0,T)$ formado por todos os estados alcançáveis, no tempo T, contém o zero, ou seja, $0 \in R(u^0,T)$.

Teorema 3.2 *Suponhamos satisfeitas as hipóteses anteriores. Então, para todo $T>0$ e qualquer $u^0 \in L^2(\Omega)$, existe um controle $v \in L^2(\omega\times(0,T))$ tal que a solução do sistema linear (3.1) satisfaz (3.75), isto é, o sistema (3.1) é nulamente controlável.*

Prova Da controlabilidade aproximada do caso linear, já provamos que existe um controle $v \in L^2(\omega\times(0,T))$ tal que a solução u de (3.1), satisfaz

$$\left|u(T)-u^1\right| \leq \epsilon,$$

o que nos faz pensar que para cada $\delta > 0$, existe um controle $v_\delta \in L^2(\omega \times (0,T))$ tal que a solução u_δ do sistema (3.1), satisfaz

$$|u_\delta(T)| \leq \delta, \tag{3.76}$$

em que $u^1 = 0$, isto é, mostramos que existe um controle v_δ que aproxima a solução u_δ ao estado de equilíbrio no tempo T.

Denotemos por $\bar{\varphi}_\delta$ a solução do sistema adjunto (3.10), onde $\bar{\varphi}_\delta^0$ é o dado inicial e definimos o controle $v_\delta = \bar{\varphi}_\delta 1_\omega$.

Seja u_δ solução do sistema (3.1) com controle v_δ, isto é,

$$\begin{cases} u_\delta' - \Delta u_\delta + a u_\delta + b \cdot \nabla u_\delta = \bar{\varphi}_\delta 1_\omega & \text{em } Q, \\ u_\delta = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ u_\delta(0) = u^0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{3.77}$$

Pelo Teorema 3.1, temos que o controle v é limitado em $L^2(\omega \times (0,T))$. Daí, podemos extrair uma subsequência, tal que

$$v_\delta \rightharpoonup v \text{ em } L^2(\omega \times (0,T)). \tag{3.78}$$

Do Capítulo 2, temos as seguintes limitações:

$$(u_\delta) \text{ é limitada em } L^2\left(0,T; H_0^1(\Omega)\right)$$

e

$$(u_\delta') \text{ é limitada em } L^2\left(0,T; H^{-1}(\Omega)\right).$$

Daí, extraindo subsequências, temos

$$u_\delta \rightharpoonup u \text{ em } L^2\left(0,T; H_0^1(\Omega)\right) \tag{3.79}$$

e

$$u_\delta' \rightharpoonup u' \text{ em } L^2\left(0,T; H^{-1}(\Omega)\right). \tag{3.80}$$

Sendo u_δ solução do sistema (3.77), então para todo $\psi \in W\left(0,T;H_0^1(\Omega),L^2(\Omega)\right)$ com $\psi(0)=\psi(T)=0$, temos da definição de solução fraca que

$$-\int_Q u_\delta \psi' dxdt + \int_Q \nabla u_\delta \nabla \psi dxdt + \int_Q a u_\delta \psi dxdt + \int_Q (b\cdot \nabla u_\delta)\, \psi dxdt = \int_Q v_\delta 1_\omega \psi dxdt. \quad (3.81)$$

Fazendo $\delta \to 0$ em (3.81) temos, pelas convergências (3.78)-(3.80), que

$$-\int_Q u\psi' dxdt + \int_Q \nabla u \nabla \psi dxdt + \int_Q a u \psi dxdt + \int_Q (b\cdot \nabla u)\, \psi dxdt = \int_Q v 1_\omega \psi dxdt. \quad (3.82)$$

Em (3.81) consideremos $\psi = \theta\beta$, com $\theta \in H_0^1(\Omega)$ e $\beta \in C^1([0,T])$ tal que $\beta(0)=1$ e $\beta(T)=0$. Então, de (3.81) e (3.82) temos que

$$\int_\Omega u_\delta(0)\,\theta dx \to \int_\Omega u(0)\,\theta dx,$$

para todo $\theta \in H_0^1(\Omega)$. Como $u_\delta(0)=u^0$, então

$$u(0)=u^0. \quad (3.83)$$

De (3.82) e (3.83), concluimos que u é solução do sistema (3.1).

Se considerarmos $\psi=\theta\beta$, com $\theta\in H_0^1(\Omega)$ e $\beta\in C^1([0,T])$ tal que $\beta(0)=0$ e $\beta(T)=1$, segue de (3.81) e (3.82) que

$$\int_\Omega u_\delta(T)\,\theta dx \to \int_\Omega u(T)\,\theta dx,$$

para todo $\theta\in H_0^1(\Omega)$, isto é,

$$u_\delta(T) \rightharpoonup u(T) \text{ em } L^2(\Omega).$$

Logo, pela convergência fraca e por (3.76), obtemos

$$|u(T)| \le \liminf_{\delta\to 0} |u_\delta(T)| \le \liminf_{\delta\to 0} \delta = 0$$

e por conseguinte, temos

$$u(T)=0.$$

$\blacksquare$

Capítulo 4

Controlabilidade do Sistema Semilinear

Neste capítulo, estudaremos a controlabilidade para o seguinte sistema associado à equação do calor semilinear:

$$\begin{cases} u' - \Delta u + f(u, \nabla u) = v1_{\omega} & \text{em } Q, \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ u(x,0) = u^0(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

em que a não linearidade f é globalmente lipschtiziana.

A existência de soluções forte e fraca (com a mesma regularidade consideradas nas definições 2.1 e 2.2) para o sistema (4.1) também pode ser feita usando o método de Faedo-Galerkin, como no Capítulo 2. Usando o fato de que a função f é globalmente Lipschtziana, os termos envolvendo a não linearidade f nas estimativas são facilmente estimados de forma que recaímos no caso antes estudado. Por isso omitiremos aqui os detalhes. Passemos ao estudo da controlabilidade do sistema (4.1).

4.1 Descrição do Método do Ponto Fixo

Nesta seção explicaremos o método do ponto fixo. Como falamos na introdução, o método desenvolvido nesta dissertação é uma variação do método do ponto fixo introduzido em Zuazua [32], no contexto da equação da onda e adaptado em Fabre, Puel e Zuazua [9], para lidar com a equação do calor semilinear.

Observamos, que para qualquer $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ vale a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} f(y,\nabla y) - f(0,0) &= \int_0^1 \frac{d}{d\sigma}\left(f(\sigma y,\sigma\nabla y)\right)d\sigma \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(\sigma y,\sigma\nabla y)\, y d\sigma + \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \eta}(\sigma y,\sigma\nabla y)\,\nabla y d\sigma, \end{aligned} \tag{4.2}$$

em que $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial \eta}$ denotam, respectivamente, a derivada parcial de f com respeito a variável y e ∇y. Introduzimos a notação

$$\begin{cases} F(y) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(\sigma y,\sigma\nabla y)\,d\sigma, \\ \\ G(y) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \eta}(\sigma y,\sigma\nabla y)\,d\sigma. \end{cases} \tag{4.3}$$

Temos

$$f(y,\nabla y) = F(y)\,y + G(y)\cdot\nabla y,$$

sendo

$$F : L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \to L^\infty(Q) \text{ e } G : L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \to \left[L^\infty(Q)\right]^n.$$

Temos ainda

$$\|F(y)\|_{L^\infty(Q)} \le L,\ \forall y \in, L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \tag{4.4}$$

$$\|G(y)\|_{[L^\infty(Q)]^n} \le L,\ \forall y \in, L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right), \tag{4.5}$$

L sendo a constante de Lipschitz da função f.

Por conseguinte, podemos reescrever o sistema (4.1) sob a forma

$$\begin{cases} u' - \Delta u + F(u)\,u + G(u)\cdot\nabla u + f(0,0) = v1_\omega & \text{em } Q, \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ u(x,0) = u^0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{4.6}$$

Dado $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, consideremos o sistema

$$\begin{cases} u' - \Delta u + F(y)\,u + G(y)\cdot\nabla u + f(0,0) = v1_\omega & \text{em } Q, \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ u(x,0) = u^0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{4.7}$$

Observemos que (4.7), é um sistema linear em u com potenciais $a = F(y) \in L^\infty(Q)$ e $b = G(y) \in \left[L^2(Q)\right]^n$ satisfazendo a seguinte limitação uniforme

$$\|a\|_{L^\infty(Q)} \leq L, \quad \|b\|_{[L^\infty(Q)]^n} \leq L. \tag{4.8}$$

Com esta notação, o sistema (4.7) pode ser reescrito da forma

$$\begin{cases} u' - \Delta u + au + b\cdot\nabla u + f(0,0) = v1_\omega & \text{em } Q, \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ u(x,0) = u^0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{4.9}$$

Fixamos o dado inicial $u^0 \in L^2(\Omega)$, o objetivo (dado final) $u^1 \in L^2(\Omega)\,, \epsilon > 0$ e o subespaço de dimensão finita E de $L^2(\Omega)$.

Mostramos no Capítulo 3, que usando a abordagem variacional para controlabilidade aproximada introduzida por Lions [20], também desenvolvida em Fabre, Puel e Zuazua [9], e adaptada para o problema de controlabilidade finita aproximada em Zuazua [33], construimos um controle $v \in L^2(\omega\times(0,T))$, de norma mínima, tal que a solução u do sistema (4.9), satisfaz (5). Deste modo, para qualquer $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, podemos definir um controle $v = v(x,t,y) \in L^2(\omega\times(0,T))$ tal que a solução $u = u(x,t,y) \in C\left[0,T\right];L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ de (4.7), satisfaz (5). Isto nos permite construir uma aplicação não linear

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{N} : L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) & \rightarrow & L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ y & \mapsto & \mathcal{N}(y) = u. \end{array} \tag{4.10}$$

Afirmamos assim, que a controlabilidade de (4.1) é então reduzida a encontrar um ponto fixo de $\mathcal{N}$. De fato, se $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ é tal que $\mathcal{N}(y) = u = y$, u solução de (4.7) é na verdade solução de (4.6). Então, o controle $v = v(y)$ é o que estavámos procurando desde então.

Como veremos, a aplicação não linear $\mathcal{N}$ definida em (4.10) satisfaz as seguintes propriedades:

$$\mathcal{N} \text{ é contínua ;} \tag{4.11}$$

$$\mathcal{N} \text{ é compacta;} \tag{4.12}$$

$$\begin{cases} \text{A imagem de } \mathcal{N} \text{ é limitada, isto é,} \\ \exists\ R > 0; |\mathcal{N}(y)|_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)} \leq R, \quad \forall y \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right). \end{cases} \tag{4.13}$$

Dessa forma, a existência do ponto fixo de $\mathcal{N}$ segue imediato do Teorema de Schauder (Ver Teorema 1.9).

A limitação uniforme (4.13) da imagem de $\mathcal{N}$ é uma consequência da limitação uniforme (4.8) dos potenciais a e b que, por sua vez, é uma consequência da f ser como em (3).

A grosso modo, o problema de controle para o sistema (4.1), por meio do método do ponto fixo, é reduzido a obter um resultado de controlabilidade uniforme para a família de problemas lineares de controle (4.7) sob as condições (4.4) e (4.5).

4.2 Controle Finito-Aproximado

Esta seção, é dedicado à prova do seguinte resultado:

Teorema 4.1 *Suponhamos que f satisfaz (3). Então, para todo $T > 0$, o sistema (4.1) é finito aproximadamente controlável. Mais precisamente, para qualquer subespaço de dimensão finita E de $L^2(\Omega)$, u^0, $u^1 \in L^2(\Omega)$ e $\epsilon > 0$, existe um controle $v \in L^2(\omega \times (0,T))$ tal que a solução u do problema (4.1) satisfaz (5).*

Observação 4.1 *O Teorema 4.1, foi provado por Fernandez-Cara e Zuazua em [33], por meio de uma penalização adequada de um problema de controle ótimo. No entanto, faremos aqui uma demonstração diferente seguindo Zuazua [31], por acreditar que esta abordagem é mais simples e mais fácil de se adaptar a outras situações, trazendo uma nova luz ao problema de controlabilidade aproximada.*

Prova [Teorema 4.1] Procediremos por meio do método do ponto fixo descrito na seção anterior. Tendo em vista o Teorema 3.1, a aplicação não linear $\mathcal{N}$ dada em (4.10) está bem definida.

Como indicado na seção anterior, a fim de concluir a existência do ponto fixo de $\mathcal{N}$ por meio do Teorema de Schauder, e portanto, concluir a prova do Teorema 4.1, é suficiente verificarmos (4.11)-(4.13).

A continuidade de $\mathcal{N}$

Suponhamos que

$$y_j \to y \ \text{ em } \ L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right). \tag{4.14}$$

O objetivo é mostrar que $\mathcal{N}(y_j) \to \mathcal{N}(y)$. Segue que, os potenciais $a_j = F(y_j)$ e $b_j = G(y_j)$ são tais que

$$a_j = F(y_j) \to F(y) = a \ \text{ em } L^2(Q), \tag{4.15}$$

$$b_j = G(y_j) \to G(y) = b \ \text{ em } [L^2(Q)]^n, \tag{4.16}$$

para todo $1 \leq p < \infty$ e

$$\|F(y_j)\|_{L^\infty(Q)} \leq L, \quad \|G(y_j)\|_{[L^\infty(Q)]^n} \leq L. \tag{4.17}$$

Seja J_j o funcional definido em (3.18) associado aos potenciais a_j e b_j. De acordo com o Teorema 3.1, os controles correspondentes são uniformemente limitados, ou seja,

$$\|v_j\|_{L^2(\omega\times(0,T))} \leq C, \ \forall j \geq 1. \tag{4.18}$$

Temos assim, uma sequência (u_j), sendo u_j solução do sistema

$$\begin{cases} u_j' - \Delta u_j + a_j u_j + b_j \cdot \nabla u_j = v_j 1_\omega & \text{em } Q, \\ u_j = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ u_j(0) = u^0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{4.19}$$

Além disso,

$$v_j = \bar{\varphi}_j \ \text{ em } \omega \times (0,T), \tag{4.20}$$

em que $\bar{\varphi}_j$ resolve

$$\begin{cases} -\varphi_j' - \Delta\varphi_j + F\left(y_j\right)\varphi_j - \operatorname{div}\left(G\left(y_j\right)\varphi_j\right) = 0 & \text{em } Q, \\ \varphi_j = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi_j\left(T\right) = \bar{\varphi}_j^0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{4.21}$$

com o dado $\bar{\varphi}_j^0$ minimizante do funcional correspondente J_j. Temos desta forma, uma sequência $\left(\bar{\varphi}_j^0\right)$ de minimizantes, tal que

$$\left|\bar{\varphi}_j^0\right| \leq c. \tag{4.22}$$

Com efeito, se $\left(\bar{\varphi}_j^0\right)$ não fosse limitada, existiria uma subsequência de $\left(\bar{\varphi}_j^0\right)$ talque

$$\left|\bar{\varphi}_j^0\right| \to \infty \;\text{ quando }\; j \to \infty,$$

e pela coercividade de J_j teríamos

$$\liminf_{j\to\infty} \frac{J_j\left(\bar{\varphi}_j^0\right)}{\left|\bar{\varphi}_j^0\right|} \geq \epsilon, \tag{4.23}$$

e uma vez que $\bar{\varphi}_j^0$ minimiza o funcional J_j, temos de (4.23) que $J_j\left(\bar{\varphi}_j^0\right) \leq J_j\left(0\right) = 0$. Então, concluímos que $\epsilon \leq 0$, que é absurdo pela definição de coercividade. Por conseguinte, segue (4.22).

Pela extração de subsequências temos

$$\bar{\varphi}_j^0 \rightharpoonup \bar{\varphi}^0 \text{ em } L^2\left(\Omega\right) \tag{4.24}$$

e, tendo em vista (3.17) e (4.15) - (4.16), deduzimos que

$$\bar{\varphi}_j \rightharpoonup \bar{\varphi} \text{ em } L^2\left(0, T; H_0^1\left(\Omega\right)\right), \tag{4.25}$$

em que $\bar{\varphi}$ resolve

$$\begin{cases} -\varphi' - \Delta\varphi + F\left(y\right)\varphi - \operatorname{div}\left(G\left(y\right)\varphi\right) = 0 & \text{em } Q, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi\left(T\right) = \bar{\varphi}^0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{4.26}$$

Também temos que

$$\bar{\varphi}_j' \text{ é limitado em } L^2\left(0,T;H^{-1}\left(\Omega\right)\right), \tag{4.27}$$

e outra vez, pelo Lema de Compacidade de Aubin-Lions (Lema 1.6), segue que

$$\bar{\varphi}_j \rightarrow \bar{\varphi} \text{ em } L^2\left(Q\right). \tag{4.28}$$

Consequentemente,

$$v_j \rightarrow v \text{ em } L^2\left(Q\right), \tag{4.29}$$

em que

$$v = \bar{\varphi} \text{ em } \omega \times (0,T). \tag{4.30}$$

A sequência (u_j) das soluções de (4.19) é tal que

$$\begin{aligned} u_j &\rightharpoonup u \text{ em } L^2\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right)\right), \\ u_j' &\rightharpoonup u' \text{ em } L^2\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right)\right), \end{aligned} \tag{4.31}$$

mais ainda, podemos provar que u é solução de seguinte sistema

$$\begin{cases} u' - \Delta u + au + b\cdot\nabla u = v1_\omega & \text{em } Q, \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ u\left(0\right) = u^0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{4.32}$$

Mostremos que

$$u_j \rightarrow u \text{ em } L^2\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right)\right). \tag{4.33}$$

De (4.19) e (4.32), temos que $w_j = u_j - u$ é solução do seguinte sistema

$$\begin{cases} w_j' - \Delta w_j + a_j w_j + b_j\cdot\nabla w_j = \left(v_j - v\right)1_\omega - \mu & \text{em } Q, \\ w_j = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ w_j\left(0\right) = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

sendo $\mu = \left(a_j - a\right)u + \left(b_j - b\right)\cdot\nabla u \in L^2\left(Q\right)$. Temos ainda, que a sequência (w_j) é limitada em $W\left(0,T;H^2\left(\Omega\right)\cap H_0^1\left(\Omega\right), H_0^1\left(\Omega\right)\right)$. Logo, pelo Lema de Aubin-Lions (Lema 1.6), segue que existe uma subsequência de (w_j), tal que

$$w_j \rightarrow w \text{ em } L^2\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right)\right),$$

isto é,

$$u_j \to u + w \text{ em } L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right).$$

Das convergências (4.31), segue que $w = 0$ e , por conseguinte, segue (4.33).

Para concluir a continuidade de $\mathcal{N}$ é suficiente verificar que o limite $\bar{\varphi}^0$ em (4.24) é o mínimo do funcional J. De fato, dado $\psi^0 \in L^2(\Omega)$ como dado inicial de (3.10), temos que mostrar que

$$J\left(\bar{\varphi}^0\right) \leq J\left(\psi^0\right).$$

Mas, isto é imediato, pois J é contínua e, portanto, semicontínua inferiormente. Daí temos que

$$J\left(\bar{\varphi}^0\right) \leq \lim_{j\to\infty} \inf J_j\left(\bar{\varphi}_j^0\right),$$

por outro lado,

$$J\left(\psi^0\right) = \lim_{j\to\infty} \inf J_j\left(\psi^0\right),$$

e finalmente,

$$J_j\left(\bar{\varphi}_j^0\right) \leq J_j\left(\psi^0\right)$$

desde que $\bar{\varphi}_j^0$ seja mínimo de J_j.

Compacidade de $\mathcal{N}$

Os argumentos acima apresentados mostram que, quando y está em um conjunto limitado B de $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, $u = \mathcal{N}(y)$ também está em um conjunto limitado de $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Temos de mostrar que $\mathcal{N}(B)$ é relativamente compacta em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Porém, isso pode ser facilmente obtido por meio do efeito regularizante da equação do calor. De fato, temos

$$\begin{cases} u' - \Delta u = h & \text{em } Q, \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ u(0) = u^0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

com

$$h = v1_\omega - F(y)\,u - G(y)\,\nabla u - f(0,0),$$

que é uniformemente limitado em $L^2(Q)$. Então, u pode ser decomposto como $u = p + q$, onde p satisfaz

$$\begin{cases} p' - \Delta p = 0 & \text{em } Q, \\ p = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ p(0) = u^0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

e q satisfaz

$$\begin{cases} q' - \Delta q = h & \text{em } Q, \\ q = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ q(0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Daí, temos que p é um elemento fixado de $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Por outro lado, deduzimos que q está em um conjunto limitado de $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$.

Seja

$$W = \left\{u;\ u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)) \text{ e } u' \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\right\}.$$

Temos que $\mathcal{N}(B)$ está em $L^2(0,T;H^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, que está imerso em W. Logo, pelo Lema de Compacidade de Aubin-Lions (Lema 1.6), temos que

$$W \overset{c}{\hookrightarrow} L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$$

e, portanto, $\mathcal{N}(B)$ é relativamente compacta em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Isto completa a prova da compacidade de $\mathcal{N}$.

Limitação da Imagem de $\mathcal{N}$

O Teorema 3.1 mostra que existe $C > 0$ tal que $v = v(y)$ satisfaz

$$|v(y)|_{L^2(\omega\times(0,T))} \leq C. \tag{4.34}$$

Devemos mostrar a estimativa clássica de energia para o sistema (4.7):

$$\|u(y)\|_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)} \leq C. \tag{4.35}$$

Com efeito, sem perda de generalidade, podemos supor $f(0,0) = 0$ em $(4.7)_1$, e multiplicando, formalmente, por u e integrando em $\Omega\times(0,t)$, obtemos

$$\int_0^t\int_\Omega u'udxdt - \int_0^t\int_\Omega \Delta uudxdt + \int_0^t\int_\Omega F(y)\,u^2dxdt + \int_0^t\int_\Omega G(y)\cdot\nabla udxdt = \int_0^t\int_\Omega vudxdt.$$

Usando Teorema de Green, integração por partes, as desigualdades de Cauchy-Schwartz e de Poincaré e (4.4) e (4.5), segue que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left|u\left(t\right)\right|^{2}+\int_{0}^{t}\left\|u\left(s\right)\right\|^{2}ds\leq\int_{0}^{t}\left|v\left(s\right)\right|\left|u\left(s\right)\right|ds+\frac{1}{2}\left|u_{0}\right|^{2}+L\int_{0}^{t}\left|u\left(s\right)\right|^{2}ds\\
&+L\int_{0}^{t}\left|u\left(s\right)\right|\left\|u\left(s\right)\right\|ds\leq\frac{1}{2}\int_{0}^{t}\left|v\left(s\right)\right|^{2}ds+\frac{1}{2}\int_{0}^{t}\left|u\left(s\right)\right|^{2}ds+\frac{1}{2}\left|u_{0}\right|^{2}+L\int_{0}^{t}\left|u\left(s\right)\right|^{2}ds\\
&+\frac{L^{2}}{2}\int_{0}^{t}\left|u\left(s\right)\right|^{2}ds+\frac{1}{2}\int_{0}^{t}\left\|u\left(s\right)\right\|^{2}ds\leq C+C_{1}\int_{0}^{t}\left|u\left(s\right)\right|^{2}ds,
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

em que $C\geq\frac{1}{2}\int_{0}^{t}\left|v\left(s\right)\right|^{2}ds+\frac{1}{2}\left|u_{0}\right|^{2}$ e $C_{1}\geq(\frac{1}{2}+L+\frac{L^{2}}{2})$. Logo, aplicando o Lema de Gronwall (Lema 1.4) em (4.36), segue (4.35).

Dessa forma, concluimos então que $\mathcal{N}$ tem um ponto fixo, ou seja, temos $\mathcal{N}\left(u\right)=u$, onde u é solução de (4.7) e, consequentemente, solução do problema (4.1), satisfazendo a condição (5). ■

Apêndice A

Apêndice

A.1 Existência e Prolongamento de Soluções Aproximadas

Neste apêndice temos como objetivo garantir a existência e o prolongamento de soluções para o problema aproximado (2.2).

Seja D um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ aberto cujos elementos denotaremos por (t, x), com $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Seja $f : D \to \mathbb{R}^n$ uma função não necessariamente contínua. O problema consiste em encontrar uma função absolutamente contínua $x = x(t)$ definida em algum intervalo da reta I, tal que $(t, x(t)) \in D$, para todo $t \in I$ e

$$x' = f(t, x), \tag{A.1}$$

para quase todo t em I.

Se uma tal função $x = x(t)$ e um tal intervalo I existem, então dizemos que $x(t)$ é uma solução de $(A.1)$ sobre I. Seja $(t_0, x_0) \in D$. Associado a $(A.1)$ e a (t_0, x_0), temos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{A.2}$$

Definição A.1 *Sejam D um subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $f : D \to \mathbb{R}^n$, dizemos que f satisfaz as condições de Caratheodory sobre D se:*

(a) $f(t,x)$ é mensurável em t para cada x fixo;

(b) $f(t,x)$ é contínua em x para cada t fixo;

(c) para cada compacto U em D existe uma função real integrável $m_U(t)$ tal que

$$|f(t,x)| \leq m_U(t), \ \forall (t,x) \in U.$$

A.1.1 Existência e Prolongamento de Soluções

Consideremos o retângulo $R = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}; |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b, a > 0 \text{ e } b > 0\}$.

Teorema A.1 *Seja $f : R \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Caratheodory sobre R, então existe uma solução $x = x(t)$ de (A.2) sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$ $(\beta > 0)$.*

Corolário A.1 *Seja D aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ e f satisfaz as condições de Caratheodory sobre D, então o problema (A.2) tem solução para qualquer $(t_0, x_0) \in D$.*

Teorema A.2 *Seja D aberto limitado conexo em $\mathbb{R}^{n+1}$, f satisfaz as duas primeiras condições de Caratheodory sobre D e existe uma função integrável $m(t)$ tal que $|f(t,x)| \leq m(t), \forall (t,x) \in D$. Seja φ uma solução de (A.1) sobre o intervalo aberto (a,b). Então,*

(i) existem $\varphi(a+0), \varphi(b-0)$;

(ii) se $(b, \varphi(b-0)) \in D$ então φ pode ser prolongada até $(a, b+\delta]$ para algum $\delta > 0$. Análogo resultado para a;

(iii) $\varphi = \varphi(t)$ pode ser prolongada até um intervalo (γ, ω) tal que $(\gamma, \varphi(\gamma+0)), (\omega, \varphi(\omega-0)) \in \partial D$ (∂D fronteira de D);

(iv) se f pode estender-se a D sem que ele perca suas propriedades então $\varphi = \varphi(t)$ pode ser prolongada até um intervalo $[\gamma, \omega]$ tal que $(\gamma, \varphi(\gamma+0)), (\omega, \varphi(\omega-0)) \in \partial D$.

Corolário A.2 *Seja $D = [0,t] \times B$, $T > 0$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}$, $b > 0$ e f nas condições do Teorema A.2. Seja $\varphi(t)$ uma solução de*

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(0) = x_0, \quad |x_0| \leq b. \end{cases}$$

Suponhamos que em qualquer intervalo I onde $\varphi = \varphi(t)$ está definida, tenhamos $|\varphi(t)| \leq M$, $\forall t \in I$, M independente de I e $M < b$. Então φ tem um prolongamento até $[0, T]$.

As demonstrações dos teoremas e corolários acima podem ser encontradas em [6] e [24].

Voltemos agora ao problema aproximado (2.2). Fazendo $v = w_j$ em (2.2), obtemos

$$\begin{cases} (z'_m(t), w_j) + (\nabla z_m(t), \nabla w_j) + (a(t) z_m(t), w_j) + (b \cdot \nabla z_m(t), w_j) = (\varphi, w_j), \\ z_m(0) = z_{0m} \to z_0 \text{ em } L^2(\Omega). \end{cases} \tag{A.3}$$

Sabemos que $z_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i \in V_m$ e logo $z'_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g'_{im}(t) w_i \in V_m$. Em princípio iremos reduzir o problema acima para uma EDO de primeira ordem com condição inicial. Analisaremos os termos de $(A.3)_1$.

* $(z'_m(t), w_j)$

Temos que

$$(z'_m(t), w_j) = \left(\sum_{i=1}^{m} g'_{im}(t) w_i, w_j \right) = \sum_{i=1}^{m} g'_{im}(t)(w_i, w_j) = g'_{jm}(t),$$

pois,

$$(w_i, w_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j. \end{cases}$$

* $(\nabla z_m(t), \nabla w_i)$

Do Teorema de Green, deduzimos que

$$(\nabla z_m(t), \nabla w_i) = (z_m(t), -\Delta w_j) = (z_m(t), \lambda_j w_j) = \lambda_j (z_m(t), w_j) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) \lambda_j (w_i, w_j) = \lambda_j g_{jm}(t).$$

Definamos $F_j = (a z_m(t) + b \cdot \nabla z_m(t), w_j)$. Assim, obtemos um sistema de m equações diferenciais de primeira ordem:

$$g'_{jm}(t) + \lambda_j g_{jm}(t) = (\varphi, w_j) + F_j.$$

Logo, temos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} g'_{jm}(t) + \lambda_j g_{jm}(t) = (\varphi, w_j) + F_j, \\ g_{jm}(0) = (g_{0m}, w_j). \end{cases} \tag{A.4}$$

Consideremos as matrizes

$$y = \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ g_{2m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix}_{m\times 1}, \ \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix}_{m\times m}, J_1 = \begin{bmatrix} (\varphi(t), w_1) \\ (\varphi(t), w_2) \\ \vdots \\ (\varphi(t), w_m) \end{bmatrix}_{m\times 1},$$

$$y_0 = \begin{bmatrix} (g_{0m}, w_1) \\ (g_{0m}, w_2) \\ \vdots \\ (g_{0m}, w_m) \end{bmatrix}_{m\times 1} \quad \text{e} \quad J_2 = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix}_{m\times 1}.$$

O sistema (A.4) pode ser visto como

$$\begin{cases} y' = -\lambda y + J_1 + J_2, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{A.5}$$

Seja

$$X(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \ X_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ F_1(X,t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\lambda & 0 \end{bmatrix} X, \ F_2(X,t) = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ J_1 \end{bmatrix} \text{ e } F_3(X,t) = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ J_2 \end{bmatrix},$$

onde 0 é a matriz nula de ordem $m \times m$, $\bar{0}$ é a matriz nula de ordem $m \times 1$ e I é a matriz identidade de ordem $m \times m$. Assim, resolver o problema (A.5) é equivalente a resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} X'(t) = F_1(X,t) + F_2(X,t) + F_3(X,t), \\ X(0) = X_{0.} \end{cases} \tag{A.6}$$

Mostraremos que o sistema (A.6) está nas condições do Corolário A.2. De fato, $G = U \times [0,T]$, onde $U = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \le b, \ b > 0\}$. Então,

- Fixando X, temos que $F_1(X,t)$ não depende de t, $F_2(X,t)$ é mensurável pois $\varphi \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e, por último, temos que $F_3(X,t)$ também é mensusável pois os potenciais $a(x,t) \in L^\infty(Q)$ e $b \in (L^\infty(Q))^n$.

- Fixando t, $F_2(X,t)$ e $F_3(X,t)$ não depende de X, logo são constantes em X e, portanto, contínuas. Temos também que $F_1(X,t)$ é linear em X com t fixado. Logo $F_1(X,t) + F_2(X,t) + F_3(X,t)$ é contínua.

- Como X varia em U, então todas as entradas são limitadas por uma mesma constante. As entradas de $F_2(X,t)$ são funções integráveis em $[0,T]$, pois as primeiras entradas são nulas e as m últimas entradas são, em valor absoluto, iguais a $|(\varphi(t), w_j)|$. Além disso,

  $$|(\varphi(t), w_j)| \leq \int_\Omega |(\varphi(t), w_j)|\, ds \leq \int_\Omega |\varphi(t)|\, |w_j|\, ds \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\varphi(s)|^2\, ds + \frac{1}{2}\int_\Omega |w_j|^2\, ds < \infty.$$

  Assim, $\|F_2(X,t)\|_{\mathbb{R}^{2n}} \leq \max_{1\leq j\leq n} |(\varphi(t), w_j)| = m_B(t)$. As entradas de $F_3(X,t)$ são integráveis em $[0,T]$, pois as m primeiras entradas são nulas e as m últimas são em valor absoluto iguais $|(a(t) + b(t)\cdot \nabla g_m(t), w_j)|$, $j = 1, 2, ..., n$. Dessa forma,

  $$\|F(X,t)\|_{\mathbb{R}^{2n}} \leq C_B + m_B(t) + C\left[|a(t)| + |b(t)\nabla g_m(t)|\right] = K_j(t) < \infty,$$

  em que (X,t) varia no compacto $U \times [0,T]$ e $K_j(t)$ com $j = 1, ..., n$ é integrável em $[0,T]$. Portanto, pelo Corolário A.2, o sistema (A.6) possui solução em $[0, t_m]$, $t_m < T$.

Referências Bibliográficas

[1] ACKER, F. e DICKSTEIN, F., *Uma Introdução à Análise Convexa,* 14^o Colóquio Brasileiro de Matemática,1983.

[2] ADAMS, R. A., *Sobolev Space*, Academic Press, London, 1975.

[3] ANITA, S. and BARBU, V., Null controllability of nonlinear convective heat equations, ESAIM: COCV, **5,** (2000), 157–173.

[4] BREZIS, H., *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications,* Dunod, Paris, 1999.

[5] CABANILLAS, V., MENEZES, S. and ZUAZUA, E., Null controllability in unbounded domains for the semilinear heat equation with nonlinearities involving gradientes terms, J. Optim. Theory Applications, **110** (2), (2001).

[6] CODDINGTON, E. and LEVINSON, N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGrall-Hill, New York, 1955.

[7] EVANS, L. C, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1997.

[8] FABRE, C., Uniqueness results for Stokes equations and their consequences in linear and nonlinear control problems. ESAIM: COCV, **1,** (1996), 267-302. (http://www.emath.fr/cocv/).

[9] FABRE, C.,PUEL, J. P. and ZUAZUA, E., Controlabilité approchée de l'équation de la chaleur linéarie avec contrôles de norme L^∞ minimale. C.R. Acad. Sci. Paris, **316**, (1993), 679-684.

[10] FERNÁNDEZ-CARA, E., Null controllability of the semilinear heat equation. ESAIM: COCV, **2**, 87-107, (http://www.emath.fr/cocv/).

[11] FERNÁNDEZ-CARA, E. and ZUAZUA, E., Null and aproximate controllability for weakly blowing up semilinear heat equations. Annales IHP. Analyse non-lineàrire, to appear, (1999).

[12] FERNÁNDEZ-CARA, E. and ZUAZUA, E., Approximate controllability for the semilinear heat equation involving gradient terms. J. Optim. Theory Appls., **101** (2), (1999), 307-328.

[13] FURSIKOV, A. and IMANUVILOV, O. YU., Controllability of evolution equations. Lecture Notes Series, 32, Seoul National University.

[14] LIONS, J.-L., *Problèmes aux Limites dans les Equations aux Dérivées Partielles,* Les Presses de L'Université de Montreal, Montreal, 1965.

[15] HENRY, J., *Contrôle d'un réacter enzymatique à l'aide de modèles à paramètres distribuès. Quelques problèmes de contrôlabilitè de systèmes paraboliques, PhD Thesis, Universitè Paris VI.*

[16] LEBEAU, G. and ROBBIANO, L., Contrôle exact de l'équation de la chaleur, Comm. P.D.E., 20, 335-356, (1995).

[17] LÍMACO, J. and MEDEIROS, L., Remarks on approximate controllability in noncylindrical domains. Prepint, (1998).

[18] LIONS, J.-L., *Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites Non-Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[19] LIONS, J.-L, Remarques sur la contrôlabilité approchée. In: Jornadas Hispano-Francesas sobre Control de Sistemas Distribuidos, University of Málaga, Spain, (1991), 77-87.

[20] LIONS, J.L., Remarks on approximate controllability. J. Analyse Math, **59**, 103-116.

[21] LIONS, J.-L. et MAGENES, E., *Problèmes aux Limites Non Homogenes et Applications*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, vol. 1, 1968.

[22] MEDEIROS, L. A, *Tópicos em Equações Diferenciais Parciais, Parte I*, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2006.

[23] MEDEIROS, L. A. e MILLA MIRANDA, M., *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, Textos de Métodos Matemáticos, vol. 25, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1989.

[24] MEDEIROS, L. A. e RIVERA, P. H., *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais*, Textos de Métodos Matemáticos, vol. 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1977.

[25] NAITO, K. and SEIDMAN, T., Invariance of the approximately reachable set under nonlinear perturbations. SIAM J. Cont. Optim., 29, 3, 731-750. (1991).

[26] RUSSELL, D. L., A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differencial equations. Studies in Appl. Math., 52, 189-221, (1973).

[27] SCHWARTZ, L., *Théorie des Distributions*, Hermann, 1966.

[28] TERESA, L., Approximate controllability of a semilinear heat equation in $\mathbb{R}^n$. SIAM J. Cont. Optim. 36, 6, 2128-2147, (1998).

[29] TERESA, L. and ZUAZUA, E., Approximate controllability of a semilinear heat equation in unbounded domains. Nonlinear Anal. TMA, 37, 8, 1059-1090, (1999).

[30] SIMON, J., Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$, Ann. Mat. Pura Appl., **CXLVI** (4), (1987), 65-96.

[31] ZUAZUA, E., Approximate controllability for semilinear heat equations with globally Lipschitz nonlinearities, Control and Cybernetics, vol. 28, Madrid, (1999).

[32] ZUAZUA, E., Exact boundary controllability for the semilinear wave equation. In: Nonlinear Partial Differencial Equations and their Applicatinos, vol. X, H. Brezis and J. L. Lions eds. Pitman, (1991), 357-391.

[33] ZUAZUA, E., Finite dimensional null controllability for the semilinear heat equation.J. Math. pures et appl.,**76**, (1997), 570-594.