Existência e Estabilidade do Sistema de Mindlin-Timoshenko Semilinear

por

José Eduardo Sampaio Borges

sob orientação de

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna (UFPB)

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-CCEN-UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Julho/2007
João Pessoa - PB

Existência e Estabilidade do Sistema de Mindlin-Timoshenko Semilinear

por

José Eduardo Sampaio Borges

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna (Orientador)

(Universidade Federal da Paraíba - UFPB)

Prof. Dr. Pablo Gustavo Albuquerque Braz e Silva

(Universidade Federal de Pernambuco - UFPE)

Prof. Dr. Marivaldo Pereira Matos

(Universidade Federal da Paraíba - UFPB)

Universidade Federal da Paraíba

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Ficha Catalográfica

BORGES, José Eduardo Sampaio.

Existência e Estabilidade do Sistema de Mindlin-Timoshenko Semilinear.

José Eduardo Sampaio Borges.

João Pessoa: UFPB/DM, 2007.

78 p. 29cm

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Paraíba, DM.

1. Sistema de Mindlin-Timoshenko. 2. Não Linearidade Contínua.

3. Existência. 4. Estabilidade.

I. Análise II. Título

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Fágner Dias Araruna, pelo apoio desde o início, dedicação e amizade construída durante o curso.

Ao Prof. Dr. Marivaldo Pereira Matos, pelos conhecimentos adquiridos e sua organização invejável.

Ao Prof. Dr. Pablo Gustavo Albuquerque Braz e Silva, pela aceitação e contribuição à dissertação.

A todos os professores do departamento de Matemática da UFPB que contribuíram para meu engrandecimento acadêmico.

À "Turma do Futebol", pelo apoio nas horas difíceis, contribuindo para uma ótima relação no dia a dia.

Aos amigos que me apoiaram na vinda e aos amigos que fiz, já com saudade.

Aos meus pais pelo incentivo em todos os momentos.

Aos meus irmãos por estarem do meu lado sempre com grande amizade.

À minha namorada Dayseane, pelo apoio e amor de toda hora, não deixando sentir-me sozinho.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

.

Aos meus pais, Borges e Graça, meus irmãos Diana, Júlio, Ricardo e minha namorada Dayseane com carinho e amor.

Resumo

Consideramos a dinâmica unidimensional do sistema de Mindlin-Timoshenko semilinear que representa as vibrações de vigas. Para uma viga de comprimento L, o sistema é dado por

$$\left| \begin{array}{l} u_{tt} - u_{xx} + K\left(u + v_x\right) + f\left(u\right) = a, \\ v_{tt} - K\left(u + v_x\right)_x + g\left(u\right) = b \end{array} \right.$$

em um domínio retangular $Q = (0, L) \times (0, T) \subset \mathbb{R}^2$, com condições de fronteira mistas, ou seja, no extremo esquerdo a viga permanece presa

$$u\left(0, \cdot\right) = v\left(0, \cdot\right) = 0$$

e no extremo direito a viga é apoiada e está sob a ação de uma força dissipativa

$$u_t\left(L, \cdot\right) + u_x\left(L, \cdot\right) = 0, \quad u\left(L, \cdot\right) + v_t\left(L, \cdot\right) + v_x\left(L, \cdot\right) = 0$$

em $(0, T)$. Estudamos a existência, unicidade e o comportamento assintótico (quando $t \to \infty$) das soluções do problema, considerando as funções $f,\ g,\ a$ e b satisfazendo algumas condições adequadas.

Abstract

We consider the dynamics of the one-dimensional semilinear Mindlin-Timoshenko system for beams. For a beam with length L, these system is given by

$$\left| \begin{array}{l} u_{tt} - u_{xx} + K\left(u + v_x\right) + f\left(u\right) = a, \\ v_{tt} - K\left(u + v_x\right)_x + g\left(u\right) = b, \end{array} \right.$$

in a rectangular domain $Q = (0, L) \times (0, T) \subset \mathbb{R}^2$. We consider mixed boundary conditions, that is, at the right end, the beam remains clamped

$$u\left(0, \cdot\right) = v\left(0, \cdot\right) = 0$$

and, at the left extreme, it is supported and it is under the action of a dissipative force

$$u_t\left(L, \cdot\right) + u_x\left(L, \cdot\right) = 0, \quad u\left(L, \cdot\right) + v_t\left(L, \cdot\right) + v_x\left(L, \cdot\right) = 0$$

on $\left(0, T\right)$. We investigate existence, uniqueness and asymptotic behavior (as $t \to \infty$) of solution for this problem, considering the functions f, g, a and b satisfying some adequate conditions.

Sumário

Introdução **1**

1 Notações e Resultados **6**

1.1 Espaços Funcionais 6

1.2 Principais Resultados Utilizados 11

2 Solução Forte **23**

3 Solução Fraca **41**

4 Comportamento Assintótico **61**

A Existência e Prolongamento de Soluções Aproximadas **70**

.

Introdução

Ultimamente, vem crescendo o interesse no estudo de sistemas de natureza elástica, em particular os que modelam a ação de vigas, devido a aplicação à física e à engenharia. Um modelo matemático extremamente usado na descrição de vibrações de vigas finas é o sistema de Mindlin-Timoshenko (Mindlin [18], Timoshenko [29]). Este modelo é considerado um dos mais precisos pelo fato de levar em conta tanto deformações transversais como também rotacionais. Para uma viga de comprimento $L > 0$, o sistema é dado pelas equações diferenciais parciais acopladas

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\rho h^3}{12} u_{tt} - u_{xx} + K\left(u + v_x\right) = 0 \text{ em } Q, \\ \rho h v_{tt} - K\left(u + v_x\right)_x = 0 \text{ em } Q, \end{array} \right. \tag{1}$$

onde $Q = (0, L) \times (0, T)$ e $T > 0$ é um tempo dado. Em (1), os sub-índices "$_x$" e "$_t$" representam, respectivamente, as derivadas com respeito às variáveis x e t. A função $u = u\,(x, t)$ é o ângulo de rotação da seção transversal da viga e $v = v\,(x, t)$ representa o deslocamento transversal da viga no tempo t. A constante h é a espessura da viga que, para esse modelo, é considerada uniforme e fina, ρ é a densidade de massa por unidade de volume e o parâmetro K, que multiplica o acoplamento das equações, é chamado de módulo de elasticidade em torção e é calculado pela fórmula

$$K = \frac{\widehat{K} E h}{2\left(1 + \mu\right)},$$

onde E é o módulo de Young, μ é o raio de Poisson $\left(0 < \mu < \dfrac{1}{2}\right)$ e $\widehat{K}$ é chamado coeficiente de correção de torção. Este coeficiente aparece pelo fato de que as deformações sofridas pelas torções não são constantes em toda seção transversal da viga. O módulo de elasticidade K é também inversamente proporcional ao ângulo de rotação da viga. A dedução bastante rigorosa do modelo (1) pode ser vista em Lagnese-Lions [10].

No nosso trabalho, consideraremos o sistema semilinear associado a (1) dado por

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\rho h^3}{12} u_{tt} - u_{xx} + K\left(u + v_x\right) + f\left(u\right) = a \text{ em } Q, \\ \rho h v_{tt} - K\left(u + v_x\right)_x + g\left(v\right) = b \text{ em } Q, \end{array} \right. \tag{2}$$

com a, b, f e g representando forças externas.

Vamos impor as seguintes condições de fronteira:

$$\left| \begin{array}{l} u\left(0, \cdot\right) = v\left(0, \cdot\right) = 0 \text{ sobre } \left(0, T\right), \\ u_x\left(L, \cdot\right) + u_t\left(L, \cdot\right) = 0 \text{ sobre } \left(0, T\right), \\ u\left(L, \cdot\right) + v_x\left(L, \cdot\right) + v_t\left(L, \cdot\right) = 0 \text{ sobre } \left(0, T\right). \end{array} \right. \tag{3}$$

As condições $(3)_1$ asseguram que a viga permanece presa no extremo $x = 0$. As condições $(3)_2$ e $(3)_3$ nos diz que a viga está apoiada no extremo $x = L$ com uma ação dissipativa.

Para completar nosso sistema, incluimos as condições iniciais:

$$\left| \begin{array}{l} u\left(\cdot, 0\right) = u^0\left(\cdot\right), \ u_t\left(\cdot, 0\right) = u^1\left(\cdot\right) \text{ em } \left(0, L\right), \\ v\left(\cdot, 0\right) = v^0\left(\cdot\right), \ v_t\left(\cdot, 0\right) = v^1\left(\cdot\right) \text{ em } \left(0, L\right). \end{array} \right. \tag{4}$$

Vários autores estudaram diferentes aspectos do sistema de Mindlin-Timosheko. No caso linear podemos citar os trabalhos Lagnese-Lions [13], Medeiros [20], os quais estudaram a controlabilidade exata usando o Método de Unicidade Hilbertiana (HUM) introduzido por Lions ([15], [16]) e Lagnese [9] que analisou o comportamento assintótico (quando $t \to \infty$) para o sistema. Em Araruna-Zuazua [4] foi feita uma análise espectral do sistema possibilitando obter uma controlabilidade usando o HUM combinado com argumentos de análise não-harmônica. No caso semilinear podemos mencionar o trabalho de Parente, Milla Miranda e Jutuca (ver [26]), no qual estudaram existência e unicidade para o problema $(2) - (4)$, com as funções f e g sendo Lipschitzianas, aplicando o mesmo método usado em Milla Miranda-Medeiros [25]. Em Araruna-Antunes-Medeiros [2], analisou-se a controlabilidade exata quando f e g são assintoticamente lineares, usando o HUM juntamente com argumentos de ponto fixo. A existência de atratores globais (para o caso bidimensional) foi estudada em Chueshov-Lasiecka [11], com as não linearidades f e g sendo do tipo localmente Lipschitzianas. Todos os artigos citados são tratados com diferentes condições de contorno envolvendo diversas situações que aparecem nas engenharias.

Neste trabalho estudamos a existência e o comportamento assintótico (quando $t \to \infty$) para o sistema $(2)-(4)$, onde as funções não lineares f e g satisfazem a condição de sinal,

$$f, g \text{ são funções contínuas, tais que } f(s)\, s \geq 0 \text{ e } g(s)s \geq 0,\ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Além disso, analisamos o comportamento assintótico (quando $t \to \infty$) do mesmo sistema com as não linearidades f e g satisfazendo, além de (5), as condições de crescimento

$$\exists \delta_1 > 0 \text{ tal que } f(s)s \geq (2+\delta_1)F(s),\ \forall s \in \mathbb{R},\ \text{ onde } F(s) = \int_0^s f(t)\, dt \tag{6}$$

e

$$\exists \delta_2 > 0 \text{ tal que } g(s)s \geq (2+\delta_2)G(s),\ \forall s \in \mathbb{R},\ \text{ onde } G(s) = \int_0^s g(t)\, dt. \tag{7}$$

Precisamente, mostramos que existem constantes $C > 0$ e $\kappa > 0$ tais que a energia do sistema (2) definida por

$$\begin{aligned} E(t) = \ & \frac{1}{2}\left[\frac{\rho h^3}{12}\left|u_t(t)\right|^2 + \rho h \left|v_t(t)\right|^2 + K\left|(u+v_x)(t)\right|^2 + \left\|u(t)\right\|^2\right. \\ & \left. +2\int_0^L F(u(x,t))dx + 2\int_0^L G(v(x,t))dx\right], \end{aligned} \tag{8}$$

verifica a estimativa

$$E(t) \leq Ce^{-\kappa t}E(0),\ \forall\ t \geq 0. \tag{9}$$

Estudamos também a unicidade para casos particulares de f e g. No caso geral, o problema encontra-se em aberto.

Nesta dissertação usamos as mesmas técnicas do artigo Araruna-Maciel [3], onde os autores obtiveram resultados semelhantes para o sistema associado à equação da onda semilinear

$$\left| \begin{array}{l} u_{tt} - \mu(t)\,\Delta u + f(u) = a \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_0 \times (0,T), \\ \mu(t)\,\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \beta(x)\,u_t = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_1 \times (0,T), \\ u(0) = u^0, \quad u_t(0) = u^1 \quad \text{em} \quad \Omega, \end{array} \right. \tag{10}$$

onde Ω é um aberto limitado de R^n, $n \geq 1$, com fronteira Γ de classe C^2, $\{\Gamma_0,\ \Gamma_1\}$ são partições de Γ, com Γ_0 e Γ_1 com medida de Lebesgue positiva e $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$ (essa geometria exclui as regiões simplesmente conexas de Ω), $T > 0$ um número real, o vetor ν é a normal exterior de Γ, Δ é o conhecido operador Laplaciano e $\partial u/\partial \nu$ representa a derivada normal de u. As funções μ e β são não negativas e a não linearidade f satisfaz a condição de sinal (6). Os autores também observaram que se pode obter os mesmos resultados sem a hipótese geométrica $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1}$ não necessariamente nulo para o caso $1 \leq n \leq 3$, aplicando os mesmos argumentos usados em Komornik-Zuazua [8].

Ao provarmos a existência de soluções, encontramos uma grande dificuldade para obter as condições (3), devido as não linearidades como em (5). Para contornar essa dificuldade foi preciso estudar um problema de contorno não-homogêneo (veja Proposição 1.4) juntamente com alguns argumentos de regularidade escondida. A unicidade para o caso geral ainda é um problema em aberto, então cosideramos um caso particular com as não linearidades sendo do tipo localmente Lipschtiziana. Para o comportamento assintótico, verifica-se que a energia (8) da solução (u, v) do problema (2) tem decaimento exponencial, obtido pelo método da pertubação de energia (ver, por exemplo, [8], [30]).

Passemos agora a descrever o conteúdo desta dissertação, que está dividida em quatro capítulos. No Capítulo 1, temos alguns resultados básicos e algumas notações essenciais para o entendimento do trabalho. Chamamos a atenção para resultados de problemas de valor de contorno e resultados que garantiram a construção de uma base especial idealizada por Milla Miranda e Medeiros em [25], que possibilitam encontar a solução do problema aplicando o método de Faedo-Galerkin.

No Capítulo 2, considerando as funções $f,\ g$ Lipschitzianas tais que $f(s)\,s \geq 0$ e

$g(s)s \geq 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$ e dados bem regulares, provamos a exitência e unicidade de solução forte usando o método de Faedo-Galerkin com a base construída no Capítulo 1.

No Capítulo 3, considerando agora as não linearidades f, g gerais como em (5) e dados com pouca regularidade, encontramos a solução fraca aproximando as funções f e g por funções Lipschitzianas, como em Strauss [28], para obter a solução fraca como limite de uma sequência de soluções fortes obtidas no Capítulo 2. Para as condições (3) usamos resultados de regularidade escondida e de problemas de valor de contorno obtidos no Capítulo 1. A unicidade é feita para um caso particular em que as não linearidades são localmente Lipschitizianas, por meio de um método devido a Visik e Ladyzenscaja (ver [12]).

No Capítulo 4, faremos o comportamento assintótico da solução do sistema, quando $t \to \infty$, pelo método da pertubação de energia, e verificamos que seu decaimento é de ordem exponencial.

Para finalizar o trabalho, escrevemos como apêndice o resultado existência e prolongamento de soluções aproximadas, que é parte essencial na obtenção da solução forte.

Capítulo 1

Notações e Resultados

Neste capítulo fixaremos algumas notações e daremos definições e resultados essenciais à continuidade do trabalho.

1.1 Espaços Funcionais

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e uma função contínua $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, define-se suporte de f, e denota-se por supp(f), o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega;\ f(x) \neq 0\}$. Assim, supp$(f)$ é um subconjunto fechado de Ω.

Uma n-upla de inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ é denominada de multi-índice e sua ordem é definida por $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Representa-se por D^α o operador de derivação de ordem $|\alpha|$, isto é,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, 0, ..., 0)$, define-se $D^0 u = u$, para toda função u.

Por $C_0^\infty(\Omega)$ denota-se o espaço vetorial, com as operações usuais, das funções infinitamente diferenciáveis definidas e com suporte compacto em Ω.

Um exemplo clássico de uma função de $C_0^\infty(\Omega)$ é dado por

Exemplo 1.1 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto tal que* $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| < 1\} \subset \Omega$.

Consideremos $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, *tal que*

$$f(x) = \left| \begin{array}{ll} e^{\frac{1}{\|x\|^2 - 1}}, & se \;\; \|x\| < 1 \\ 0, & se \;\; \|x\| \geq 1 \end{array} \right. ,$$

onde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *e* $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ *é a norma euclidiana de* x. *Temos que* $f \in C^\infty(\Omega)$ *e* $supp(f) = \overline{B_1(0)}$ *é compacto, isto é* $f \in C_0^\infty(\Omega)$.

Definição 1.1 *Diz-se que uma sequência* $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *em* $C_0^\infty(\Omega)$ *converge para* φ *em* $C_0^\infty(\Omega)$, *quando forem satisfeitas as seguintes condições:*

(i) Existe um compacto K de Ω tal que $\text{supp}(\varphi) \subset K$ e $\text{supp}(\varphi_n) \subset K$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

(ii) $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ uniformemente em K, para todo multi-índice α.

Observação 1.1 *É possível (ver [27]) dotar* $C_0^\infty(\Omega)$ *com uma topologia de forma que a noção de convergência nessa topologia coincida com a dada pela Definição 1.1.*

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido da noção de convergência acima definida será denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado de Espaço das Funções Testes sobre Ω.

Uma distribuição (escalar) sobre Ω é um funcional linear contínuo sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. Mais precisamente, uma distribuição sobre Ω é um funcional $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall\, \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

(ii) T é contínua, isto é, se $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $(T(\varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$.

É comum denotar o valor da distribuição T em φ por $\langle T, \varphi \rangle$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω com as operações usuais é um espaço vetorial, o qual representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Os seguintes exemplos de distribuições escalares desempenham um papel fundamental na teoria.

Exemplo 1.2 *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. *O funcional* $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, *definido por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

é uma distribuição sobre Ω *univocamente determinada por* u *(ver [21]). Por esta razão, identifica-se* u *à distribuição* T_u *por ela definida e, desta forma,* $L^1_{loc}(\Omega)$ *será identificado a uma parte (própria) de* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemplo 1.3 *Consideremos* $0 \in \Omega$ *e o funcional* $\delta_0 : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, *definido por*

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

δ_0 *é uma distribuição sobre* Ω *(ver [21]). Além disso, mostra-se que* δ_0 *não é definido por uma função de* $L^1_{loc}(\Omega)$, *isto é, não existe* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que* $\langle \delta_0, \varphi \rangle = \int f\varphi$.

Definição 1.2 *Diz-se que uma sequência* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *converge para* T *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$, *quando a sequência numérica* $(\langle T_n, \varphi \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergir para* $\langle T, \varphi \rangle$ *em* $\mathbb{R}$, *para toda* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 1.3 *Sejam* T *uma distribuição sobre* Ω *e* α *um multi-índice. A derivada* $D^\alpha T$ *(no sentido das distribuições) de ordem* $|\alpha|$ *de* T *é o funcional definido em* $\mathcal{D}(\Omega)$ *por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observação 1.2 *Decorre da Definição 1.3 que cada distribuição* T *sobre* Ω *possui derivadas de todas as ordens.*

Observação 1.3 $D^\alpha T$ *é uma distribuição sobre* Ω, *onde* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. *De fato, vê-se facilmente que* $D^\alpha T$ *é linear. Agora, para a continuidade, consideremos* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergindo para* φ *em* $\mathcal{D}(\Omega)$. *Assim,* $|\langle D^\alpha T, \varphi_n \rangle - \langle D^\alpha T, \varphi \rangle| \leq |\langle T, D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi \rangle| \to 0$, *quando* $n \to \infty$.

Observação 1.4 *A aplicação* $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ *tal que* $T \mapsto D^\alpha T$ *é linear e contínua no sentido da convergência definida em* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *(ver [22]).*

Dado um número inteiro $m > 0$, por $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, representa-se o espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω, isto é, o espaço vetorial das (classes de) funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α, com $|\alpha| \leq m$.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ quando } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} ess \, |D^\alpha u(x)|, \text{ quando } p = \infty,$$

é um espaço de Banach (vide [22]).

Observação 1.5 *Quando $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H^m(\Omega)$, o qual munido do produto interno*

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) \, D^\alpha v(x) \, dx$$

é um espaço de Hilbert.

Denotamos por V no nosso trabalho o subespaço de $H^1(0, L)$ definido por

$$V = \left\{ u \in H^1(0, L); \quad u(0) = 0 \right\}.$$

A norma do gradiente e a norma do $H^1(0, L)$ são equivalentes em V. Assim, consideraremos V munido do produto interno e norma dados respectivamente por

$$((u, v)) = (u_x, v_x), \qquad \|u\|^2 = |u_x|^2,$$

onde $(\cdot, \cdot)$ e $|\cdot|$ denotam, respectivamente, o produto interno e a norma em $L^2(0, L)$.

Dado um espaço de Banach X, denotaremos por $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço de Banach das (classes de) funções u, definidas em $]0, T[$ com valores em X, que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X^p$ é integrável a Lebesgue em $]0, T[$, com a norma

$$\|u(t)\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por $L^{\infty}(0,T;X)$ representa-se o espaço de Banach das (classes de) funções u, definidas em $]0,T[$ com valores em X, que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X$ possui supremo essencial finito em $]0,T[$, com a norma

$$\|u(t)\|_{L^{\infty}(0,T;X)} = \sup_{t\in]0,T[} ess \, \|u(t)\|_X .$$

Observação 1.6 *Quando $p=2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por*

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X \, dt.$$

Se X é separável, então podemos identificar

$$[L^p(0,T;X)]' \approx L^q(0,T;X'),$$

onde $(1/p)+(1/q)=1$. Quando $p=1$, faremos a identificação

$$\left[L^1(0,T;X)\right]' \approx L^{\infty}(0,T;X').$$

Essas identificações encontram-se detalhadas em [13].

O espaço vetorial das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X é denominado de Espaço das Distribuições Vetoriais sobre $]0,T[$ com valores em X e denotado por $\mathcal{D}'(0,T;X)$.

Definição 1.4 *Dada $S \in \mathcal{D}'(0,T;X)$, define-se a derivada de ordem n como sendo a distribuição vetorial sobre $]0,T[$ com valores em X dada por*

$$\left\langle \frac{d^n S}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle S, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Exemplo 1.4 *Dadas $u \in L^p(0,T;X)$, $1 \le p < \infty$, e $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$ a aplicação $T_u : \mathcal{D}(0,T) \to X$, definida por*

$$T_u(\varphi) = \int_0^T u(t)\varphi(t)\,dt,$$

integral de Bochner em X, é linear e contínua no sentido da convergência de $\mathcal{D}(0,T)$, logo uma distribuição vetorial. A aplicação $u \mapsto T_u$ é injetiva, de modo que podemos identificar u com T_u e, neste sentido, temos $L^p(0,T;X) \subset \mathcal{D}'(0,T;X)$.

Consideremos o espaço

$$W^{m,p}(0,T;X) = \left\{u \in L^p(0,T;X);\ u^{(j)} \in L^p(0,T;X),\ j = 1,...,m\right\},$$

onde $u^{(j)}$ representa a j-ésima derivada de u no sentido das distribuições vetoriais. Equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(0,T;X)} = \left(\sum_{j=0}^{m} \left\|u^{(j)}\right\|_{L^p(0,T;X)}^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

$W^{m,p}(0,T;X)$ é um espaço de Banach (vide [1]).

Observação 1.7 *Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $W^{m,p}(0,T;X)$ será denotado por $H^m(0,T;X)$, que munido do produto interno*

$$(u,v)_{H^m(0,T;X)} = \sum_{j=0}^{m} \left(u^{(j)}, v^{(j)}\right)_{L^2(0,T;X)}$$

é um espaço de Hilbert. Denota-se por $H_0^m(0,T;X)$ o fecho, em $H^m(0,T;X)$, de $\mathcal{D}(0,T;X)$ e por $H^{-m}(0,T;X)$ o dual topológico de $H_0^m(0,T;X)$.

1.2 Principais Resultados Utilizados

Lema 1.1 (Imersão de Sobolev) *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular.*

(i) Se $n > pm$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, onde $q \in \left[1, \dfrac{np}{n-mp}\right]$.

(ii) Se $n = pm$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, onde $q \in [1,+\infty)$.

(iii) Se $n = 1$ e $m \geq 1$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Prova: Ver [5].

Lema 1.2 (Rellich-Kondrachov) *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular.*

(i) Se $n > pm$, então $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, onde $q \in \left[1, \dfrac{2n}{n-2m}\right)$.

(ii) Se $n = pm$, então $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, onde $q \in [1, +\infty)$.

(iii) Se $pm > n$ então $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^k\left(\overline{\Omega}\right)$, onde k é um inteiro não negativo tal que $k < m - (n/p) \leq k + 1$

Prova: Ver [5].

Teorema 1.1 (Teorema do Traço) *A aplicação linear*

$$u \longmapsto (\gamma_0 u, \gamma_1 u, ..., \gamma_{m-1} u) = \left(u|_\Gamma, \left.\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\right|_\Gamma, ..., \left.\frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu_A^{m-1}}\right|_\Gamma \right)$$

de $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$ *em* $\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$, *prolonga-se, por continuidade, a uma aplicação linear, contínua e sobrejetiva de* $W^{m,p}(\Omega)$ *em* $\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$.

Prova: Ver [13].

Observação 1.8 *Note que para o caso unidimensional, isto é,* $\Omega = (\alpha, \beta)$, *se* $u \in H^m(\alpha, \beta)$, *então pelo Lema 1.2,* $u \in C^{m-1}([\alpha, \beta])$. *Logo faz sentido definir a função* u *e suas derivadas na fronteira, que no caso será* $\Gamma = \{\alpha, \beta\}$.

Agora, enunciaremos um teorema de traço não muito usado na literatura, por isso seremos fiéis a demonstração feita em [24].

Teorema 1.2 (Teorema do Traço) *Sejam* p *e* p' *números reais tais que*

$$p = 2 \text{ se } n = 1, 2, 3 \quad e \quad p > \frac{n}{2} \text{ se } n \geq 4 \quad com \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Então a aplicação

$$u \longmapsto (\gamma_0 u, \gamma_1 u) = \left(u|_\Gamma, \left.\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\right|_\Gamma \right)$$

de $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$ *em* $W^{\frac{1}{p}-1,p'}(\Gamma) \times W^{\frac{1}{p}-2,p'}(\Gamma)$, *prolonga-se, por continuidade, a uma aplicação linear, contínua e sobrejetiva de* $E = \left\{ v \in L^{p'}(\Omega);\ \Delta v \in L^1(\Omega) \right\}$ *em* $W^{\frac{1}{p}-1,p'}(\Gamma) \times W^{\frac{1}{p}-2,p'}(\Gamma)$.

Prova: Usaremos a seguinte notação: $X = W^{2-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$ e $Y = W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$, fazendo $Z = X \times Y$. Pelo teorema 1.1 para cada $(\xi, \eta) \in Z$, existe uma função $w \in W^{2,\,p}(\Omega)$ tal que $\gamma_0 w = \xi$ e $\gamma_1 w = \eta$. Pelas hipóteses sobre p, temos que $W^{2,\,p}(\Omega)$ é imerso continuamente em $C\left(\overline{\Omega}\right)$. Para cada $v \in E$, definiremos o funcional T_v em Z por

$$T_v\left((\xi, \eta)\right) = (v, \Delta w) - (\Delta v, w)\,,$$

que claramente está bem definido. Temos também

$$\left|T_v\left((\xi, \eta)\right)\right| \leq C\left(\|v\|_{L^{p'}(\Omega)} + \|\Delta v\|_{L^1(\Omega)}\right) \cdot \left(\|\xi\|_X + \|\eta\|_Y\right) = C\,\|v\|_E\,\|(\xi, \eta)\|_Z\,.$$

Então

$$T_v \in Z' \text{ e } \|T_v\|_{Z'} \leq C\,\|v\|_E\,. \tag{1.1}$$

Seja $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$. Pela definição de T_v e pela fórmula de Green, obtemos

$$T_\varphi\left((\xi, \eta)\right) = \langle \gamma_0 \varphi, \eta \rangle - \langle \gamma_1 \varphi, \xi \rangle = \langle \left(-\gamma_1 \varphi, \gamma_0 \varphi\right), (\xi, \eta) \rangle\,. \tag{1.2}$$

Por (1.1) e (1.2) podemos estabelecer uma aplicação $\sigma : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to X' \times Y'$ dada por

$$\sigma\left(\varphi\right) = \left(-\gamma_1 \varphi, \gamma_0 \varphi\right),$$

linear e contínua, onde $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ está equipado com a topologia induzida de E.

Consideremos a aplicação $\tau : Z' \to Z'$ dada por

$$\tau\left(\left(-\gamma_1 \varphi, \gamma_0 \varphi\right)\right) = \left(\gamma_0 v, \gamma_1 v\right).$$

Como $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em E (ver [24], Lema 3.1), a extensão $\gamma = \tau \circ \sigma : E \to Z'$ satisfaz as condições da proposição, como queríamos demonstrar.

Teorema 1.3 (Banach-Alaoglu-Bourbaki) *Seja E um espaço de Banach. O conjunto $\boldsymbol{B}_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\}$ é compacto com respeito a topologia fraca * $\sigma\left(E', E\right)$.*

Prova: Ver [5].

Lema 1.3 (Lema de Lions) *Sejam $\mathcal{O}$ um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$, $(g_m)_m$ e g funções de $L^q(\mathcal{O})$, $1 < q < \infty$, tais que:*

$$\|g_m\|_{L^q(\mathcal{O})} \leq C \text{ e } g_m \to g \text{ q.s. em } \mathcal{O}.$$

Então $g_m \to g$ fracamente em $L^q(\mathcal{O})$.

Prova: Ver [12].

Lema 1.4 (Desigualdade de Gronwall) *Seja $z(t)$ uma função real absolutamente contínua em $[0, a[$ tal que para todo $t \in [0, a[$ tem-se*

$$z(t) = C + \int_0^t z(s)\, ds.$$

Então $z(t) \leq Ce^t$, $\forall\, t \in [0, a[$.

Prova: Ver [21].

Teorema 1.4 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja (f_n) uma sequência de funções de $L^1(\Omega)$. Suponha que*

a) $f_n(x) \to f(x)$ quase sempre em (Ω),

b) Existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que para todo n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.s em Ω.

Então $f \in L^1(\Omega)$ e $\|f_n - f\|_{L^1} = 0$.

Prova: Ver [5].

Lema 1.5 (Lema de Fatou) *Seja (f_n) uma sequência de funções de $L^1(\Omega)$ tal que*

a) para todo n, $f_n(x) \geq 0$ quase sempre em Ω,

b) $\sup_n \int f_n < \infty$.

Para todo $x \in \Omega$ temos $f(x) = \lim_{n\to\infty} \inf f_n(x)$. Então $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\int f \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int f_n.$$

Prova: Ver [5].

Teorema 1.5 (W. A. Strauss [28]) *Seja* Ω *um aberto limitado do* $\mathbb{R}^n$, $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções reais mensuráveis em* Ω. *Vamos considerar a sequência* $(F_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, $(G_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ *funções de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$ *tal que* $F_\nu \circ u_\nu$, $G_\nu \circ u_\nu$ *são mensuráveis em* Ω *para* $\nu \in \mathbb{N}$. *Suponha*

a) $F_\nu \circ u_\nu$ *converge para* u *quase sempre em* Ω,

b) $\int_\Omega |F_\nu (u_\nu (x)) G_\nu (u_\nu (x))| \, dx < C$, *onde* C *é constante independente de* $\nu \in \mathbb{N}$,

c) $G_\nu \to \infty$ *então* $F_\nu \to \infty$.

Então, temos

d) $u \in L^1 (\Omega)$,

e) $F_\nu \circ u_\nu$ *converge para* u *fortemente em* $L^1 (\Omega)$.

Prova: Ver [19, Teorema 4, pag. 30].

Lema 1.6 *Seja* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *contínua e* $sF(s) \geq 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$. *Então existe uma sequência* $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *tal que* $sF_k(s) \geq 0$ *e*

a) $|F_k (\xi) - F_k (\eta)| \leq c_k |\xi - \eta|, \forall\ \xi, \eta \in \mathbb{R}$ *(i,e Lipschitz)*,

b) $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente para* F *em limitado de* $\mathbb{R}$.

Prova: Ver [19, Lema 5, pag. 40].

Lema 1.7 (Du Bois Raymond) *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Então*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

se,e somente se, $u = 0$ *quase sempre em* Ω.

Prova: Ver [22].

Teorema 1.6 (Teorema da Aplicação Aberta) *Sejam* E *e* F *dois espaços de Banach e seja* T *um operador linear continuo e bijetivo de* E *em* F. *Então existe uma constante* $c > 0$ *tal que*

$$B_F(0, c) \subset T(B_E(0, 1)).$$

Prova: Ver [5].

Lema 1.8 (Lax-Milgram) *Seja H um espaço de Banach e $a(u,\ v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Para toda $\varphi \in H'$ existe um único $u \in H$ tal que*

$$a(u,\ v) = \langle \varphi,\ v \rangle\,,\ \textit{para toda } v \in H$$

Além disso, se a é simétrica, u se caracteriza pela propriedade

$$u \in H \ e\ \frac{1}{2}a(u,\ u) - \langle \varphi,\ u \rangle = \underset{v \in H}{Min}\left\{ \frac{1}{2}a(v,\ v) - \langle \varphi,\ v \rangle \right\}.$$

Prova: Ver [5].

Vamos agora estabelecer alguns resultados de regularidade elíptica essenciais ao nosso trabalho.

Proposição 1.1 *Dada $f \in L^2(0, L)$, existe uma única solução u do problema*

$$\left|\begin{array}{l} -u_{xx} = f \ \ em\ \ (0, L) \\ u(0) = 0 \\ u_x(L) = 0 \end{array}\right.$$

tal que $u \in V \cap H^2(0, L)$ e, além disso, existe $C > 0$ tal que $\|u\|_{H^2(0,L)} \leq C|f|$.

Prova: Consideremos a forma bilinear $((\cdot, \cdot))$ e a forma linear $\Gamma : V \to \mathbb{R}$ definida por $\langle \Gamma, v \rangle = (f, v)$.

Observemos que

- $((\cdot, \cdot))$ é contínua, pois $((u, v)) \leq \|u\| \cdot \|v\|$,
- $((\cdot, \cdot))$ é coerciva. De fato, $((u, u)) \geq \|v\|^2 \geq \frac{1}{L^2}|v|^2$, onde $L > 0$ é constante tal que $|\cdot| \leq L\|\cdot\|$,
- Γ é continua. Com efeito, $|\langle \Gamma, v \rangle| = |(f, v)| < |f| \cdot |v| \leq L|f| \cdot \|v\|$ e como $f \in L^2(0, L)$, temos $|\langle L, v \rangle| \leq C\|v\|$.

Assim, usando o Lema 1.8 existe uma única função $u \in V$ satisfazendo

$$((u,v)) = \langle \Gamma, v\rangle = (f,v)\,,\ \forall v \in V. \tag{1.3}$$

Usando integração por partes, obtemos por (1.3),

$$(-u_{xx}, v) + u_x\,(L)\,v\,(L) = (f,v),\ \forall v \in V. \tag{1.4}$$

Como $\mathcal{D}(0,L) \subset V$, temos

$$(-u_{xx}, v) + u_x\,(L)\,v\,(L) = (f,v),\ \forall v \in \mathcal{D}(0,L).$$

Logo,

$$(-u_{xx}, v) = (f,v),\ \forall v \in \mathcal{D}(0,L),$$

ou seja,

$$(-u_{xx} - f, v) = 0,\ \forall v \in \mathcal{D}(0,L),$$

o que implica

$$-u_{xx} = f \text{ em } \mathcal{D}'(0,L).$$

Como $f \in L^2\,(0,L)$, temos que $u \in H^2(0,L)$ e

$$-u_{xx} = f \text{ em } L^2\,(0,L)\,,$$

o que segue

$$-u_{xx} = f \text{ q.s em } (0,L)\,. \tag{1.5}$$

Agora por (1.4) e (1.5), obtemos

$$u_x\,(L)\,v\,(L) = 0,\ \forall v \in V,$$

isto é, $u_x\,(L) = 0$.

Como o operador $\dfrac{\partial}{\partial x^2} : V \cap H^2(0,L) \to L^2(0,L)$ é linear, contínuo e bijetivo, segue do Teorema 1.6 que $\|u\|_{H^2} \leq C\,|-u_{xx}| = C\,|f|\,.$ ■

Proposição 1.2 *Dados $f \in L^2(0,L)$ e $\beta \in \mathbb{R}$, existe uma única solução u do problema de valor de fronteira*

$$\left| \begin{array}{l} -u_{xx} = f \ \text{ em } \ (0,L), \\ u(0) = 0, \\ u_x(L) = \beta, \end{array} \right. \tag{1.6}$$

pertecente a $V \cap H^2(0,L)$. Além disso, existe $C > 0$, tal que $\|u\|_{H^2(0,L)} \leq C\left[|f| + |\beta|\right]$.

Prova: Consideremos a função $h : [0,L] \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = \beta x$. Temos

$$\|h\|^2_{H^2(0,L)} = |h|^2_{L^2(0,L)} + |h_x|^2_{L^2(0,L)} + |h_{xx}|^2_{L^2(0,L)} = \frac{\beta^2 L^3}{3} + \beta^2 L,$$

ou seja,

$$\|h\|_{H^2(0,L)} = C_1 |\beta|, \tag{1.7}$$

onde $C_1 = \sqrt{(L^3/3) + L}$.

Seja w solução do seguinte problema de valores de fronteira

$$\left| \begin{array}{l} -w_{xx} = f \ \text{ em } \ (0,L), \\ w(0) = 0, \\ w_x(L) = 0. \end{array} \right.$$

Como $f \in L^2(0,L)$, pela Proposição 1.1 temos a existência de w, com $w \in V \cap H^2(0,L)$ e constante $C_2 > 0$ tal que

$$\|w\|_{H^2(0,L)} \leq C_2 |f|. \tag{1.8}$$

Tomemos $u = w + h$. Assim $u \in V \cap H^2(0,L)$ é solução de (1.6). Por (1.7) e (1.8) segue

$$\|u\|_{H^2(0,L)} = \|w+h\|_{H^2(0,L)} \leq \|w\|_{H^2(0,L)} + \|h\|_{H^2(0,L)} \leq C_2|f| + C_1|\beta| \leq C_3(|f| + |\beta|) \tag{1.9}$$

onde $C_3 > 0$ é tal que $C_3 \geq C_1 + C_2$. ■

Mostraremos agora a existência e unicidade de solução para o problema

$$\left| \begin{array}{l} -u_{xx} = f \ \text{ em } \ (0,L), \ \text{ com } f \in L^1(0,L), \\ u(0) = 0, \\ u_x(L) = 0. \end{array} \right. \tag{1.10}$$

Formalmente, obtemos de $(1.10)_1$ que

$$\begin{aligned}
&\int_0^L (-u_{xx})\, v dx = \int_0^L u(-v_{xx})dx + u_x(0)\, v(0) - u_x(L)\, v(L) \\
&+u(L)\, v_x(L) - u(0)\, v_x(0) = \int_0^L f v dx
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Tomando em (1.11) $v \in D = \{\varphi \in V \cap H^2(0,L)\,;\ \varphi_x(L) = 0\}$, obtemos

$$\int_0^L u(-v_{xx})dx = \int_0^L f v dx,\ \forall v \in D. \tag{1.12}$$

Adotaremos (1.12) como definição de solução de (1.10). Para garantir a existência e unicidade de soluções de(1.10) consideraremos o seguinte resultado:

Proposição 1.3 *Se $f \in L^1(0,L)$, então existe uma única função $u \in L^2(0,L)$ satisfazendo (1.12). A aplicação $T : L^1(0,L) \to L^2(0,L)$ tal que $Tf = u$ é linear, contínua e $-u_{xx} = f$.*

Prova: Seja $g \in L^2(0,L)$ e v a solução do problema

$$\left|\begin{array}{l}
-v_{xx} = g \text{ em } (0,L), \\
v(0) = 0, \\
v_x(L) = 0.
\end{array}\right. \tag{1.13}$$

Pela Proposição 1.1, temos $v \in D$.

Vamos considerar a aplicação $S : L^2(0,L) \to C^0([0,L])$ tal que $Sg = v$, onde v é solução de (1.13).

Afirmação: S é linear e contínua. A linearidade de S é de fácil verificação. Quanto a continuidade, como $Sg = v$, $v \in D$ e $H^2(0,L)$ está imerso continuamente em $C^0([0,L])$, temos

$$\|Sg\|_{C^0([0,L])} \leq C\, \|Sg\|_{H^2(0,L)} = C\, \|v\|_{H^2(0,L).}$$

Pela Proposição 1.1, temos a existência de uma constante $C > 0$ tal que $\|v\|_{H^2(0,L)} \leq C\, \|g\|_{L^2(0,L)}$. Logo

$$\|Sg\|_{C^0([0,L])} \leq C\, \|g\|_{L^2(0,L),}$$

onde $C > 0$ depende somente de $(0,L)$, o que mostra a continuidade de S.

Seja S^* a transposta de S, tal que

$$S^* : \left[C^0 \left([0, L]\right)\right]' \to L^2 \left(0, L\right); \;\; \langle S^* \theta, \phi \rangle = \langle \theta, S\phi \rangle \,,$$

para toda $\phi \in L^2 \left(\, 0, L\right)$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa diferentes pares de dualidades.

A função $u = S^* f$ satisfaz (1.12). De fato, temos $\langle S^* f, g \rangle = \langle f, Sg \rangle$, o que implica

$$\int_0^L u(-v_{xx}) dx = \int_0^L fv dx.$$

Para a unicidade, seja u_1, $u_2 \in L^2 \left(0, L\right)$ satisfazendo (1.12). Então

$$\int_0^L \left(u_1 - u_2\right) \left(-v_{xx}\right) dx = 0, \;\; \forall v \in D. \tag{1.14}$$

Considerando $g \in L^2 \left(0, L\right)$ e v solução de (1.13), temos por (1.14)

$$\int_0^L \left(u_1 - u_2\right) g dx = 0, \;\; \forall g \in L^2 \left(0, L\right).$$

Logo, pelo Lema 1.7 $u_1 = u_2$, o que prova a unicidade. Fazendo $T = S^*$ e sabendo que é linear e contínua, temos T com as mesmas propriedades e o resultado segue. ■

Proposição 1.4 *Se $f \in L^1 \left(0, L\right)$ e $\beta \in \mathbb{R}$, então existe uma única solução $u \in L^2(0, L)$ satisfazendo*

$$\left| \begin{array}{l} -u_{xx} = f \;\; em \;\; \left(0, L\right), \\ u \left(0\right) = 0, \\ u_x \left(L\right) = \beta. \end{array} \right. \tag{1.15}$$

Prova: Consideremos a função $\xi : [0, L] \to \mathbb{R}$, definida por $\xi(x) = \beta x$. Seja w a solução do problema

$$\left| \begin{array}{l} -w_{xx} = f \text{ em } \left(0, L\right), \\ w \left(0\right) = 0, \\ w_x \left(L\right) = 0. \end{array} \right.$$

Como $f \in L^1 \left(0, L\right)$, pela Proposição (1.3) temos $w \in L^2 \left(0, L\right)$. Tomando $u = w + \xi$, temos $u \in L^2 \left(0, L\right)$, solução de (1.15).

Para a unicidade, sejam u_1 e u_2 soluções de (1.15). Então $v = u_1 - u_2$ é solução de

$$\left| \begin{array}{l} -v_{xx} = 0 \text{ em } (0, L), \\ v(0) = 0, \\ v_x(L) = 0. \end{array} \right.$$

Logo, pela Proposição 1.3, temos $v = 0$, o que implica que $u_1 = u_2$. ■

Proposição 1.5 *Em $V \cap H^2(0, L)$ a norma do $H^2(0, L)$ e a norma*

$$u \mapsto \left[|-u_{xx}|^2 + |u_x(L)|^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

são equivalentes.

Prova: Seja $u \in V \cap H^2(0, L)$. Então $-u_{xx} \in L^2(0, L)$ e $u_x(L) \in \mathbb{R}$. Assim, pela Proposição 1.2

$$\|u\|_{H^2(0,L)} \leq C \left[|-u_{xx}|^2 + |u_x(L)|^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Por outro lado, temos

$$|u_x(L)| \leq \sup_{x \in [0,L]} |u_x| \leq \|u\|_{C^1([0,L])} \leq C \|u\|_{H^2(0,L)}, \tag{1.16}$$

onde $C > 0$ é a constante de imersão de $H^2(0, L)$ em $C^1([0, L])$. Como $u \in V \cap H^2(0, L)$, temos também

$$|-u_{xx}|^2 \leq C \|u\|_{H^2(0,L)}.$$

Logo

$$\left(|-u_{xx}|^2 + |u_x(L)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \|u\|_{H^2(0,L)},$$

onde C é uma constante positiva. ■

Proposição 1.6 *Sejam $u^0 \in V \cap H^2(0, L)$, $u^1 \in V$ e $u^0_x(L) + u^1(L) = 0$. Então, para cada $\epsilon > 0$, existem $w^{(1)}$ e $z^{(1)}$ pertencentes a $V \cap H^2(0, L)$, tais que*

$$\left\| w^{(1)} - u^0 \right\|_{V \cap H^2(0,L)} < \epsilon \quad e \quad \left\| z^{(1)} - u^1 \right\|_V < \epsilon,$$

com $w^{(1)}_x(L) + z^{(1)}(L) = 0$.

Prova: Como $V \cap H^2(0,L)$ é denso em V, para cada $\epsilon > 0$ existe $z^{(1)} \in V \cap H^2(0,L)$ tal que $\left\| z^{(1)} - u^1 \right\|_V < \epsilon$.

Consideremos o problema

$$\left| \begin{array}{l} -w^{(1)}_{xx} = -u^0_{xx} \text{ em } (0,L), \\ w^{(1)}(0) = 0, \\ w^{(1)}_x(L) = -z^{(1)}(L). \end{array} \right.$$

Pelas Proposições 1.2 e 1.5, segue que $w^{(1)} \in V \cap H^2(0,L)$ e

$$\begin{array}{l} \left\| w^{(1)} - u^0 \right\|^2_{V \cap H^2(0,L)} = \left| -w^{(1)}_{xx} + u^0_{xx} \right|^2 + \left| w^{(1)}_x(L) - u^0_x(L) \right|^2 = \left| -z^{(1)}(L) + u^1(L) \right|^2 \\ \leq C \left\| z^{(1)} - u^1 \right\|^2_V < C\epsilon^2. \quad \blacksquare \end{array}$$

Proposição 1.7 *Sejam* $u^0,\ v^0 \in V \cap H^2(0,L),\ v^1 \in V$ *e* $u^0(L) + v^0_x(L) + v^1(L) = 0$. *Para cada* $\epsilon > 0$, *existem* $w^{(2)}$ *e* $z^{(2)}$ *pertencentes a* $V \cap H^2(0,L)$ *tais que*

$$\left\| w^{(2)} - v^0 \right\|_{V \cap H^2(0,L)} < \epsilon \quad e \quad \left\| z^{(2)} - v^1 \right\|_V < \epsilon,$$

com $u^0(L) + w^{(2)}_x(L) + z^{(2)}(L) = 0$.

Prova: Como $V \cap H^2(0,L)$ é denso em V, para cada $\epsilon > 0$, existe $z^{(2)} \in V \cap H^2(0,L)$ tal que $\left\| z^{(2)} - v^1 \right\|_V < \epsilon$.

Consideremos o problema:

$$\left| \begin{array}{l} -w^{(2)}_{xx} = -v^0_{xx} \text{ em } (0,L), \\ w^{(2)}(0) = 0, \\ w^{(2)}_x(L) = -u^0(L) - z^{(2)}(L). \end{array} \right.$$

Pelas Proposições 1.2 e 1.5, segue que $w^{(2)} \in V \cap H^2(0,L)$ e

$$\begin{array}{l} \left\| w^{(2)} - v^0 \right\|^2_{V \cap H^2(0,L)} = \left| -w^{(2)}_{xx} + v^0_{xx} \right|^2 + \left| w^{(2)}_x(L) - v^0_x(L) \right|^2 \\ = \left| -u^0(L) - z^{(2)}(L) - (-u^0(L) - v^1(L)) \right|^2 = \left| -z^{(2)}(L) + v^1(L) \right|^2 \\ \leq C \left\| z^{(2)} - v^1 \right\|^2_V = C\epsilon^2. \quad \blacksquare \end{array}$$

Capítulo 2

Solução Forte

Nosso objetivo neste capítulo é provar a existência e unicidade de soluções para o problema $(2)-(4)$, quando u^0, v^0, u^1 e v^1 são dados suficientemente regulares. Usaremos para isso o método de Faedo-Galerkin.

Sejam Q como na introdução, a, b funções definidas em Q, u^0, v^0, u^1, v^1 funções definidas em $(0, L)$ e f, g funções definidas em $\mathbb{R}$ satisfazendo

$$\begin{aligned}&f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ funções Lipschitzianas com constantes } c_f \text{ e } c_g, \text{ respectivamente,}\\ &\text{e } sf(s) \geq 0,\ sg(s) \geq 0,\ \forall s \in \mathbb{R},\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\left(u^0, u^1\right) \in \left[V \cap H^2(0, L)\right] \times V, \tag{2.2}$$

$$\left(v^0, v^1\right) \in \left[V \cap H^2(0, L)\right] \times V, \tag{2.3}$$

$$u_x^0(L) + u^1(L) = 0, \tag{2.4}$$

$$u^0(L) + v_x^0(L) + v^1(L) = 0, \tag{2.5}$$

e

$$a, b \in H^1\left(0, T, L^2(0, L)\right). \tag{2.6}$$

Teorema 2.1 *Sejam f, g, u^0, v^0, u^1, v^1, a e b satisfazendo as hipóteses* $(2.1)-(2.6)$. *Então existem únicas funções $u, v : Q \rightarrow \mathbb{R}$, tais que*

$$u, v \in L^\infty(0, T, V) \cap L^2\left(0, T, H^2(0, L)\right), \tag{2.7}$$

$$u_t, v_t \in L^\infty(0,T,V), \tag{2.8}$$

$$u_{tt}, v_{tt} \in L^2(Q), \tag{2.9}$$

$$\frac{\rho h^3}{12} u_{tt} - u_{xx} + K(u + v_x) + f(u) = a \ \ em \ L^2(Q), \tag{2.10}$$

$$\rho h v_{tt} - K(u + v_x)_x + g(v) = b \ \ em \ L^2(Q), \tag{2.11}$$

$$u_x(L,\cdot) + u_t(L,\cdot) = 0 \ \ em \ \ (0,T), \tag{2.12}$$

$$u(L,\cdot) + v_x(L,\cdot) + v_t(L,\cdot) = 0 \ \ em \ \ (0,T), \tag{2.13}$$

$$u(0) = u^0, \ u_t(0) = u^1, \ v(0) = v^0, \ v_t(0) = v^1 \ \ em \ \ (0,L). \tag{2.14}$$

Prova. Para a existência de solução forte, usaremos o método de Faedo-Galerkin com uma base especial em $V \cap H^2(0,L)$. Esse método consiste em três etapas. Na primeira etapa, encontraremos soluções aproximadas em um espaço de dimensão finita. Na segunda etapa, faremos estimativas para essa solução aproximada e na terceira etapa faremos a passagem ao limite.

- **Existência.**

Soluções Aproximadas.

Primeiramente contruiremos uma base adequada para as soluções aproximadas.

Como os dados u^0, $v^0 \in V \cap H^2(0,L)$ e u^1, $v^1 \in V$, satisfazem (2.4) e (2.5), segue pelas Proposições 1.6 e 1.7 a existência de quatro sequências $(u^{0k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(u^{1k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(v^{0k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $(v^{1k})_{k\in\mathbb{N}}$ de vetores em $V \cap H^2(0,L)$ tais que

$$u^{0k} \to u^0 \text{ fortemente em } V \cap H^2(0,L), \tag{2.15}$$

$$v^{0k} \to v^0 \text{ fortemente em } V \cap H^2(0,L), \tag{2.16}$$

$$u^{1k} \to u^1 \text{ fortemente em } V, \tag{2.17}$$

$$v^{1k} \to v^1 \text{ fortemente em } V, \tag{2.18}$$

$$u_x^{0k}(L) + u^{1k}(L) = 0, \ \forall k \in \mathbb{N}, \tag{2.19}$$

$$u^{0k}(L)+v_x^{0k}(L)+v^{1k}(L)=0,\ \forall\ k\in\mathbb{N}. \tag{2.20}$$

Fixando $k\in\mathbb{N}$, para u^{0k},v^{0k},u^{1k} e v^{1k} linearmente independentes tomaremos

$$w_1^k=\frac{u^{0k}}{\|u^{0k}\|_{V\cap H^2(0,L)}},\ w_2^k=\frac{u^{1k}}{\|u^{1k}\|_{V\cap H^2(0,L)}},\ w_3^k=\frac{v^{1k}}{\|v^{1k}\|_{V\cap H^2(0,L)}}\text{ e }w_4^k=\frac{v^{0k}}{\|v^{0k}\|_{V\cap H^2(0,L)}}$$

como os quatro primeiros termos da base. Pelo processo de ortogonalização de Gram-Schimidt construíremos uma base em $V\cap H^2(0,L)$ representada por $\left\{w_1^k,w_2^k,w_3^k,w_4^k,...w_n^k,...\right\}$ para cada $k\in\mathbb{N}$.

Se para cada $k\in\mathbb{N}$ fixado, os vetores não forem linearmente independentes, é suficiente tomar o número máximo de vetores linearmente independentes dos quatro e continuar o processo. Agora, para cada $m\in\mathbb{N}$, consideramos $V_m^k=\left[w_1^k,w_2^k,w_3^k,w_4^k,...w_m^k\right]$ o subespaço de $V\cap H^2(0,L)$ gerado pelos m primeiros vetores da base obtida. Iremos então encontrar soluções aproximadas $u^{km},v^{km}\in V_m^k$ do tipo

$$u^{km}(x,t)=\sum_{j=1}^{m}\mu^{jkm}(t)\,w_j^k(x),$$

$$v^{km}(x,t)=\sum_{j=1}^{m}h^{jkm}(t)\,w_j^k(x),$$

onde $\mu^{jkm}(t)$ e $h^{jkm}(t)$ são soluções do problema inicial para o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{\rho h^3}{12}\left(u_{tt}^{km}(t),\psi\right)+\rho h\left(v_{tt}^{km}(t),\varphi\right)+K\left(\left(u^{km}+v_x^{km}\right)(t),\psi+\varphi_x\right)\\ +\left(\left(u^{km}(t),\psi\right)\right)+u_t^{km}(L,t)\,\psi(L,t)+v_t^{km}(L,t)\,\varphi(L,t)+\left(f(u^{km}(t)),\psi\right)\\ +\left(g(v^{km}(t)),\varphi\right)=(a(t),\psi)+(b(t),\varphi),\ \forall\psi,\varphi\in V_m^k,\\ u^{km}(0)=u^{0km}\rightarrow u^0\text{ fortemente em }V\cap H^2(0,L),\\ v^{km}(0)=v^{0km}\rightarrow v^0\text{ fortemente em }V\cap H^2(0,L),\\ u_t^{km}(0)=u^{1km}\rightarrow u^1\text{ fortemente em }V,\\ v_t^{km}(0)=v^{1km}\rightarrow v^1\text{ fortemnete em }V.\end{array}\right. \tag{2.21}$$

O sistema acima tem solução no intervalo $[0,t_{km}]$, com $t_{km}<T$ (ver Apêndice, Corolários A.1) e essa solução pode ser estendida a todo o intervalo $[0,T]$ como consequência das estimativas a priori que faremos a seguir.

Estimativas I. Fazendo $\psi = 2u_t^{km}(t)$ e $\varphi = 2v_t^{km}(t)$ em $(2.21)_1$ obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho h^3}{12} 2\left(u_{tt}^{km}(t), u_t^{km}(t)\right) + 2\rho h\left(v_{tt}^{km}(t), v_t^{km}(t)\right) + 2K\left(\left(u^{km} + v_x^{km}\right)(t), \left(\left(u^{km} + v_x^{km}\right)(t)\right)_t\right) \\
&+2\left(\left(u^{km}(t), u_t^{km}(t)\right)\right) + 2u_t^{km}(L,t)u_t^{km}(L,t) + 2v_t^{km}(L,t)v_t^{km}(L,t) + 2\left(f(u^{km}(t)), u_t^{km}(t)\right) \\
&+2\left(g(v^{km}(t)), v_t^{km}(t)\right) = 2\left(a(t), u_t^{km}(t)\right) + 2\left(b(t), v_t^{km}(t)\right),
\end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho h^3}{12}\frac{d}{dt}\left|u_t^{km}(t)\right|^2 + \rho h\frac{d}{dt}\left|v_t^{km}(t)\right|^2 + K\frac{d}{dt}\left|\left(u^{km} + v_x^{km}\right)(t)\right|^2 + \frac{d}{dt}\left\|u^{km}(t)\right\|^2 \\
&+2\frac{d}{dt}\int_0^L F(u^{km}(x,t))dx + 2\frac{d}{dt}\int_0^L G(v^{km}(x,t))dx + 2\left|u_t^{km}(L,t)\right|^2 + 2\left|v_t^{km}(L,t)\right|^2 \qquad (2.22) \\
&= 2\left(a(t), u_t^{km}(t)\right) + 2\left(b(t), v_t^{km}(t)\right),
\end{aligned}$$

onde $F(t) = \int_0^t f(s)ds$ e $G(t) = \int_0^t g(s)ds$.

Integrando (2.22) de 0 a $t \leq t_{km}$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho h^3}{12}\left|u_t^{km}(t)\right|^2 + \rho h\left|v_t^{km}(t)\right|^2 + K\left|(u^{km} + v_x^{km})(t)\right|^2 + \left\|u^{km}(t)\right\|^2 + 2\int_0^t \left|u_t^{km}(L,s)\right|^2 ds \\
&+2\int_0^t \left|v_t^{km}(L,s)\right|^2 ds + 2\int_0^L F(u^{km}(x,t))dx + 2\int_0^L G(v^{km}(x,t))dx = \frac{\rho h^3}{12}\left|u^{1km}\right|^2 \\
&+\rho h\left|v^{1km}\right|^2 + K\left|u^{0km} + v_x^{0km}\right|^2 + \left\|u^{0km}\right\|^2 + 2\int_0^L F(u^{0km})dx + 2\int_0^L G(v^{0km})dx \\
&+2\int_0^t \left(a(s), u_t^{km}(s)\right) ds + 2\int_0^t \left(b(s), v_t^{km}(s)\right) ds.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young, (2.6), $(2.21)_2$, $(2.21)_3$ na última igualdade obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho h^3}{12}\left|u_t^{km}(t)\right|^2 + \rho h\left|v_t^{km}(t)\right|^2 + K\left|\left(u^{km} + v_x^{km}\right)(t)\right|^2 + \left\|u^{km}(t)\right\|^2 + 2\int_0^t \left|u_t^{km}(L,s)\right|^2 ds \\
&+2\int_0^t \left|v_t^{km}(L,s)\right|^2 dt + 2\int_0^L F(u^{km}(x,t))dx + 2\int_0^L G(v^{km}(x,t))dx \leq C_1 + 2\int_0^L F(u^{0km})dx \\
&+2\int_0^L G(v^{0km})dx + \int_0^t \left|u_t^{km}(s)\right|^2 ds + \int_0^t \left|v_t^{km}(s)\right|^2 ds,
\end{aligned} \qquad (2.23)$$

onde a constante $C_1 > 0$, independente de m, k e t, é tal que

$$C_1 \geq \frac{\rho h^3}{12}\left|u^{1km}\right|^2 + \rho h\left|v^{1km}\right|^2 + K\left|u^{0km} + v_x^{0km}\right|^2 + \left\|u^{0km}\right\|^2 + \int_0^T |a(t)|^2 dt + \int_0^T |b(t)|^2 dt.$$

Obteremos agora estimativa para os termos $2\int_0^L F(u^{0km})dx$ e $2\int_0^L G(v^{0km})dx$. Como $f(s)s \geq 0$ e $g(s)s \geq 0$, temos que $F(t) \geq 0$ e $G(t) \geq 0$, para todo $t \in [0,T]$ e $f(0) = g(0) = 0$. Logo obtemos por (2.1) que

$$\int_0^L F(u^{0km})dx \leq c_f \left|u^{0km}\right|^2 \text{ e } \int_0^L G(v^{0km})dx \leq c_g \left|v^{0km}\right|^2. \tag{2.24}$$

Por $(2.21)_2$, $(2.21)_3$ e (2.24), a desigualdade (2.23) tranforma-se em

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho h^3}{12}\left|u_t^{km}(t)\right|^2 + \rho h\left|v_t^{km}(t)\right|^2 + K\left|(u^{km}+v_x^{km})(t)\right|^2 + \left\|u^{km}(t)\right\|^2 \\
&+2\int_0^t \left|u_t^{km}(L,s)\right|^2 ds + 2\int_0^t \left|v_t^{km}(L,s)\right|^2 ds + 2\int_0^L F(u^{km}(x,t))dx \\
&+2\int_0^L G(v^{km}(x,t))dx \leq C_2 + \int_0^t \left(\left|u_t^{km}(s)\right|^2 + \left|v_t^{km}(s)\right|^2\right) ds,
\end{aligned} \tag{2.25}$$

onde a constante $C_2 > 0$, independente de m, k e t, é tal que $C_2 \geq C_1 + c_f\left|u^{0km}\right|^2 + c_g\left|v^{0km}\right|^2$. Usando o lema 1.4(Desigualdade de Gronwall) em (2.25), podemos concluir que

$$\begin{aligned}
&\left|u_t^{km}(t)\right|^2 + \left|v_t^{km}(t)\right|^2 + \left|(u^{km}+v_x^{km})(t)\right|^2 + \left\|u^{km}(t)\right\|^2 + 2\int_0^t \left|u_t^{km}(L,s)\right|^2 ds \\
&+2\int_0^t \left|v_t^{km}(L,s)\right|^2 ds \leq C_3,
\end{aligned} \tag{2.26}$$

onde $C_3 > 0$ é uma constante que independe de m, k e t. Desta forma podemos estender a solução para todo o intervalo $[0,T]$ (Ver Apêndice, Corolário A.2).

Estimativas II. Derivando $(2.21)_1$ em relação a t obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho h^3}{12}\left(u_{ttt}^{km}(t), \psi\right) + \rho h\left(v_{ttt}^{km}(t), \varphi\right) + K\left(\left((u^{km}+v_x^{km})(t)\right)_t, \psi + \varphi_x\right) + \left(\left(u_t^{km}(t), \psi\right)\right) \\
&+u_{tt}^{km}(L,t)\,\psi(L,t) + v_{tt}^{km}(L,t)\,\varphi(L,t) + \left(f_t(u^{km}(t))\,u_t^{km}, \varphi\right) + \left(g_t(v^{km}(t))\,v_t^{km}(t), \varphi\right) \\
&= (a_t(t), \psi) + (b_t(t), \varphi)
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Fazendo $\psi = 2u_{tt}^{km}(t)$ e $\varphi = 2v_{tt}^{km}(t)$ em (2.27), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho h^3}{12}2\left(u_{ttt}^{km}(t), u_{tt}^{km}(t)\right) + \rho h2\left(v_{ttt}^{km}(t), v_{tt}^{km}(t)\right) + 2K((u_t^{km}+v_{xt}^{km})(t), (u_{tt}^{km}+v_{tt}^{km})(t)) \\
&+2\left(\left(u_t^{km}(t), u_{tt}^{km}(t)\right)\right) + 2\left|u_{tt}^{km}(L,t)\right|^2 + 2\left|v_{tt}^{km}(L,t)\right|^2 + 2\left(f_t(u^{km}(t))u_t^{km}(t), u_{tt}^{km}(t)\right) \\
&+2\left(g_t(v^{km}(t))\,v_t^{km}(t), v_{tt}^{km}(t)\right) = 2\left(a_t(t), u_{tt}^{km}(t)\right) + 2\left(b_t(t), v_{tt}^{km}(t)\right),
\end{aligned}$$

o que implica

$$\frac{\rho h^3}{12}\frac{d}{dt}\left|u_{tt}^{km}(t)\right|^2+\rho h\frac{d}{dt}\left|v_{tt}^{km}(t)\right|^2+K\frac{d}{dt}\left|\left((u^{km}+v_x^{km})(t)\right)_t\right|^2+\frac{d}{dt}\left\|u_t^{km}(t)\right\|^2$$
$$+2\left|u_{tt}^{km}(L,t)\right|^2+2\left|v_{tt}^{km}(L,t)\right|^2+2\left(f_t(u^{km}(t))u_t^{km}(t),u_{tt}^{km}(t)\right) \tag{2.28}$$
$$+2\left(g_t(v^{km}(t))\,v_t^{km}(t),v_{tt}^{km}(t)\right)=2\left(a_t(t),u_{tt}^{km}(t)\right)+2\left(b_t(t),v_{tt}^{km}(t)\right).$$

Integrando (2.28) de 0 a $t\leq T$, obtemos

$$\frac{\rho h^3}{12}\left|u_{tt}^{km}(t)\right|^2+\rho h\left|v_{tt}^{km}(t)\right|^2+K\left|\left(u^{km}+v_x^{km}\right)_t(t)\right|^2+\left\|u_t^{km}(t)\right\|^2+2\int_0^t\left|u_{tt}^{km}(L,s)\right|^2ds$$
$$+2\int_0^t\left|v_{tt}^{km}(L,s)\right|^2ds=\frac{\rho h^3}{12}\left|u_{tt}^{km}(0)\right|^2+\rho h\left|v_{tt}^{km}(0)\right|^2+K\left|u^{1km}+v_x^{1km}\right|^2+\left\|u^{1km}\right\|^2$$
$$+2\int_0^t\left(a_t(s),u_{tt}^{km}(s)\right)ds+2\int_0^t\left(b_t(s),v_{tt}^{km}(s)\right)dt-2\int_0^t\left(f_t(u^{km}(s))u_t^{km}(s),u_{tt}^{km}(s)\right)ds$$
$$-2\int_0^t\left(g_t(v^{km}(s))\,v_t^{km}(s),v_{tt}^{km}(s)\right)ds. \tag{2.29}$$

Observação 2.1 *Por* $(2.1)_1$ *e usando as desigualdades de Schwarz e de Young, obtemos*

$$-2\int_0^t\left(f_t(u^{km}(s))u_t^{km}(s),u_{tt}^{km}(s)\right)dt\leq\int_0^t\left|\left(f_t(u^{km}(s))u_t^{km}(s),u_{tt}^{km}(s)\right)\right|dt$$
$$\leq c_f\int_0^t\left|u_t^{km}(s)\right|\left|u_{tt}^{km}(s)\right|ds\leq\frac{c_f}{2}\int_0^t\left|u_t^{km}(s)\right|^2ds+\frac{c_f}{2}\int_0^t\left|u_{tt}^{km}(s)\right|^2ds$$

e, de modo análogo,

$$-2\int_0^t\left(g_t(v^{km}(s))\,v_t^{km}(s),v_{tt}^{km}(s)\right)ds\leq\int_0^t\left|\left(g_t(v^{km}(s))\,v_t^{km}(s),v_{tt}^{km}(s)\right)\right|ds$$
$$\leq c_g\int_0^t\left|v_t^{km}(s)\right|\left|v_{tt}^{km}(s)\right|ds\leq\frac{c_g}{2}\int_0^t\left|v_t^{km}(s)\right|^2ds+\frac{c_g}{2}\int_0^t\left|v_{tt}^{km}(s)\right|^2ds.$$

Observação 2.2 *Iremos agora obter estimativas para os termos* $\left|u_{tt}^{km}(0)\right|$ *e* $\left|v_{tt}^{km}(0)\right|$. *Para isso consideremos as seguintes equações*

$$\frac{\rho h^3}{12}\left(u_{tt}^{km}(t),\psi\right)-\left(u_{xx}^{km}(t),\psi\right)+K\left((u^{km}+v_x^{km})(t),\psi\right)+\left(f(u^{km}(t)),\psi\right)=(a(t),\psi), \tag{2.30}$$

e

$$\rho h\left(v_{tt}^{km}\left(t\right),\varphi\right)-K\left(\left(\left(u^{km}+v_{x}^{km}\right)\left(t\right)\right)_{x},\varphi\right)+\left(g(v^{km}\left(t\right)),\varphi\right)=\left(b\left(t\right),\varphi\right), \tag{2.31}$$

para todo $\psi,\varphi\in V_m^k$.

Fazendo $t=0$ *e* $\psi=u_{tt}^{km}(0)$ *na equação* (2.30)*, obtemos*

$$\begin{aligned}&\frac{\rho h^3}{12}\left(u_{tt}^{km}(0),u_{tt}^{km}(0)\right)-\left(u_{xx}^{0km},u_{tt}^{km}(0)\right)+K\left(u^{0km}+v_x^{0km},u_{tt}^{km}(0)\right)\\&+\left(f(u^{0km}),u_{tt}^{km}(0)\right)=\left(a\left(0\right),u_{tt}^{0km}\right),\end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned}\frac{\rho h^3}{12}\left|u_{tt}^{km}(0)\right|^2=&\left(u_{xx}^{0km},u_{tt}^{km}(0)\right)-K\left(u^{0km}+v_x^{0km},u_{tt}^{km}(0)\right)-\left(f(u^{0km}),u_{tt}^{km}(0)\right)\\&+\left(a\left(0\right),u_{tt}^{km}(0)\right).\end{aligned} \tag{2.32}$$

Usando em (2.32) a desigualdade de Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\rho h^3}{12}\left|u_{tt}^{km}(0)\right|^2\leq&\left|u_{xx}^{0km}\right|\cdot\left|u_{tt}^{km}(0)\right|+K\left|u^{0km}+v_x^{0km}\right|\cdot\left|u_{tt}^{km}(0)\right|+\left|f(u^{0km})\right|\cdot\left|u_{tt}^{km}(0)\right|\\&+\left|a\left(0\right)\right|\left|u_{tt}^{km}(0)\right|,\end{aligned}$$

o que implica

$$\frac{\rho h^3}{12}\left|u_{tt}^{km}(0)\right|\leq\left|u_{xx}^{0km}\right|+K\left|u^{0km}+v_x^{0km}\right|+\left|f(u^{0km})\right|+\left|a\left(0\right)\right|. \tag{2.33}$$

Usando (2.1)*,* (2.6)*,* $(2.21)_2$ *e* $(2.21)_3$*, em* (2.33)*, obtemos que*

$$\left|u_{tt}^{km}(0)\right|\leq C_4,$$

onde $C_4>0$ *é uma constante que independe de* m*,* k *e* t*.*

Agora fazendo $t=0$ *e* $\varphi=v_{tt}^{km}(0)$ *na equação* (2.31) *obtemos*

$$\rho h\left(v_{tt}^{km}\left(0\right),v_{tt}^{km}\left(0\right)\right)-K\left(u_x^{0km}+v_{xx}^{0km},v_{tt}^{km}\left(0\right)\right)+\left(g(v^{0km}),v_{tt}^{km}\left(0\right)\right)=\left(b\left(0\right),v_{tt}^{km}\left(0\right)\right),$$

o que implica

$$\rho h\left|v_{tt}^{km}\left(0\right)\right|^2=K\left(u_x^{0km}+v_{xx}^{0km},v_{tt}^{km}\left(0\right)\right)-\left(g(v^{0km}),v_{tt}^{km}\left(0\right)\right)+\left(b\left(0\right),v_{tt}^{km}\left(0\right)\right). \tag{2.34}$$

Usando a desigualdade de Schwarz em (2.34), obtemos

$$\rho h\left|v_{tt}^{km}(0)\right|^{2}\leq K\left|u_{x}^{0km}+v_{xx}^{0km}\right|\cdot\left|v_{tt}^{km}(0)\right|+\left|g\left(v^{0km}\right)\right|\cdot\left|v_{tt}^{km}(0)\right|+\left|b(0)\right|\cdot\left|v_{tt}^{km}(0)\right|,$$

o que implica

$$\rho h\left|v_{tt}^{km}(0)\right|\leq K\left|u_{x}^{0km}+v_{xx}^{0km}\right|+\left|g\left(v^{0km}\right)\right|+\left|b(0)\right|. \tag{2.35}$$

Usando (2.1), (2.6), $(2.21)_2$ *e* $(2.21)_3$ *em (2.35), temos*

$$\left|v_{tt}^{km}(0)\right|\leq C_5,$$

onde $C_5>0$ *é uma constante que independe de* m, k *e* t.

Assim, usando a desigualdade de Young em (2.29), as observações 2.1 e 2.2 e por (2.6), $(2.21)_2$ e $(2.21)_3$ obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{\rho h^{3}}{12}\left|u_{tt}^{km}(t)\right|^{2}+\rho h\left|v_{tt}^{km}(t)\right|^{2}+K\left|\left(u^{km}+v_{x}^{km}\right)_{t}(t)\right|^{2}+\left\|u_{t}^{km}(t)\right\|^{2}+2\int_{0}^{t}\left|u_{tt}^{km}(L,s)\right|^{2}ds\\&+2\int_{0}^{t}\left|v_{tt}^{km}(L,s)\right|^{2}ds\leq C_6+c_f\int_{0}^{t}\left|u_{t}^{km}(s)\right|^{2}ds+(c_f+1)\int_{0}^{t}\left|u_{tt}^{km}(s)\right|^{2}ds\\&+c_g\int_{0}^{t}\left|v_{t}^{km}(s)\right|^{2}ds+(c_g+1)\int_{0}^{t}\left|v_{tt}^{km}(s)\right|^{2}ds,\end{aligned} \tag{2.36}$$

onde $C_6>0$ é uma constante tal que

$$C_6\geq\frac{\rho h^{3}}{12}C_4^{2}+\rho hC_5^{2}+K\left|u^{1km}+v_{x}^{1km}\right|^{2}+\left\|u^{1km}\right\|^{2}+\int_{0}^{T}\left|a_t(t)\right|^{2}dt+\int_{0}^{T}\left|b_t(t)\right|^{2}dt.$$

Usando o lema 1.4(Desigualdade de Gronwall) em (2.36), concluímos que

$$\begin{aligned}&\left|u_{tt}^{km}(t)\right|^{2}+\left|v_{tt}^{km}(t)\right|^{2}+\left|\left(u^{km}+v_{x}^{km}\right)_{t}(t)\right|^{2}+\left\|u_{t}^{km}(t)\right\|^{2}+2\int_{0}^{t}\left|u_{tt}^{km}(L,s)\right|^{2}ds\\&+2\int_{0}^{t}\left|v_{tt}^{km}(L,s)\right|^{2}ds\leq C_7,\end{aligned} \tag{2.37}$$

onde C_7 é constante que independe de t, k e m.

Passagem ao limite. Por (2.26) e (2.37), temos que

$$(u^{km})\text{ é limitado em }L^{\infty}(0,T,V), \tag{2.38}$$

$$(u_t^{km}) \text{ é limitado em } L^\infty(0,T,V), \tag{2.39}$$

$$(u_{tt}^{km}) \text{ é limitado em } L^2(Q), \tag{2.40}$$

$$\left(u_t^{km}(L)\right) \text{ é limitado em } L^2(0,T), \tag{2.41}$$

$$(v^{km}) \text{ é limitado em } L^\infty(0,T,V), \tag{2.42}$$

$$(v_t^{km}) \text{ é limitado em } L^\infty(0,T,V), \tag{2.43}$$

$$(v_{tt}^{km}) \text{ é limitado em } L^2(Q), \tag{2.44}$$

$$\left(v_t^{km}(L)\right) \text{ é limitado em } L^2(0,T), \tag{2.45}$$

Por (2.1) e (2.38) obtemos

$$(f(u^{km})) \text{ é limitado em } L^2(Q), \tag{2.46}$$

pois

$$\int_Q |f(u(x,t))|^2 \, dxdt \leq c_f^2 \int_0^T |u(t)|^2 \, dt \leq c_f^2 L^2 \int_0^T \|u(t)\|^2 \, dt < \infty.$$

Similarmente, por (2.1) e (2.42) , temos

$$(g(v^{km})) \text{ é limitado em } L^2(Q). \tag{2.47}$$

Assim, pelo Teorema 1.3 e (2.38) – (2.47), existem duas sequências de (u^{km}) e (v^{km}), ainda denotadas da mesma forma, tais que

$$u^{km} \to u^k \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0,T,V), \tag{2.48}$$

$$u_t^{km} \to u_t^k \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0,T,V), \tag{2.49}$$

$$u_{tt}^{km} \to u_{tt}^k \text{ fracamente em } L^2(Q), \tag{2.50}$$

$$u_t^{km}(L) \to u_t^k(L) \text{ fracamente em } L^2(0,T), \tag{2.51}$$

$$v^{km} \to v^k \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0,T,V), \tag{2.52}$$

$$v_t^{km} \to v_t^k \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0,T,V), \tag{2.53}$$

$$v_{tt}^{km} \to v_{tt}^k \text{ fracamente em } L^2(Q), \tag{2.54}$$

$$v_t^{km}(L) \to v_t^k(L) \text{ fracamente em } L^2(0,T), \tag{2.55}$$

Por (2.38), (2.39), (2.42) e (2.43), temos que (u^{km}) e (v^{km}) são limitadas em $H^1(Q)$ e, como $H^1(Q)$ é imerso compactamente em $L^2(Q)$, existirão sequências, ainda denotadas da mesma forma, tais que

$$u^{km} \to u^k \text{ q.s. em } Q,$$

$$v^{km} \to v^k \text{ q.s. em } Q.$$

Como f e g são Lipschitzianas, segue

$$f(u^{km}) \to f(u^k) \text{ q.s. em } Q, \tag{2.56}$$

$$g(v^{km}) \to g(v^k) \text{ q.s. em } Q. \tag{2.57}$$

Logo, por (2.46), (2.47), (2.56), (2.57) e usando o Lema 1.3 temos

$$f(u^{km}) \to f(u^k) \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0,T,V), \tag{2.58}$$

e

$$g(v^{km}) \to g(v^k) \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0,T,V). \tag{2.59}$$

Vimos que as estimativas (2.26) e (2.37) independem de k, logo usando argumento análogo ao usado para obter u^k e v^k das sequências (u^{km}) e (v^{km}), faremos agora $k \to \infty$ em u^k e v^k para obter as funções u e v tais que

$$u^k \to u \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0,T,V), \tag{2.60}$$

$$u_t^k \to u_t \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0,T,V), \tag{2.61}$$

$$u_{tt}^k \to u_{tt} \text{ fracamente em } L^2(Q), \tag{2.62}$$

$$u_t^k(L) \to u_t(L) \text{ fracamente em } L^2(0,T), \tag{2.63}$$

$$v^k \to v \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0,T,V), \tag{2.64}$$

$$v_t^k \to v_t \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0,T,V), \tag{2.65}$$

$$v_{tt}^k \to v_{tt} \text{ fracamente em } L^2(Q), \tag{2.66}$$

$$v_t^k(L) \to v_t(L) \text{ fracamente em } L^2(0,T), \tag{2.67}$$

$$f(u^k) \to f(u) \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0,T,V), \tag{2.68}$$

$$g(v^k) \to g(v) \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0,T,V). \tag{2.69}$$

Nas equações (2.30) e (2.31), temos

$$\frac{\rho h^3}{12}\left(u_{tt}^{km}(t), \psi\right) - \left(u_{xx}^{km}(t), \psi\right) + K\left((u^{km} + v_x^{km})(t), \psi\right) + \left(f(u^{km}(t)), \psi\right) = (a(t), \psi),$$

e

$$\rho h\left(v_{tt}^{km}(t), \varphi\right) - K\left(\left(u^{km} + v_x^{km}\right)_x(t), \varphi\right) + \left(g(v^{km}(t)), \varphi\right) = (b(t), \varphi),$$

para todo $\psi, \varphi \in V_m^k$. Como V_m^k é denso em V, temos que as equações acima são válidas para toda $\psi, \varphi \in V$. Logo, em particular

$$\begin{aligned} &\frac{\rho h^3}{12}\left(u_{tt}^{km}(t), \psi\right) + \left(\left(u^{km}(t), \psi\right)\right) + u_t^{km}(L,t)\psi(L,t) + K\left((u^{km} + v_x^{km})(t), \psi\right) \\ &+ \left(f(u^{km}(t)), \psi\right) = (a(t), \psi), \end{aligned} \tag{2.70}$$

e

$$\rho h\left(v_{tt}^{km}(t), \varphi\right) + K((u^{km} + v_x^{km})(t), \varphi_x) + Kv_t^{km}(L,t)\varphi(L,t) + \left(g(v^{km}(t)), \varphi\right) = (b(t), \varphi), \tag{2.71}$$

para toda $\psi, \varphi \in \mathcal{D}(0, L)$

Multiplicando (2.70) por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando de 0 a T obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{\rho h^3}{12}\int_0^T \left(u_{tt}^{km}(t), \psi\right)\theta dt + \int_0^T \left(\left(u^{km}(t), \psi\right)\right)\theta dt + \int_0^T u_t^{km}(L,t)\psi(L,t)\theta dt \\ &+K\int_0^T \left((u^{km} + v_x^{km})(t), \psi\right)\theta dt + \int_0^T \left(f(u^{km}(t)), \psi\right)\theta dt = \int_0^T (a(t), \psi)\,\theta dt. \end{aligned} \tag{2.72}$$

Fazendo $m \to \infty$ e $k \to \infty$ em (2.72) e usando (2.48), (2.50) − (2.52), (2.58), (2.60), (2.62) − (2.64), e (2.68), segue que

$$\begin{aligned} &\frac{\rho h^3}{12}\int_0^T (u_{tt}(t), \psi)\,\theta dt + \int_0^T ((u(t), \psi))\,\theta dt + \int_0^T u_t(L,t)\psi(L,t)\theta dt \\ &+K\int_0^T ((u + v_x)(t), \psi)\,\theta dt + \int_0^T (f(u(t)), \psi)\,\theta dt = \int_0^T (a(t), \psi)\,\theta dt, \end{aligned} \tag{2.73}$$

o que implica

$$\left\langle \frac{\rho h^3}{12} \left(u_{tt}\left(t\right) ,\psi\right) - \left(u_{xx}\left(t\right) ,\psi\right) + K\left(\left(u+v_x\right) \left(t\right) ,\psi\right) + \left(f(u\left(t\right)),\psi\right) \right.$$
$$\left. - \left(a\left(t\right) ,\psi\right) ,\theta\right\rangle_{D'(0,T),D(0,T)} = 0,\ \forall\theta\in\mathcal{D}(0,T) \text{ e } \forall\psi\in\mathcal{D}(0,L)$$

Logo

$$\left\langle \frac{\rho h^3}{12} u_{tt}\left(t\right) - u_{xx}\left(t\right) + K(u+v_x)\left(t\right) + f(u\left(t\right)) - a\left(t\right) ,\psi\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,L),\mathcal{D}(0,L)} = 0,$$

para todo $\psi\in\mathcal{D}(0,L)$, no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$.

Assim, obtemos

$$\frac{\rho h^3}{12} u_{tt} - u_{xx} + K(u+v_x) + f(u) = a \text{ em } \mathcal{D}'(Q).$$

Mas por (2.6), (2.60), (2.62), (2.64) e (2.68), temos

$$\frac{\rho h^3}{12} u_{tt} - u_{xx} + K(u+v_x) + f(u) = a \text{ em } L^2(Q). \tag{2.74}$$

Multiplicando (2.71) por $\theta\in\mathcal{D}(0,T)$ e integrando de 0 a T obtemos

$$\rho h \int_0^T \left(v_{tt}^{km}\left(t\right) ,\varphi\right) \theta dt + K\int_0^T \left(\left(u^{km}+v_x^{km}\right) \left(t\right) ,\varphi_x\right) \theta dt + K\int_0^T v_t^{km}(L,t)\varphi(L,t)\theta dt$$
$$+\int_0^T \left(g(v^{km}\left(t\right)),\varphi\right) \theta dt = \int_0^T \left(b\left(t\right) ,\varphi\right) \theta dt. \tag{2.75}$$

Fazendo $m\to\infty$ e $k\to\infty$ em (2.75) e usando (2.48), (2.52)– (2.55), (2.59), (2.60), (2.64) e (2.66) – (2.69), segue que

$$\begin{aligned} &\rho h \int_0^T \left(v_{tt}\left(t\right) ,\varphi\right) \theta dt + K\int_0^T \left(\left(u+v_x\right) \left(t\right) ,\varphi_x\right) \theta dt + K\int_0^T v_t(L,t)\varphi(L,t)\theta dt \\ &+\int_0^T \left(g(v\left(t\right)),\varphi\right) \theta dt = \int_0^T \left(b\left(t\right) ,\varphi\right) \theta dt,\ \forall\varphi\in\mathcal{D}(0,L),\ \forall\theta\in\mathcal{D}(0,T). \end{aligned} \tag{2.76}$$

Assim

$$\left\langle \rho h\left(v_{tt}\left(t\right) ,\varphi\right) - K((u+v_x)_x\left(t\right) ,\varphi) + \left(g(v\left(t\right)),\varphi\right) - \left(b\left(t\right) ,\varphi\right) ,\theta\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} = 0,$$

para todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e todo $\varphi \in \mathcal{D}(0,L)$. Logo

$$\langle \rho h v_{tt}\,(t) - K(u+v_x)_x\,(t) + g(v\,(t)) - b\,(t)\,,\varphi\rangle_{D'(0,L),D(0,L)} = 0,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(0,L)$, no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$.

Desta forma, obtemos

$$\rho h v_{tt} - K(u+v_x)_x + g(v) = b \text{ em } \mathcal{D}'(Q).$$

Por $(2.6), (2.60), (2.66)$ e (2.69) obtemos

$$\rho h v_{tt} - K(u+v_x)_x + g(v) = b \text{ em } L^2(Q). \tag{2.77}$$

Condições de Fronteira.

Temos por (2.73)

$$\begin{aligned}&\frac{\rho h^3}{12}\int_0^T (u_{tt}\,(t)\,,\psi)\theta dt + \int_0^T ((u\,(t)\,,\psi))\,\theta dt + \int_0^T u_t(L,t)\psi(L,t)\theta dt\\&+K\int_0^T ((u+v_x)\,(t)\,,\psi)\,\theta dt + \int_0^T (f(u\,(t)),\psi)\,\theta dt = \int_0^T (a\,(t)\,,\psi)\,\theta dt.\end{aligned} \tag{2.78}$$

Multiplicando (2.74) por $\psi\theta$, $\psi \in V$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, integrando em Q e usando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{\rho h^3}{12}\int_0^T (u_{tt}\,(t)\,,\psi)\,\theta dt + \int_0^T ((u\,(t)\,,\psi))\,\theta dt - \int_0^T u_x(L,t)\psi(L,t)\theta dt\\&+K\int_0^T ((u+v_x)\,(t)\,,\psi)\,\theta dt + \int_0^T (f(u\,(t)),\psi)\,\theta dt = \int_0^T (a\,(t)\,,\psi)\,\theta dt.\end{aligned} \tag{2.79}$$

Comparando (2.78) e (2.79), segue que

$$\int_0^T [u_t(L,t) + u_x(L,t)]\,\psi(L,t)\theta dt = 0,\ \forall\theta \in \mathcal{D}(0,T) \text{ e } \forall\psi \in V,$$

o que implica

$$(u_t(L) + u_x(L))\psi(L) = 0, \text{ em } (0,T) \text{ e } \forall\psi \in V.$$

Logo

$$u_t(L) + u_x(L) = 0 \text{ em } (0,T)\,. \tag{2.80}$$

Agora, temos por (2.76)

$$\begin{aligned}&\rho h\int_0^T (v_{tt}(t),\varphi)\,\theta dt+K\int_0^T((u+v_x)(t),\varphi_x)\theta dt+K\int_0^T v_t(L,t)\varphi(L,t)\theta dt\\&+\int_0^T (g(v(t)),\varphi)\,\theta dt=\int_0^T (b(t),\varphi)\,\theta dt.\end{aligned}\tag{2.81}$$

Multiplicando (2.77) por $\varphi\theta$, $\varphi\in V$ e $\theta\in\mathcal{D}(0,T)$, integrando em Q e usando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}&\rho h\int_0^T (v_{tt}(t),\varphi)\,\theta dt+K\int_0^T((u+v_x)(t),\varphi_x)\theta dt-K\int_0^T (u+v_x)(L,t)\varphi(L,t)\theta dt\\&+\int_0^T (g(v(t)),\varphi)\,\theta dt=\int_0^T (b(t),\varphi)\,\theta dt.\end{aligned}\tag{2.82}$$

Comparando (2.81) e (2.82), segue que

$$K\int_0^T (v_t(L,t)+u(L,t)+v_x(L,t))\varphi(L,t)\theta dt=0,\ \forall\theta\in\mathcal{D}(0,T)\text{ e }\forall\varphi\in V.$$

Logo

$$v_t(L)+u(L)+v_x(L)=0\text{ em }(0,T).\tag{2.83}$$

Regularidade da Solução.

O próximo passo da prova do teorema é mostrar que as funções u e v pertencem a $L^2(0,T,H^2(0,L))$. Para isso, consideremos os seguintes problemas elípticos:

$$\left|\begin{array}{l}-u_{xx}(t)=-\dfrac{\rho h^3}{12}u_{tt}(t)-K(u+v_x)(t)-f(u(t))+a(t)\ \text{ em }\ (0,L),\\[2mm] u(0,t)=0,\\[2mm] u_x(L,t)=-u_t(L,t),\end{array}\right.\tag{2.84}$$

e

$$\left|\begin{array}{l}-v_{xx}(t)=-\dfrac{\rho h}{K}v_{tt}(t)+u_x(t)-\dfrac{1}{K}g(v(t))+\dfrac{1}{K}b(t)\text{ em }(0,L),\\[2mm] v(0,t)=0,\\[2mm] v_x(L,t)=-(u(L,t)+v_t(L,t)).\end{array}\right.\tag{2.85}$$

Como $-\dfrac{\rho h^3}{12}u_{tt}-K(u+v_x)-f(u)+a\in L^2(Q)$ e $-u_t(L,t)\in\mathbb{R}$, temos, pela Proposição 1.2, que a solução $u(t)$ de (2.84) pertence a $H^2(0,L)$ e, portanto, $u\in L^2(0,T,H^2(0,L))$.

Analogamente, para o problema (2.85), como $-\dfrac{\rho h}{K}v_{tt} + u_x - \dfrac{1}{K}g(v) + \dfrac{1}{K}b \in L^2(Q)$ e $-\left(u(L,t) + v_t(L,t)\right) \in \mathbb{R}$, temos $v \in L^2(0,T,H^2(0,L))$. Assim encontramos as soluções u e v nos espaços $L^\infty(0,T,V) \cap L^2\left(0,T,H^2(0,L)\right)$ como queríamos.

Condições Iniciais.

- $u(0) = u^0$ (Analogamente para $v\,(0) = v^0$)

Como $u \in L^2(0,T,V)$ e $u_t \in L^2(0,T,V)$, temos pelo Teorema 1.2 que $u \in C^0([0,T]\,;V)$, logo faz sentido $u(\cdot,0)$.

Segue de (2.61) que

$$\int_0^T (u_t^k(t),\psi)\theta(t)dt \to \int_0^T (u_t(t),\psi)\theta(t)dt,$$

para toda $\psi \in V$ e $\theta \in C^1([0,T])$, com $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$ e que pode ser reescrita por

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u^k(t),\psi)\theta(t)dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}(u(t),\psi)\theta(t)dt. \tag{2.86}$$

Segue de (2.60) que

$$\int_0^T (u^k(t),\psi)\theta'(t)dt \to \int_0^T (u(t),\psi)\theta'(t)dt, \tag{2.87}$$

para todo $\psi \in V$ e $\theta \in C^1([0,T])$, com $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$

De (2.86) e (2.87) obtemos

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\left[(u^k(t),\psi)\theta(t)\right]dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}\left[(u(t),\psi)\theta(t)\right]dt,$$

Logo

$$(u^k(t),\psi)\theta(t)\big|_0^T \to (u(t),\psi)\theta(t)\big|_0^T,$$

o que implica

$$(u^k(0),\psi(0)) \to (u(0),\psi(0)),\ \forall\psi \in V$$

Mas por $(2.21)_2$

$$(u^{0k},\psi) \to (u^0,\psi);\ \forall\psi \in V,$$

Portanto, $(u(0),\psi) = (u^0,\psi)$; para todo $\psi \in V$, isto é, $u(0) = u^0$

- $u_t(0) = u^1$ (Analogamente para $v_t\left(0\right) = v^1$).

Como $u_t \in L^2(0,T,V)$ e $u_{tt} \in L^2(0,T,L^2(0,L))$, temos pelo Teorema 1.2 que $u_t \in C^0(\left[0,T\right], L^2(0,L))$, logo faz sentido $u_t(0)$.

Temos de (2.30)

$$\begin{aligned}&\frac{\rho h^3}{12}\left(u_{tt}^{km}\left(t\right),\psi\right)+\left(\left(u^{km}\left(t\right),\psi\right)\right)+u_t^{km}(L,t)\psi(L,t)+K\left(\left(u^{km}+v_x^{km}\right)\left(t\right),\psi\right)\\&+\left(f(u^{km}\left(t\right)),\psi\right)=\left(a\left(t\right),\psi\right).\end{aligned}\tag{2.88}$$

Multiplicando (2.88) por θ_δ definida por

$$\theta_\delta = \left| \begin{array}{l} -\dfrac{t}{\delta}+1 \text{ se } 0\leq t\leq \delta \\ 0 \text{ se } \delta\leq t\leq T \end{array}\right.$$

e integrando de 0 a T obtemos

$$\begin{aligned}&\int_0^T\frac{\rho h^3}{12}\left(u_{tt}^{km}\left(t\right),\psi\right)\theta_\delta dt+\int_0^T\left(\left(u^{km}\left(t\right),\psi\right)\right)\theta_\delta dt+\int_0^T u_t^{km}(L,t)\psi(L,t)\theta_\delta dt\\&+\int_0^T K\left(\left(u^{km}+v_x^{km}\right)\left(t\right),\psi\right)\theta_\delta dt+\int_0^T\left(f(u^{km}\left(t\right)),\psi\right)\theta_\delta dt=\int_0^T\left(a\left(t\right),\psi\right)\theta_\delta dt.\end{aligned}\tag{2.89}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}&\int_0^T\frac{\rho h^3}{12}\left(u_{tt}^{km}\left(t\right),\psi\right)\theta_\delta dt=\int_0^T\frac{\rho h^3}{12}\frac{d}{dt}\left(u_t^{km}\left(t\right),\psi\right)\theta_\delta dt=\frac{\rho h^3}{12}\left(u_t^{km}\left(t\right),\psi\right)\theta_\delta\Big|_0^T\\&+\frac{1}{\delta}\int_0^T\frac{\rho h^3}{12}\left(u_t^{km}\left(t\right),\psi\right)dt.\end{aligned}\tag{2.90}$$

Substituindo (2.90) em (2.89), obtemos

$$\begin{aligned}&-\frac{\rho h^3}{12}\left(u^{1k},\psi\right)+\frac{1}{\delta}\frac{\rho h^3}{12}\int_0^\delta\left(u_t^{km}\left(t\right),\psi\right)dt+\int_0^\delta u_t^{km}(L,t)\psi(L,t)\theta_\delta dt+\int_0^\delta\left(\left(u^{km}\left(t\right),\psi\right)\right)\theta_\delta dt\\&\int_0^\delta K\left(\left(u^{km}+v_x^{km}\right)\left(t\right),\psi\right)\theta_\delta dt+\int_0^\delta\left(f(u^{km}\left(t\right)),\psi\right)\theta_\delta dt=\int_0^\delta\left(a\left(t\right),\psi\right)\theta_\delta dt.\end{aligned}$$

Fazendo $m,k\to\infty$ na igualdade acima e usando as convergências (2.48), (2.49), (2.51), (2.52), (2.58), (2.60), (2.61), (2.63), (2.64) e (2.68), temos

$$\begin{aligned}&-\frac{\rho h^3}{12}\left(u^1,\psi\right)+\frac{1}{\delta}\frac{\rho h^3}{12}\int_0^\delta\left(u_t\left(t\right),\psi\right)dt+\int_0^\delta u_t(L,t)\psi(L,t)\theta_\delta dt+\int_0^\delta\left(\left(u\left(t\right),\psi\right)\right)\theta_\delta dt\\&\int_0^\delta K\left(\left(u+v_x\right)\left(t\right),\psi\right)\theta_\delta dt+\int_0^\delta\left(f(u\left(t\right)),\psi\right)\theta_\delta dt=\int_0^\delta\left(a\left(t\right),\psi\right)\theta_\delta dt.\end{aligned}\tag{2.91}$$

Fazendo agora o limite em (2.91) quando $\delta \to 0$, obtemos

$$-\left(u^1, \psi\right) + (u_t(0), \psi) = 0.$$

Logo, $(u^1, \psi) = (u_t(0), \psi)\,, \forall \psi \in V$ e, portanto, $u_t(0) = u^1$.

- **Unicidade.** Suponha que os pares (u, v) e $(\widehat{u}, \widehat{v})$ sejam soluções fortes de $(2) - (4)$. Assim pelo Teorema 2.1 o par $(w^{(1)}, w^{(2)})$, onde $w^{(1)} = u - \widehat{u}$ e $w^{(2)} = v - \widehat{v}$, satisfaz

$$w^{(1)}, w^{(2)} \in L^\infty(0, T, V) \cap L^2\left(0, T, H^2(0, L)\right), \tag{2.92}$$

$$w_t^{(1)}, w_t^{(2)} \in L^\infty(0, T, V), \tag{2.93}$$

$$w_{tt}^{(1)}, w_{tt}^{(2)} \in L^2(Q), \tag{2.94}$$

$$\frac{\rho h^3}{12} w_{tt}^{(1)} - w_{xx}^{(1)} + K(w^{(1)} + w_x^{(2)}) + f(u) - f(\widehat{u}) = 0 \text{ q.s em } Q \tag{2.95}$$

$$\rho h w_{tt}^{(2)} - K(w^{(1)} + w_x^{(2)})_x + g(v) - g(\widehat{v}) = 0 \text{ q.s em } Q \tag{2.96}$$

$$w_x^{(1)}(L, t) + w_t^{(1)}(L, t) = 0 \text{ em } (0, T) \tag{2.97}$$

$$w^{(1)}(L, t) + w_t^{(2)}(L, t) + w_x^{(2)}(L, t) = 0 \text{ em } (0, T) \tag{2.98}$$

$$w^{(1)}(0) = w_t^{(1)}(0) = w^{(2)}(0) = w_t^{(2)}(0) = 0 \text{ sobre } (0, L) \tag{2.99}$$

Fazendo o produto interno em $L^2(0, L)$ da equação (2.95) por $\psi = 2w_t^{(1)}(t)$ e da equção (2.96) por $\varphi = 2w_t^{(2)}(t)$, integrando por partes e somando, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho h^3}{12}\frac{d}{dt}\left|w_t^{(1)}(t)\right|^2 + \rho h \frac{d}{dt}\left|w_t^{(2)}(t)\right|^2 + K\frac{d}{dt}\left|(w^{(1)} + w_x^{(2)})(t)\right|^2 + \frac{d}{dt}\left\|w_t^{(1)}(t)\right\|^2 \\
&+2\left|w_t^{(1)}(L, t)\right|^2 + 2(f(u(t)) - f(\widehat{u}(t)), w_t^{(1)}(t)) + K2\left|w_t^{(2)}(L, t)\right|^2 \\
&+2(g(v(t)) - g(\widehat{v}(t)), w_t^{(2)}) = 0
\end{aligned} \tag{2.100}$$

Integrando a equação (2.100) de 0 a t e usando as condições (2.99), segue

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho h^3}{12}\left|w_t^{(1)}(t)\right|^2 + \rho h\left|w_t^{(2)}(t)\right|^2 + K\left|(w^{(1)} + w_x^{(2)})(t)\right|^2 + \left|\left|w^{(1)}(t)\right|\right|^2 + 2\int_0^t \left|w_t^{(1)}(L, s)\right|^2 ds \\
&+K2\int_0^t \left|w_t^{(2)}(L, s)\right|^2 ds = 2\int_0^t (f(\widehat{u}(s)) - f(u(s)), w_t^{(1)}) ds + 2\int_0^t (g(\widehat{v}(s)) - g(v(s)), w_t^{(2)}) ds
\end{aligned}$$

Como f e g são funções Lipschitzianas(ver (2.1)), temos

$$\begin{aligned} & \frac{\rho h^3}{12}\left|w_t^{(1)}(t)\right|^2+\rho h\left|w_t^{(2)}(t)\right|^2+K\left|(w^{(1)}+w_x^{(2)})(t)\right|^2+\left|\left|w^{(1)}(t)\right|\right|^2 \\ & \leq 2c_f\int_0^t \left|w^{(1)}(s)\right|\cdot\left|w_t^{(1)}(s)\right|ds+2c_g\int_0^t\left|w^{(2)}(s)\right|\cdot\left|w_t^{(2)}(s)\right|ds. \end{aligned} \tag{2.101}$$

Aplicando a desigualdade de Young em (2.101), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\rho h^3}{12}\left|w_t^{(1)}(t)\right|^2+\rho h\left|w_t^{(2)}(t)\right|^2+K\left|(w^{(1)}+w_x^{(2)})(t)\right|^2+\left|\left|w^{(1)}(t)\right|\right|^2 \\ & \leq c_f\int_0^t\left|w^{(1)}(s)\right|^2ds+c_f\int_0^t\left|w_t^{(1)}(s)\right|^2ds+c_g\int_0^t\left|w^{(2)}(s)\right|^2ds+c_g\int_0^t\left|w_t^{(2)}(s)\right|^2ds \end{aligned}$$

Chamando $C_1=\min\left\{\frac{\rho h^3}{12},\rho h,K,1\right\}$ e $C_2=máx\left\{c_f,c_g\right\}$ obtemos

$$\begin{aligned} & \left|w_t^{(1)}(t)\right|^2+\left|w_t^{(2)}(t)\right|^2+\left|(w^{(1)}+w_x^{(2)})(t)\right|^2+\left|\left|w^{(1)}(t)\right|\right|^2 \\ & \leq \frac{C_2}{C_1}\int_0^t\left[\left|w^{(1)}(s)\right|^2+\left|w_t^{(1)}(s)\right|^2+\left|w^{(2)}(s)\right|^2+\left|w_t^{(2)}(s)\right|^2+\left|(w^{(1)}+w_x^{(2)})(s)\right|^2+\left|\left|w^{(1)}(s)\right|\right|^2\right]ds. \end{aligned} \tag{2.102}$$

Usando em (2.102) o Lema 1.4(Desigualdade de Gronwall), concluimos

$$\left|w_t^{(1)}(t)\right|^2+\left|w_t^{(2)}(t)\right|^2+\left|(w^{(1)}+w_x^{(2)})(t)\right|^2+\left|\left|w^{(1)}(t)\right|\right|^2=0.$$

Logo, $\left|\left|w^{(1)}(t)\right|\right|^2=0,\ \forall t\in[0,T]$, o que implica $w^{(1)}(t)=0$, ou seja, $u=\widehat{u}$.

Temos também, $\left|\left|w^{(2)}(t)\right|\right| \leq \left|(w^{(1)}(t)+w_x^{(2)}(t)\right|+\left|w^{(1)}(t)\right| = 0,\ \forall t \in [0,T]$. Assim, $\left|\left|w^{(2)}(t)\right|\right|=0$, e, portanto, $v=\widehat{v}$. Com isso, concluímos a prova do teorema. ■

Capítulo 3

Solução Fraca

Consideremos agora o nosso problema com menos regularidade nos dados iniciais e supondo agora f e g contínuas com $f(s)s \geq 0$ e $g(s)s \geq 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$. *A solução obtida com esses dados será denominada "solução fraca".*

Teorema 3.1 *Seja Q como na introdução e*

$$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ contínuas tais que } f(s)s \geq 0 \text{ e } g(s)s \geq 0, \forall s \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

$$(u^0, u^1, a) \in V \times L^2(0, L) \times L^2(Q), \tag{3.2}$$

$$(v^0, v^1, b) \in V \times L^2(0, L) \times L^2(Q), \tag{3.3}$$

$$F(u^0), G(v^0) \in L^1(0, L). \tag{3.4}$$

Então existem funções $u, v : Q \to \mathbb{R}$ tais que

$$u, v \in L^\infty(0, T, V), \tag{3.5}$$

$$u_t, v_t \in L^2(0, T, L^2(0, L)), \tag{3.6}$$

$$\frac{\rho h^3}{12} u_{tt} - u_{xx} + K\left(u + v_x\right) + f(u) = a \text{ em } L^1(0, T, V' + L^1(0, L)), \tag{3.7}$$

$$\rho h v_{tt} - K\left(u + v_x\right)_x + g(v) = \text{ em } L^1(0, T, V' + L^1(0, L)), \tag{3.8}$$

$$u_x\left(L, \cdot\right) + u_t\left(L, \cdot\right) = 0 \text{ em } L^2(0, T), \tag{3.9}$$

$$u\,(L,\cdot)+v_x\,(L,\cdot)+v_t\,(L,\cdot)=0 \ \ em \ L^2(0,T), \tag{3.10}$$

$$u(0)=u^0,\ u_t(0)=u^1,\ v(0)=v^0,\ v_t(0)=v^1 \ \ em \ \ (0,L)\,. \tag{3.11}$$

Prova. Pelo Lema 1.6, existem sequências de funções $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ e $(g_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, tais que para cada $\nu \in \mathbb{N}$, $f_\nu, g_\nu : \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ são Lipschitzianas, com constantes de Lipschitz c_{f_ν} e c_{g_ν}, respectivamente, satisfazendo $sf_\nu(s)\geq 0$ e $sg_\nu(s)\geq 0$, $\forall s\in\mathbb{R}$. Cada sequência $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ e $(g_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f e g, respectivamente, em subconjuntos limitados de $\mathbb{R}$. Como u^0 e v^0 não são necessariamente limitados, aproximaremos u^0 e v^0 por funções limitadas de V. Para isto consideremos a função $\xi_j(s):\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$\xi_j(s)=\left|\begin{array}{l} -j,\ \text{se}\ s<-j, \\ s,\ \text{se}\ |s|\leq j, \\ j,\ \text{se}\ s>j, \end{array}\right.$$

Considerando $\xi_j(u^0)=u^{0j}$ e $\xi_j(v^0)=v^{0j}$, temos por Kinderlehrer e Stampacchia [7] que as sequências $(u^{0j})_{j\in\mathbb{N}}$ e $(v^{0j})_{j\in\mathbb{N}}$ estão contidas em V, limitadas quase sempre em $[0,L]$ e

$$u^{0j}\rightarrow u^0 \text{ fortemente em } V, \tag{3.12}$$

$$v^{0j}\rightarrow v^0 \text{ fortemente em } V. \tag{3.13}$$

Tomemos as sequências de funções $(u^{0jp})_{p\in\mathbb{N}}$, $(v^{0jp})_{p\in\mathbb{N}}$ em $V\cap H^2(0,L)$, $(u^{1p})_{p\in\mathbb{N}}$, $(v^{1p})_{p\in\mathbb{N}}$ em V e $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$, $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ em $H^1(0,T,L^2(0,L))$ tais que, por densidade,

$$u^{0jp}\rightarrow u^{0j} \text{ fortemente em } V, \tag{3.14}$$

$$v^{0jp}\rightarrow v^{0j} \text{ fortemente em } V, \tag{3.15}$$

$$u^{1p}\rightarrow u^1 \text{ fortemente em } L^2(0,L), \tag{3.16}$$

$$v^{1p}\rightarrow v^1 \text{ fortemente em } L^2(0,L), \tag{3.17}$$

$$u_x^{0jp}(L,\cdot)+u^{1p}(L,\cdot)=0 \text{ em } \ (0,T)\,, \tag{3.18}$$

$$u_x^{0jp}(L,\cdot)+v_x^{0jp}(L,\cdot)+v_t^{0jp}(L,\cdot)=0 \text{ em } \ (0,T)\,, \tag{3.19}$$

$$a_p \to a \text{ fortemente em } L^2(Q), \tag{3.20}$$

$$b_p \to b \text{ fortemente em } L^2(Q). \tag{3.21}$$

Para cada dois ternos $(u^{0jp}, u^{1p}, a_p)\,,\ (v^{0jp}, v^{1p}, b_p) \in [V \cap H^2(0,L)] \times V \times H^1(0,L,L^2(0,L))$, temos que existem únicas funções $u_{jp\nu}, v_{jp\nu} : Q \to \mathbb{R}$ nas condições do Teorema 2.1. Desta forma temos a seguinte equação

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho h^3}{12}\left(u_{tt}^{jp\nu}(t),\psi\right) + \rho h\left(v_{tt}^{jp\nu}(t),\varphi\right) + K\left(\left(u^{jp\nu} + v_x^{jp\nu}\right)(t),\psi + \varphi_x\right) + \left(u^{jp\nu}(t),\psi\right)\\
&+u_t^{jp\nu}(L,t)\,\psi(L,t) + v_t^{jp\nu}(L,t)\,\varphi(L,t) + \left(f_\nu(u^{jp\nu}(t)),\psi\right) + \left(g_\nu(v^{jp\nu}(t)),\varphi\right)\\
&= \left(a_p(t),\psi\right) + \left(b_p(t),\varphi\right).
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Estimativas. Fazendo $\psi = 2u_t^{jp\nu}$ e $\varphi = 2v_t^{jp\nu}$ em (3.22), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho h^3}{12}\frac{d}{dt}\left|u_t^{jp\nu}(t)\right|^2 + \rho h\frac{d}{dt}\left|v_t^{jp\nu}(t)\right|^2 + K\frac{d}{dt}\left|\left(u^{jp\nu} + v_x^{jp\nu}\right)(t)\right|^2 + \frac{d}{dt}\left|\left|u^{jp\nu}(t)\right|\right|^2\\
&+2\left|u_t^{jp\nu}(L,t)\right|^2 + 2\left|v_t^{jp\nu}(L,t)\right|^2 + 2\left(f_\nu(u^{jp\nu}(t)),u_t^{jp\nu}(t)\right) + 2\left(g_\nu(v^{jp\nu}(t)),v_t^{jp\nu}(t)\right)\\
&= 2\left(a_p(t),u_t^{jp\nu}(t)\right) + 2\left(b_p(t),v_t^{jp\nu}(t)\right).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Integrando a equação (3.23) de 0 a $t \leq T$, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho h^3}{12}\left|u_t^{jp\nu}(t)\right|^2 + \rho h\left|v_t^{jp\nu}(t)\right|^2 + K\left|(u^{jp\nu} + v_x^{jp\nu})(t)\right|^2 + \left|\left|u^{jp\nu}(t)\right|\right|^2 + 2\int_0^t\left|u_t^{jp\nu}(L,s)\right|^2 ds\\
&+2\int_0^t\left|v_t^{jp\nu}(L,s)\right|^2 ds + 2\int_0^t\left(f_\nu(u^{jp\nu}),u_t^{jp\nu}(s)\right)ds + 2\int_0^t\left(g_\nu(v^{jp\nu}),v_t^{jp\nu}(s)\right)ds = \frac{\rho h^3}{12}\left|u_t^{1p}\right|^2\\
&+\rho h\left|v_t^{1p}\right|^2 + K\left|u^{0jp} + v_x^{0p\nu}\right|^2 + \left|\left|u^{0jp}\right|\right|^2 + 2\int_0^t\left(a_p(s),u_t^{jp\nu}(s)\right)ds + 2\int_0^t\left(b_p(s),v_t^{jp\nu}(s)\right)ds.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Usando a desigualdade de Young em (3.24) segue que

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho h^3}{12}\left|u_t^{jp\nu}(t)\right|^2+\rho h\left|v_t^{jp\nu}(t)\right|^2+K\left|(u^{jp\nu}+v_x^{jp\nu})(t)\right|^2+\left\|u^{jp\nu}(t)\right\|^2+2\int_0^t\left|u_t^{jp\nu}(L,s)\right|^2ds\\
&+2\int_0^t\left|v_t^{jp\nu}(L,s)\right|^2ds+2\int_0^L F_\nu\left(u^{jp\nu}(x,t)\right)dx+2\int_0^L G_\nu\left(v^{jp\nu}(x,t)\right)dx\leq\frac{\rho h^3}{12}\left|u_t^{1p}\right|^2\\
&+\rho h\left|v_t^{1p}\right|^2+K\left|u^{0jp}+v_x^{0p\nu}\right|^2+||u^{0jp}||^2+2\int_0^L F_\nu(u^{0jp})dx+2\int_0^L G_\nu(v^{0jp})dx\\
&+\int_0^T|a_p(x,t)|^2dt+\int_0^T\left|u_t^{jp\nu}(t)\right|^2dt+\int_0^T|b_p(x,t)|^2dt+\int_0^T\left|v_t^{jp\nu}(t)\right|^2dt.
\end{aligned}\tag{3.25}$$

onde $F_\nu(t)=\int_0^t f_\nu(s)ds$ e $G_\nu(t)=\int_0^t g_\nu(s)ds$.

Observação 3.1 *Obteremos estimativas para os termos* $\int_0^L F_\nu\left(u^{0jp}(x)\right)dx$ *e* $\int_0^L G_\nu\left(v^{0jp}(x)\right)dx$. *Como* u^{0j} *e* v^{0j} *são limitadas quase sempre em* $[0,L]$, $\forall j\in\mathbb{N}$, *temos que*

$$f_\nu(u^{0j})\to f\left(u^{0j}\right)\ \textit{uniformemente em}\ (0,L),$$

$$g_\nu(v^{0j})\to g\left(v^{0j}\right)\ \textit{uniformemente em}\ (0,L).$$

Logo

$$\int_0^L F_\nu\left(u^{0j}(x)\right)dx\to\int_0^L F\left(u^{0j}(x)\right)dx\ \textit{uniformemente em}\ \mathbb{R},\tag{3.26}$$

$$\int_0^L G_\nu\left(v^{0j}(x)\right)dx\to\int_0^L G\left(v^{0j}(x,t)\right)dx\ \textit{uniformemente em}\ \mathbb{R}.\tag{3.27}$$

Por (3.12) *e* (3.13), *existem subsequências de* $(u^{0j})_{j\in\mathbb{N}}$ *e* $(v^{0j})_{j\in\mathbb{N}}$ *ainda denotadas por* $(u^{0j})_{j\in\mathbb{N}}$ *e* $(v^{0j})_{j\in\mathbb{N}}$, *tais que*

$$u^{0j}\to u^0\ \textit{q.s em}\ (0,L),$$

$$v^{0j}\to v^0\ \textit{q.s em}\ (0,L).$$

Então, como F *e* G *são contínuas, temos que* $F(u^{0j})\to F(u^0)$ *e* $G(v^{0j})\to G(v^0)$ *q.s em* $[0,L]$. *Temos também que* $F(u^{0j})\leq F(u^0)$ *e* $G(v^{0j})\leq G(v^0)$. *Assim por* (3.4) *e o Teorema 1.4, obtemos*

$$F(u^{0j})\to F(u^0)\ \textit{fortemente em}\ L^1(0,L),\tag{3.28}$$

$$G(v^{0j}) \to G(v^0) \text{ fortemente em } L^1(0,L). \tag{3.29}$$

Fazendo o mesmo raciocínio para F_ν e G_ν, segue que

$$F_\nu(u^{0jp}) \to F_\nu(u^{0j}) \text{ fortemente em } L^1(0,L), \tag{3.30}$$

$$G_\nu(v^{0jp}) \to G_\nu(v^{0j}) \text{ fortemente em } L^1(0,L). \tag{3.31}$$

Por $(3.26)-(3.31)$, *temos*

$$\int_0^L F_\nu(u^{0jp}(x))dx \to \int_0^L F\left(u^0(x)\right) dx \text{ fortemente em } \mathbb{R}, \tag{3.32}$$

e

$$\int_0^L G_\nu(v^{0jp}(x))dx \to \int_0^L G(v^0(x))dx \text{ fortemente em } \mathbb{R}. \tag{3.33}$$

Então

$$\int_0^L F_\nu(u^{0jp}(x)dx \le C \text{ e } \int_0^L G_\nu(v^{0jp}(x)dx \le C, \tag{3.34}$$

onde a constante $C > 0$ independe de j, p e ν.

Assim, usando $(3.12)-(3.17)$, (3.20), (3.21), e (3.34) em (3.25), obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{\rho h^3}{12}\left|u_t^{jp\nu}(t)\right|^2+\rho h\left|v_t^{jp\nu}(t)\right|^2+K\left|(u^{jp\nu}+v_x^{jp\nu})(t)\right|^2+||u^{jp\nu}(t)||^2+2\int_0^t\left|u_t^{jp\nu}(L,s)\right|^2ds\\&+2\int_0^t\left|v_t^{jp\nu}(L,s)\right|^2ds\le C_1+\int_0^t\left|u_t^{jp\nu}\right|^2dt+\int_0^t\left|v_t^{jp\nu}\right|^2dt,\end{aligned} \tag{3.35}$$

com $C_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}C_1 \ge{}& \frac{\rho h^3}{12}\left|u^{1p}\right|^2+\rho h\left|v^{1p}\right|^2+K\left|u^{0jp}+v_x^{0p\nu}\right|^2+||u^{0jp}||^2+2\int_0^L F_\nu(u^{0jp})dx\\&+2\int_0^L G_\nu(v^{0jp})dx+\int_0^T\left|a_p(x,t)\right|^2dt+\int_0^T\left|b_p(x,t)\right|^2dt.\end{aligned}$$

Usando o Lema 1.4(Desigualdade de Gronwall) em (3.35), segue que

$$\begin{aligned}&\frac{\rho h^3}{12}\left|u_t^{jp\nu}(t)\right|^2+\rho h\left|v_t^{jp\nu}(t)\right|^2+K\left|(u^{jp\nu}+v_x^{jp\nu})(t)\right|^2+||u^{jp\nu}(t)||^2\\&+2\int_0^t\left|u_t^{jp\nu}(L,s)\right|^2ds+2\int_0^t\left|v_t^{jp\nu}(L,s)\right|^2ds\le C_2,\end{aligned} \tag{3.36}$$

onde $C_2 > 0$ independe de j, p, ν e t.

Passagem ao limite. Por (3.36), obtemos

$$(u^{jp\nu}) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T,V), \tag{3.37}$$

$$(v^{jp\nu}) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T,V), \tag{3.38}$$

$$(u_t^{jp\nu}) \text{ é limitada em } L^2(Q), \tag{3.39}$$

$$(v_t^{jp\nu}) \text{ é limitada em } L^2(Q), \tag{3.40}$$

$$(u_t^{jp\nu}(L,\cdot)) \text{ é limitada em } L^2(0,T), \tag{3.41}$$

$$(v_t^{jp\nu}(L,\cdot)) \text{ é limitada em } L^2(0,T), \tag{3.42}$$

Por (2.12) e (2.13) temos

$$u_x^{jp\nu}(L,\cdot) + u_t^{jp\nu}(L,\cdot) = 0 \text{ em } (0,T), \tag{3.43}$$

e

$$u^{jp\nu}(L,\cdot) + v_x^{jp\nu}(L,\cdot) + v_t^{jp\nu}(L,\cdot) = 0 \text{ em } (0,T), \tag{3.44}$$

que juntamente com (3.37), (3.41) e (3.42), garante-nos

$$u_x^{jp\nu}(L,\cdot) \text{ é limitado em } L^2(0,T), \tag{3.45}$$

$$v_x^{jp\nu}(L,\cdot) \text{ é limitado em } L^2(0,T). \tag{3.46}$$

Como as limitações acima são válidas para todo terno $(j,p,\nu) \in \mathbb{N}^3$, em particular tomaremos para o terno $(p,p,p) \in \mathbb{N}^3$. Assim, existem duas subsequências $(u^{ppp})_{p\in\mathbb{N}}$ e $(v^{ppp})_{p\in\mathbb{N}}$,que denotaremos por $(u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ e $(v^p)_{p\in\mathbb{N}}$ satisfazendo as mesmas limitações. Pelo Teorema 1.3, existem funções $u, v : Q \to \mathbb{R}$ e $\chi, \Sigma :]0,T[\to \mathbb{R}$ tais que

$$u^p \to u \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0,T,V), \tag{3.47}$$

$$v^p \to v \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0,T,V), \tag{3.48}$$

$$u_t^p \to u_t \text{ fracamente em } L^2(Q), \tag{3.49}$$

$$v_t^p \rightarrow v_t \text{ fracamente em } L^2(Q), \tag{3.50}$$

$$u_x^p(L,\cdot) \rightarrow \chi \text{ fracamente em } L^2(0,T), \tag{3.51}$$

$$v_x^p(L,\cdot) \rightarrow \Sigma \text{ fracamente em } L^2(0,T), \tag{3.52}$$

$$u_t^p(L,\cdot) \rightarrow u_t(L,\cdot) \text{ fracamente em } L^2(0,T), \tag{3.53}$$

$$v_t^p(L,\cdot) \rightarrow v_t(L,\cdot) \text{ fracamente em } L^2(0,T), \tag{3.54}$$

Pelo Teorema 2.1, temos que

$$\frac{\rho h^3}{12} u_{tt}^p - u_{xx}^p + K(u^p + v_x^p) + f_p(u^p) = a_p \text{ em } L^2(Q), \tag{3.55}$$

$$\rho h v_{tt}^p - K\left(u^p + v_x^p\right)_x + g_p(v^p) = b_p \text{ em } L^2(Q) \tag{3.56}$$

$$u_x^p\left(L,\cdot\right) + u_t^p\left(L,\cdot\right) = 0 \text{ em } \left(0,T\right), \tag{3.57}$$

$$u^p\left(L,\cdot\right) + v_x^p\left(L,\cdot\right) + v_t^p\left(L,\cdot\right) = 0 \text{ em } \left(0,T\right). \tag{3.58}$$

De $(3.47) - (3.50)$, temos que u^p e v^p pertencem a $H^1(Q)$, que é imerso compactamente em $L^2(Q)$(ver Teorema 1.2), logo existem subsequências de (u^p) e (v^p), que denotaremos da mesma forma, tais que

$$u^p \rightarrow u \text{ q.s em } Q, \tag{3.59}$$

$$v^p \rightarrow v \text{ q.s em } Q. \tag{3.60}$$

Como f, g são contínuas, segue

$$f(u^p) \rightarrow f(u) \text{ q.s em } Q,$$

$$g(v^p) \rightarrow g(v) \text{ q.s em } Q.$$

Como $u^p(x,t)$ e $v^p(x,t)$ são limitados em $\mathbb{R}$,

$$f_p(u^p) \rightarrow f(u^p) \text{ q.s em } Q,$$

$$g_p(v^p) \rightarrow g(v^p) \text{ q.s em } Q.$$

Portanto

$$f_p(u^p) \to f(u) \text{ q.s em } Q, \tag{3.61}$$

$$g_p(v^p) \to g(v) \text{ q.s em } Q. \tag{3.62}$$

Fazendo o produto interno em $L^2(Q)$ da equação (3.55) com $u^p(t)$, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho h^3}{12}\int_0^T (u^p_{tt}(t), u^p(t))dt + \int_0^T ((u^p(t), u^p(t)))dt + \int_0^T u^p_t(L,T)u^p(L,T)dt \\
&+K\int_0^T ((u^p + v^p_x)(t), u^p(t))dt + \int_0^T (f_p(u^p(t)), u^p(t))dt = \int_0^T (a_p(t), u^p(t))dt.
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Mas

$$(u^p_{tt}, u^p) = \frac{d}{dt}(u^p_t, u^p) - |u^p_t|^2. \tag{3.64}$$

Logo, substituindo a identidade (3.64) na equação (3.63), segue que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (f_p(u^p(t)), u^p(t)) = \int_0^T (a_p(t), u^p(t)) + \frac{\rho h^3}{12}\int_0^T |u^p_t(t)|^2 dt - \frac{\rho h^3}{12}\int_0^T \frac{d}{dt}(u^p_t(t), u^p(t))dt \\
&-\int_0^T u^p_t(L,T)u^p(L,T)dt - \int_0^T ((u^p(t), u^p(t)))dt - K\int_0^T ((u^p + v^p_x)(t), u^p(t))dt,
\end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (f_p(u^p(t)), u^p(t)) = \int_0^T (a_p(t), u^p(t)) + \frac{\rho h^3}{12}\int_0^T |u^p_t(t)|^2 dt - \frac{\rho h^3}{12}(u^p_t(T), u^p(T)) \\
&+\frac{\rho h^3}{12}(u^p_t(0), u^p(0)) - \int_0^T u^p_t(L,T)u^p(L,T)dt - \int_0^T ((u^p(t), u^p(t)))dt \\
&-K\int_0^T ((u^p + v^p_x)(t), u^p(t))dt.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Aplicando as desigualdades de Schwarz e Young em (3.65), obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (f_p(u^p(t)), u^p(t)) \leq \frac{1}{2}\int_0^T |a_p(t)|^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^T |u^p(t)|^2 dt + \frac{\rho h^3}{12}\int_0^T |u^p_t(t)|^2 dt \\
&+\frac{\rho h^3}{12}|(u^p_t(T), u^p(T))| + \frac{\rho h^3}{12}|(u^p_t(0), u^p(0))| + \frac{1}{2}\int_0^T |u^p_t(L,t)|^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^T |u^p(L,t)|^2 dt \\
&+\int_0^T ||u^p(t)||\, dt + \frac{K}{2}\int_0^T |(u^p + v^p_x)(t)|^2 dt + \frac{K}{2}\int_0^T |u^p(t)|^2 dt.
\end{aligned}$$

Usando as estimativas (3.37), (3.39), (3.41), sabendo que $a_p \in H^1(0,T,L^2(0,L))$ e $(u^p + v_x^p)$ é limitado em $L^\infty(0,T,L^2(0,L))$, temos

$$\int_0^T (f_p(u^p(t)), u^p(t)) \leq C_3, \tag{3.66}$$

onde $C_3 > 0$ independe de p.

Dos resultados (3.61), (3.66) e pelo Teorema 1.5, segue que

$$f_p(u^p) \to f(u) \text{ fortemente em } L^1(Q). \tag{3.67}$$

Fazendo o produto interno em $L^2(Q)$ de (3.56) com $v^p(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} &\rho h \int_0^T (v_{tt}^p(t), v^p(t))dt + K\int_0^T ((u^p + v_x^p)(t), v_x^p(t))dt + \int_0^T K v_t^p(L,t)v^p(L,t)dt \\ &+\int_0^T (g_p(v^p(t)), v^p(t))dt = \int_0^T (b_p(t), v^p(t))dt. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Mas

$$\rho h(v_{tt}^p(t), v^p(t)) = \frac{d}{dt}(v_t^p(t), v^p(t)) - |v_t^p(t)|^2. \tag{3.69}$$

Logo, substituindo a igualdade (3.69) em (3.68), temos

$$\begin{aligned} &\int_0^T (g_p(v^p(t)), v^p(t))dt = \int_0^T (b_p(t), v^p(t))dt + \rho h \int_0^T |v_t^p(t)|^2 dt - \rho h(v_t^p(T), v^p(T)) \\ &+\rho h(v_t^p(0), v^p(0)) - K\int_0^T ((u^p + v_x^p)(t), v_x^p(t))dt - K\int_0^T v_t^p(L,t)v^p(L,t)dt. \end{aligned} \tag{3.70}$$

Aplicando em (3.70) as desigualdades de Schwarz e Young, segue que

$$\begin{aligned} &\int_0^T (g_p(v^p(t)), v^p(t))dt \leq \frac{1}{2}\int_0^T |b_p(t)|^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^T |v^p(t)|^2 dt + \rho h\int_0^T |v_t^p(t)|^2 dt \\ &+\rho h\,|(v_t^p(T), v^p(T))| + \rho h\,|(v_t^p(0), v^p(0))| + \frac{K}{2}\int_0^T |(u^p + v_x^p)(t)|^2 dt + \frac{K}{2}\int_0^T |v_x^p(t)|^2 dt \\ &+\frac{K}{2}\int_0^T |v_t^p(L,t)|^2 dt + \frac{K}{2}\int_0^T |v^p(L,t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Usando (3.38), (3.40), (3.42) e sabendo que $b_p(x,t) \in H^1(0,T,L^2(0,L))$ e $(u^p + v_x^p)$ é limitado em $L^\infty(0,T,L^2(0,L))$, temos

$$\int_0^T (g_p(v^p), v^p)dt \leq C_4, \tag{3.71}$$

onde $C_4 > 0$ independe de p.

Por (3.62), (3.71) e pelo Teorema 1.5

$$g_p(v^p) \to g(v) \text{ fortemente em } L^1(Q). \tag{3.72}$$

Multiplicando (3.55) por $\gamma\theta$, com $\gamma \in \mathcal{D}(0,L)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando em Q, obtemos

$$\begin{aligned}
&-\frac{\rho h^3}{12}\int_0^T (u_t^p(t),\gamma)\theta' dt + +\int_0^T ((u^p(t),\gamma))\theta dt + \int_0^T u_t^p(L,T)\gamma(L,T)\theta dt \\
&+K\int_0^T ((u^p + v_x^p)(t),\gamma)\theta dt + \int_0^T (f_p(u^p(t)),\gamma)\theta dt = \int_0^T (a_p(t),\gamma)\theta dt.
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Aplicando as convergências (3.20), (3.47) – (3.49), (3.53) e (3.67) em (3.73), temos

$$\begin{aligned}
&-\frac{\rho h^3}{12}\int_0^T (u_t(t),\gamma)\theta' dt + +\int_0^T ((u(t),\gamma))\theta dt + \int_0^T u_t(L,T)\gamma(L,T)\theta dt \\
&+K\int_0^T ((u + v_x)(t),\gamma)\theta dt + \int_0^T (f(u(t)),\gamma)\theta dt = \int_0^T (a(t),\gamma)\theta dt,
\end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho h^3}{12}\int_0^T \langle u_{tt}(t),\gamma\rangle_{\mathcal{D}'(0,L),\mathcal{D}(0,L)}\theta dt - \int_0^T \langle u_{xx}(t),\gamma\rangle_{\mathcal{D}'(0,L),\mathcal{D}(0,L)}\theta dt + K\int_0^T ((u+v_x)(t),\gamma)\theta dt \\
&+\int_0^T (f(u(t)),\gamma)\theta dt = \int_0^T (a(t),\gamma)\theta dt,
\end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \frac{\rho h^3}{12}\langle u_{tt}(t),\gamma\rangle_{\mathcal{D}'(0,L),\mathcal{D}(0,L)} - \langle u_{xx}(t),\gamma\rangle_{\mathcal{D}'(0,L),\mathcal{D}(0,L)} + K((u+v_x)(t),\gamma) + (f(u(t)),\gamma) \\
&-(a(t),\gamma),\theta\Big\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} = 0,\ \forall\gamma \in \mathcal{D}(0,L) \text{ e } \forall\theta \in \mathcal{D}(0,T).
\end{aligned}$$

Assim

$$\left\langle \frac{\rho h^3}{12}u_{tt}(t) - u_{xx}(t) + K(u+v_x)(t) + f(u(t)) - a(t),\gamma \right\rangle_{\mathcal{D}'(0,L),\mathcal{D}(0,L)} = 0,$$

para todo $\gamma \in \mathcal{D}(0,L)$, no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$. Portanto

$$\frac{\rho h^3}{12}u_{tt} - u_{xx} + K(u+v_x) + f(u) = a \text{ em } \mathcal{D}'(Q).$$

Como $u \in L^\infty(0,T,V)$ então $u_{xx} \in L^\infty(0,T,V')$. Por este fato, (3.20), (3.48) e (3.67), obtemos

$$\frac{\rho h^3}{12}u_{tt} - u_{xx} + K(u+v_x) + f(u) = a \text{ em } L^1(0,T,V' + L^1(0,L)). \tag{3.74}$$

Multiplicando (3.56) por $\gamma\theta$, com $\gamma \in \mathcal{D}(0,L)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando em Q, obtemos

$$\begin{aligned}&-\rho h\int_0^T (v_t^p(t), \gamma)\theta' dt + K\int_0^T ((u^p + v_x^p)(t), \gamma_x)\theta dt - K\int_0^T v_t^p(L,t)\gamma(L,t)dt \\ &+\int_0^T (g_p(v^p(t)), \gamma)\theta dt = \int_0^T (b_p(t), \gamma)\theta dt.\end{aligned} \tag{3.75}$$

Aplicando as convergências (3.21), (3.47), (3.48) , (3.50), (3.54) e (3.72) em (3.75), temos que

$$\begin{aligned}&-\rho h\int_0^T (v_t(t), \gamma)\theta' dt + K\int_0^T ((u + v_x)(t), \gamma_x)\theta dt - K\int_0^T v_t(L,t)\gamma(L,t)dt \\ &+\int_0^T (g(v(t)), \gamma)\theta dt = \int_0^T (b(t), \gamma)\theta dt,\end{aligned}$$

o que implica

$$\rho h\int_0^T \langle v_{tt}(t), \gamma\rangle_{\mathcal{D}'(0,L),\mathcal{D}(0,L)}\theta dt - K\int_0^T ((u+v_x)_x(t), \gamma)\theta dt + \int_0^T (g(v(t)), \gamma)\theta dt = \int_0^T (b(t), \gamma)\theta dt,$$

ou seja

$$\left\langle \rho h\langle v_{tt}(t), \gamma\rangle_{\mathcal{D}'(0,L),\mathcal{D}(0,L)} - K((u+v_x)_x(t), \gamma) + (g(v(t)), \gamma) - (b(t), \gamma), \theta\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} = 0,$$

para todo $\gamma \in \mathcal{D}(0,L)$ e para todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Assim, segue que

$$\langle \rho h v_{tt}(t) - K(u+v_x)_x(t) + g(v(t)) - b(t), \gamma\rangle_{\mathcal{D}'(0,L),\mathcal{D}(0,L)} = 0,$$

para todo $\gamma \in \mathcal{D}(0,L)$ no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$. Portanto

$$\rho h v_{tt} - K(u+v_x)_x + g(v) = b \text{ em } \mathcal{D}'(Q).$$

Como $v \in L^\infty(0,T,V)$ então $v_{xx} \in L^\infty(0,T,V')$. Por (3.21), (3.47) e (3.72), obtemos

$$\rho h v_{tt} - K(u+v_x)_x + g(v) = b \text{ em } L^1(0,T,V' + L^1(0,L)). \tag{3.76}$$

Aplicando agora as convergências (3.47), (3.49) – (3.52) em (3.57) e (3.58), obtemos

$$\chi + u_t\,(L,\cdot) = 0 \text{ em } L^2(0,T), \tag{3.77}$$

e

$$u\,(L,\cdot) + \Sigma + v_t\,(L,\cdot) = 0 \text{ em } L^2(0,T). \tag{3.78}$$

Provemos agora que $u_x\,(L,\cdot) = \chi$ e $v_x\,(L,\cdot) = \Sigma$.

- $u_x(L,\cdot) = \chi$

Por (3.74) e (3.76), temos que

$$-u_{xx} = a\,(x,t) - \frac{\rho h^3}{12} u_{tt} - K(u+v_x) - f(u), \tag{3.79}$$

$$-v_{xx} = b\,(x,t) + K u_x - \rho h v_{tt} - g(v). \tag{3.80}$$

Como em (3.79), $a(x,t),\ u_t,\ (u+v_x) \in L^2(Q)$ e $f(u) \in L^1(Q)$, pelas Proposições 1.2 e 1.4 concluimos que existem funções $y,\ z,\ w \in L^2(0,T,V \cap H^2(0,L))$ e $\eta \in L^1(0,T,L^2(0,L))$ tais que $-y_{xx} = a(x,t)$, $-z_{xx} = u_t$, $-w_{xx} = u + v_x$ e $-\eta_{xx} = f(u)$. Consequentemente.

$$-u_{xx} = -y_{xx} + \frac{\rho h^3}{12}(z_{xx})_t + K w_{xx} + \eta_{xx}. \tag{3.81}$$

Multiplicando (3.81) por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando por partes de 0 a T, obtemos

$$-\int_0^T u_{xx}\theta dt + \int_0^T y_{xx}\theta dt + \frac{\rho h^3}{12}\int_0^T z_{xx}\theta' dt - K\int_0^T w_{xx}\theta dt = \int_0^T \eta_{xx}\theta dt,$$

Logo

$$-\left[\int_0^T u\theta dt - \int_0^T y\theta dt - \frac{\rho h^3}{12}\int_0^T z\theta' dt + K\int_0^T w\theta dt\right]_{xx} = -\left[\int_0^T -\eta\theta dt\right]_{xx}.$$

Pela unicidade do problema dado na Proposição 1.4, obtemos

$$\int_0^T \left(u - y + \frac{\rho h^3}{12} z_t + K w + \eta\right)\theta dt = 0,\ \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T),$$

ou seja,

$$u = y - \frac{\rho h^3}{12} z_t - K w - \eta. \tag{3.82}$$

Temos que $z_{xt}(L,\cdot) = (z_x(L,\cdot))_t$ (ver [24], Lema 3.2). Portanto aplicando o traço de ordem 1 (Teoremas 1.1 e 1.2) em (3.82) temos que

$$u_x(L,\cdot) = y_x(L,\cdot) - \frac{\rho h^3}{12}(z_x(L,\cdot))_t - Kw_x(L,\cdot) - \eta_x(L,\cdot) \in H^{-1}(0,T) + L^1(0,T).$$

Sabemos por (3.55) que

$$-u^p_{xx} = a_p - \frac{\rho h^3}{12}u^p_{tt} - K(u^p + v^p_x) - f_p(u^p).$$

Como $a_p(x,t),\ u^p_t,\ (u^p + v^p_x),\ f_p(u^p) \in L^2(Q)$, e pela Proposição 1.2, existem únicas funções $y^p,\ z^p,\ w^p,\ \eta^p \in L^2(0,T,V\cap H^2(0,L))$ tais que $-y^p_{xx} = a_p(x,t)$, $-z^p_{xx} = u^p_t$, $-w^p_{xx} = u^p + v^p_x$ e $-\eta^p_{xx} = f_p(u^p)$. Assim, como foi feito anteriormente,

$$-u^p_{xx} = -y^p_{xx} + \frac{\rho h^3}{12}(z^p_{xx}) + Kw^p_{xx} + \eta^p_{xx}$$

e

$$u^p = y^p - \frac{\rho h^3}{12}z^p_t - Kw^p - \eta^p. \tag{3.83}$$

Por (3.20), (3.47) – (3.49), e (3.67), obtemos

$$y^p \to y \text{ fracamente em } L^2(0,T,V\cap H^2(0,L)), \tag{3.84}$$

$$z^p \to z \text{ fracamente em } L^2(0,T,V\cap H^2(0,L)), \tag{3.85}$$

$$w^p \to w \text{ fracamente em } L^2(0,T,V\cap H^2(0,L)), \tag{3.86}$$

$$\eta^p \to \eta \text{ fortemente em } L^1(0,T,E). \tag{3.87}$$

De (3.85), concluímos de acordo com os resultados obtidos por Milla Miranda em [23], que

$$z^p_t \to z_t \text{ fracamente em } H^{-1}(0,T,V\cap H^2(0,L)). \tag{3.88}$$

De (3.84) – (3.88) e pela continuidade do traço, obtemos

$$y^p_x(L,\cdot) \to y_x(L,\cdot) \text{ fracamente em } L^2(0,T), \tag{3.89}$$

$$\eta^p_x(L,\cdot) \to \eta_x(L,\cdot) \text{ fortemente em } L^1(0,T), \tag{3.90}$$

$$z_{xt}^p(L,\cdot) \rightarrow z_{xt}(L,\cdot) \text{ fracamente em } H^{-1}(0,T), \tag{3.91}$$

$$w_x^p(L,\cdot) \rightarrow w_x(L,\cdot) \text{ fracamente em } L^2(0,T). \tag{3.92}$$

Observando as convergências (3.89) – (3.92), segue de (3.82) e (3.83) que

$$u_x^p(L,\cdot) \rightarrow u_x(L,\cdot) \text{ fracamente em } \left[H^1(0,T) \cap L^\infty(0,T)\right]'. \tag{3.93}$$

Desta forma, comparando (3.51) e (3.93), podemos concluir

$$\chi = u_x\,(L,\cdot) \text{ em } L^2(0,T). \tag{3.94}$$

- $v_x\,(L,\cdot) = \Sigma.$

Como em (3.80), $b(x,t),\ u_x,\ v_t \in L^2(Q)$ e $g(v) \in L^1(Q)$, pelas Proposições 1.2 e 1.4, existem únicas funções $\alpha,\ \beta,\ \phi \in L^2(0,T,V \cap H^2(0,L))$ e $\zeta \in L^1(0,T,L^2(0,L))$ tais que $-\alpha_{xx} = b(x,t),\ -\beta_{xx} = u_x,\ -\phi_{xx} = v_t$ e $-\zeta_{xx} = g(v)$. Consequentemente

$$-Kv_{xx} = -\alpha_{xx} - K\beta_{xx} + \rho h(\phi_{xx}) + \zeta_{xx}. \tag{3.95}$$

Multiplicando (3.95) por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando por partes de 0 a T, obtemos

$$-K\int_0^T v_{xx}\theta dt + \int_0^T \alpha_{xx}\theta dt + \int_0^T K\beta_{xx}\theta dt + \rho h \int_0^T \phi_{xx}\theta' dt = \int_0^T \zeta_{xx}\theta dt,$$

Logo

$$-\left[K\int_0^T v\theta dt - \int_0^T \alpha\theta dt - \int_0^T K\beta\theta dt - \rho h\int_0^T \phi\theta' dt\right]_{xx} = -\left[\int_0^T -\zeta\theta dt\right]_{xx}.$$

Pela unicidade do problema na Proposição 1.4, obtemos

$$\int_0^T \left(Kv - \alpha - K\beta - \rho h\phi_t + \zeta\right)\theta dt = 0,\ \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T)$$

ou seja

$$Kv = \alpha + K\beta - \rho h\phi_t - \zeta. \tag{3.96}$$

Temos que $\phi_{xt}(L,\cdot) = (\phi_x(L,\cdot))_t$ (ver [24], Lemma 3.2). Portanto aplicando o traço de ordem 1(Teoremas 1.1 e 1.2) em (3.96), temos

$$Kv_x(L,\cdot) = \alpha_x(L,\cdot) + K\beta_x(L,\cdot) - \rho h(\phi_x(L,\cdot))_t - \zeta_x(L,\cdot) \in H^{-1}\left(0,T\right) + L^1(0,T).$$

Sabemos por (3.56) que

$$-Kv^p_{xx} = b_p + Ku^p_x - \rho h v^p_{tt} - g_p(v^p).$$

Como $b_p(x,t)$, u^p_x, v^p_t, $g_p(v^p) \in L^2(Q)$, e pela Proposição 1.2, existem únicas funções α^p, β^p, ϕ^p, $\zeta^p \in L^2(0,T,V \cap H^2(0,L))$ tais que $-\alpha^p_{xx} = b_p(x,t)$, $-\beta^p_{xx} = u^p_x$, $-\phi^p_{xx} = v^p_t$ e $-\zeta^p_{xx} = g_p(v^p)$. Assim, de modo análogo ao feito anteriormente, obtemos

$$-Kv_{xx} = -\alpha^p_{xx} - K\beta^p_{xx} + \rho h(\phi^p_{xx})_t + \zeta^p_{xx}$$

e

$$Kv^p = \alpha^p + K\beta^p - \rho h \phi^p_t - \zeta^p \tag{3.97}$$

Por (3.21), (3.47), (3.50) e (3.72), obtemos

$$\alpha^p \to \alpha \text{ fracamente em } L^2(0,T,V \cap H^2(0,L)), \tag{3.98}$$

$$\beta^p \to \beta \text{ fracamente em } L^2(0,T,V \cap H^2(0,L)), \tag{3.99}$$

$$\phi^p \to \phi \text{ fracamente em } L^2(0,T,V \cap H^2(0,L)), \tag{3.100}$$

$$\zeta^p \to \zeta \text{ fortemente em } L^1(0,T,E) \tag{3.101}$$

e de (3.100) temos pelos resultados de [23], que

$$\phi^p_t \to \phi_t \text{ fracamente em } H^{-1}(0,T,V \cap H^2(0,L)). \tag{3.102}$$

De (3.98) – (3.102) e pela continuidade do traço, segue que

$$\alpha^p_x(L,\cdot) \to \alpha(L,\cdot) \text{ fracamente em } L^2(0,T), \tag{3.103}$$

$$\beta^p_x(L,\cdot) \to \beta(L,\cdot) \text{ fracamente em } L^2(0,T), \tag{3.104}$$

$$\zeta^p_x(L,\cdot) \to \zeta(L,\cdot) \text{ fortemente em } L^1(0,T), \tag{3.105}$$

$$\phi^p_x(L,\cdot) \to \phi(L,\cdot) \text{ fracamente em } H^{-1}(0,T). \tag{3.106}$$

Observando as convergências (3.103) – (3.106) , segue de (3.96) e (3.97) que

$$v^p_x(L,\cdot) \to v_x(L,\cdot) \text{ fracamente em } \left[H^1(0,T) \cap L^\infty(0,T)\right]'. \tag{3.107}$$

Por (3.52), (3.107) e pela unicidade do limite, concluimos

$$\Sigma = v_x(L, \cdot) \text{ em } L^2(0, T).$$

Condições Iniciais

Como $u, v \in L^2(0, T, V)$, $u_t, v_t \in L^2(0, T, L^2(0, L))$ e $u_{tt}, v_{tt} \in L^1(0, T, L^1(0, L) + V')$ temos pelo Teorema 1.2 que $u, v \in C^0([0, T]; L^2(0, L)) \cap C^1([0, T]; L^1(0, L) + V')$. Logo faz sentido $u(0)$, $v(0)$, $u_t(0)$ e $v_t(0)$. Assim, de modo análogo ao feito no Capítulo 2, obteremos as condições iniciais do Teorema 3.1. ■

Observação 3.2 *A unicidade deste problema para o caso geral ainda está em aberto. Porém, para algumas não linearidades particulares podemos obter a unicidade de solução. Por exemplo, para o caso em que f e g sejam do tipo*

$$f(s) = |s|^\rho s \quad e \quad g(y) = |y|^\rho y, \quad \rho > 0, \tag{3.108}$$

podemos usar um método devido a Visik e Ladyzenscaja (ver [12], pag. 15).

Para efeito ilustrativo faremos a unicidade mencionada na última observação.

- **Unicidade (Caso Particular)**

Consideremos $p = \rho + 2$ e p' seu conjugado $[(1/p) + (1/p') = 1]$ e suponhamos (u^1, v^1) e (u^2, v^2) nas condições do Teorema 3.1 (No caso particular (3.108)). Então o par (w^1, w^2), onde $w^1 = u^1 - u^2$ e $w^2 = v^1 - v^2$, satisfaz

$$w^1, w^2 \in L^\infty(0, T, V \cap L^p(0, L)), \tag{3.109}$$

$$w_t^1, w_t^2 \in L^2(Q), \tag{3.110}$$

$$\frac{\rho h^3}{12} w_{tt}^1 - w_{xx}^1 + K\left(w^1 + w_x^2\right) + \left|u^1\right|^\rho u^1 - \left|u^2\right|^\rho u^2 = 0 \text{ em } L^1\Big(0, T, V' + L^{p'}(0, L)\Big), \tag{3.111}$$

$$\rho h w_{tt}^2 - K\left(w^1 + w_x^2\right)_x + \left|v^1\right|^\rho v^1 - \left|v^2\right|^\rho v^2 = 0 \text{ em } L^1\Big(0, T, V' + L^{p'}(0, L)\Big), \tag{3.112}$$

$$w_x^1(L, \cdot) + w_t^1(L, \cdot) = 0 \text{ em } L^2(0, T), \tag{3.113}$$

$$w^1(L,\cdot)+w_x^2(L,\cdot)+w_t^2(L,\cdot)=0 \text{ em } L^2(0,T), \tag{3.114}$$

$$w^1(0)=w_t^1(0)=w^2(0)=w_t^2(0)=0 \text{ em } (0,L). \tag{3.115}$$

Notemos que não faz sentido as dualidades $\langle w_{tt}^1, w_t^1\rangle$ e $\langle w_{tt}^2, w_t^2\rangle$. Então definamos as funções

$$z^i(t)=\begin{cases} -\displaystyle\int_t^s w^i(\xi)\,d\xi, \text{ se } 0\leq t\leq s, \\ 0, \text{ se } s\leq t\leq T. \end{cases} \qquad (i=1,2)$$

Temos então que $z^i\in L^\infty(0,T,V\cap L^p(0,L))$ e $z_t^i(t)=w^i(t)$. Fazendo $w_1^i(t)=\int_0^t w^i(\xi)\,d\xi$, podemos concluir que $z^i(t)=w_1^i(t)-w_1^i(s)$.

Como $V'+L^{p'}(0,L)$ está continuamente imerso em $(V\cap L^p(0,L))'$, faz sentido as dualidades $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X',X}$ de (3.111) com z^1 e de (3.112) com z^2, onde $X=L^\infty(0,T,V\cap L^p(0,L))$.

Multiplicando (3.111) por z^1 e (3.112) por z^2 e integrando de 0 a s, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho h^3}{12}\int_0^s \langle w_{tt}^1(t), z^1(t)\rangle_{E',E}\,dt+\rho h\int_0^s \langle w_{tt}^2(t), z^2(t)\rangle_{E',E}\,dt+\int_0^s ((w^1(t), z^1(t)))\,dt\\
&+\int_0^s \left\langle |u^1(t)|^\rho u^1(t)-|u^2(t)|^\rho u^2(t), z^1(t)\right\rangle_{E',E}dt+K\int_0^s ((w^1+w_x^2)(t), z^1(t)+z_x^2(t))\,dt\\
&+\int_0^s \left\langle |v^1(t)|^\rho v^1(t)-|v^2(t)|^\rho v^2(t), z^2(t)\right\rangle_{E',E}dt=0,
\end{aligned} \tag{3.116}$$

onde $E=V\cap L^p(0,L)$.

Analisemos alguns termos de (3.116).

- $\displaystyle\int_0^s \langle w_{tt}^i(t), z^i(t)\rangle_{E',E}\,dt \;\; (i=1,2)$

  Temos que

$$\frac{d}{dt}\left(w_t^i(t), z^i(t)\right)=\left\langle w_{tt}^i(t), z^i(t)\right\rangle_{E',E}+\left(w_t^i(t), z_t^i(t)\right).$$

Logo

$$\begin{aligned}
&\int_0^s \langle w_{tt}^i(t), z^i(t)\rangle_{E',E}\,dt=\int_0^s \frac{d}{dt}(w_t^i(t), z^i(t))\,dt-\int_0^s (w_t^i(t), z_t^i(t))\,dt\\
&=(w_t^i(t), z^i(t))|_0^s-\frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}|w^i(t)|^2\,dt=-\frac{1}{2}|w^i(s)|^2+\frac{1}{2}|w^i(0)|^2=-\frac{1}{2}|w^i(s)|^2.
\end{aligned} \tag{3.117}$$

- $\displaystyle\int_0^s \left(\left(w^1(t), z^1(t)\right)\right) dt$

  Observemos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^s \left(\left(w^1(t), z^1(t)\right)\right) dt = \int_0^s \left(\left(z_t^1(t), z^1(t)\right)\right) dt = \frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}\left\|z^1(t)\right\|^2 dt \\
&= \frac{1}{2}\left\|z^1(s)\right\|^2 - \frac{1}{2}\left\|z^1(0)\right\|^2 = -\frac{1}{2}\left\|w_1^1(s)\right\|^2 .
\end{aligned} \tag{3.118}$$

- $\displaystyle\int_0^s \left(\left(w^1 + w_x^2\right)(t), z^1(t) + z_x^2(t)\right) dt$

  Temos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^s \left(\left(w^1 + w_x^2\right)(t), z^1(t) + z_x^2(t)\right) dt = \int_0^s \left(\left(z^1 + z_x^2\right)_t(t), z^1(t) + z_x^2(t)\right) dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}\left|z^1(t) + z_x^2(t)\right|^2 dt = \frac{1}{2}\left|z^1(s) + z_x^2(s)\right|^2 - \frac{1}{2}\left|z^1(0) + z_x^2(0)\right|^2 \\
&= -\frac{1}{2}\left|w_1^1(s) + w_{1x}^2(s)\right|^2 .
\end{aligned} \tag{3.119}$$

Substituindo (3.117) – (3.119) em (3.116), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho h^3}{24}\left|w^1(s)\right|^2 + \frac{\rho h}{2}\left|w^2(s)\right|^2 + \frac{1}{2}\left\|w_1^1(s)\right\|^2 + \frac{1}{2}\left|w_1^1(s) + w_{1x}^2(s)\right|^2 \\
&= \int_0^s \left\langle \left|u^2(t)\right|^\rho u^2(t) - \left|u^1(t)\right|^\rho u^1(t), z^1(t)\right\rangle_{E',E} dt \\
&+ \int_0^s \left\langle \left|v^2(t)\right|^\rho v^2(t) - \left|v^1(t)\right|^\rho v^1(t), z^2(t)\right\rangle_{E',E} dt.
\end{aligned} \tag{3.120}$$

Analisaremos agora o segundo membro de (3.120). Para isto é suficiente avaliar o primeiro termo, já que o segundo pode ser tratado de maneira análoga. Desta forma,

$$\begin{aligned}
&\int_0^s \left\langle \left|u^1(t)\right|^\rho u^1(t) - \left|u^2(t)\right|^\rho u^2(t), z^1(t)\right\rangle_{E',E} dt \\
&\leq \int_0^s \int_0^L \left|\left|u^1(x,t)\right|^\rho u^1(x,t) - \left|u^2(x,t)\right|^\rho u^2(x,t)\right| \left|z^1(x,t)\right| dxdt.
\end{aligned} \tag{3.121}$$

Observação 3.3 *Como a função $f(s) = |s|^\rho s$ de classe C^1, temos, peloTeorema do Valor Médio, que*

$|g(a) - g(b)| = |g'(\theta)|\,|a-b|$, *onde* $\theta \in (a,b)$. *Sendo* $g'(\theta) = (\rho+1)|\theta|^{\rho}$ *e* $\theta = (1-\lambda)a + \lambda b$, *para algum* $\lambda \in (0,1)$, *então*

$$\begin{aligned} |g(a)-g(b)| &= (\rho+1)|(1-\lambda)a+\lambda b|^{\rho}|a-b| \le (\rho+1)(|a|+|b|)^{\rho}|a-b| \\ &\le (\rho+1)2^{\rho} máx\{|a|^{\rho},|b|^{\rho}\}|a-b| \le (\rho+1)2^{\rho}(|a|^{\rho}+|b|^{\rho})|a-b|. \end{aligned}$$

Pela Observação 3.3, a desigualdade (3.121) *transforma-se em*

$$\begin{aligned} &\int_0^L \left||u^1(x,t)|^{\rho}u^1(x,t) - |u^2(x,t)|^{\rho}u^2(x,t)\right||z^1(x,t)|\,dx \\ &\le (\rho+1)2^{\rho}\left[\int_0^L \left(|u^1(x,t)|^{\rho}+|u^2(x,t)|^{\rho}\right)|w^1(x,t)|\,|z^1(x,t)|\,dx\right]. \end{aligned} \tag{3.122}$$

Como V *está imerso continuamente em* $L^{\infty}(0,L)$ *(Lema 1.1), segue*

$$\begin{aligned} &\int_0^L \left||u^1(x,t)|^{\rho}u^1(x,t) - |u^2(x,t)|^{\rho}u^2(x,t)\right||z^1(x,t)|\,dx \\ &\le C\int_0^L |w^1(x,t)|\,|z^1(x,t)|\,dx = C\int_0^L |w^1(x,t)|\,|w_1^1(x,t)-w_1^1(x,s)|\,dx, \end{aligned} \tag{3.123}$$

onde $C>0$, *com* $C \ge (\rho+1)2^{\rho}\left(\|u^1\|^{\rho}_{L^{\infty}(Q)} + \|u^2\|^{\rho}_{L^{\infty}(Q)}\right)$.

Usando a Desigualdade de Hölder em (3.123) e o Lema 1.1, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^L \left||u^1(x,t)|^{\rho}u^1(x,t) - |u^2(x,t)|^{\rho}u^2(x,t)\right||z^1(x,t)|\,dx \\ &\le C|w^1(t)|\,|w_1^1(t)-w_1^1(s)| \le CL|w^1(t)|\,\|w_1^1(t)-w_1^1(s)\| \\ &\le CL|w^1(t)|\left(\|w_1^1(t)\|+\|w_1^1(s)\|\right), \end{aligned} \tag{3.124}$$

Usando a Desiguladade de Young em (3.124), temos que

$$\begin{aligned} &\int_0^L \left||u^1(x,t)|^{\rho}u^1(x,t) - |u^2(x,t)|^{\rho}u^2(x,t)\right||z^1(x,t)|\,dx \\ &\le \left(\frac{1}{2}+2sCL\right)CL|w^1(t)|^2 + \frac{CL}{2}\|w_1^1(t)\|^2 + \frac{1}{8s}\|w_1^1(s)\|^2. \end{aligned} \tag{3.125}$$

Por analogia dos cálculos, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^L \left||v^1(x,t)|^{\rho}v^1(x,t) - |v^2(x,t)|^{\rho}v^2(x,t)\right||z^2(x,t)|\,dx \\ &\le \left(\frac{1}{2}+\frac{L}{2}+sCL+2sCL^3\right)CL|w^2(t)|^2 + \frac{CL^2}{2}\|w_1^1(t)\|^2 \\ &+\frac{CL}{2}|w_1^1(t)+w_{1x}^2(t)|^2 + \frac{1}{4s}|w_1^1(s)+w_{1x}^2(s)|^2 + \frac{1}{8s}\|w_1^1(s)\|^2. \end{aligned} \tag{3.126}$$

Substituindo (3.125) e (3.126) em (3.120), concluímos

$$\begin{aligned}&\frac{\rho h^3}{24}\left|w^1(s)\right|^2+\frac{\rho h}{2}\left|w^2(s)\right|^2+\frac{1}{4}\left\|w_1^1(s)\right\|^2+\frac{1}{4}\left|w_1^1(s)+w_{1x}^2(s)\right|^2\\&\leq C_1\int_0^s\left(\left|w^1(t)\right|^2+\left|w^2(t)\right|^2+\left\|w_1^1(t)\right\|^2+\left|w_1^1(t)+w_{1x}^2(t)\right|^2\right)dt,\end{aligned}\tag{3.127}$$

onde $C_1>0$ é tal que $C_1\geq\left(2+L+3sCL+2sCL^3\right)CL.$

Aplicando o Lema 1.4(Desigulade de Gronwall) em (3.127), segue

$$\left|w^1(s)\right|^2+\left|w^2(s)\right|^2+\left\|w_1^1(s)\right\|^2+\left|w_1^1(s)+w_{1x}^2(s)\right|^2=0,$$

ou seja, $\left|w^1(s)\right|=\left|w^2(s)\right|=0$. Portanto $w^1(s)=w^2(s)=0$, para todo $s\in[0,T]$, o que implica $u^1=u^2$ e $v^1=v^2$. $\blacksquare$

Capítulo 4

Comportamento Assintótico

Neste capítulo estudaremos o decaimento da energia $E(t)$ associada a solução fraca do problema $(2)-(4)$. Como foi dito na introdução, esta é definida por

$$\begin{aligned} E(t) = \; & \frac{1}{2}\left[\frac{\rho h^3}{12}\left|u_t\left(t\right)\right|^2 + \rho h\left|v_t\left(t\right)\right|^2 + K\left|\left(u+v_x\right)\left(t\right)\right|^2 + \left\|u\left(t\right)\right\|^2\right. \\ & \left. +2\int_0^L F(u(x,t))dx + 2\int_0^L G(v(x,t))dx\right]. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Consideremos as seguintes hipóteses adicionais

$$\exists\ \delta_1 \text{ tal que } f(s)s \geq (2+\delta_1)F(s),\ \forall s \in \mathbb{R}, \tag{4.2}$$

e

$$\exists\ \delta_2 \text{ tal que } g(s)s \geq (2+\delta_2)G(s),\ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

Teorema 4.1 *Sejam $L < \min\{2, 2/k\}$ e f, g, u^0, v^0, u^1, v^1 nas condições do Teorema 3.1 (com $a = b = 0$) e, além disso, f, g satisfazendo (4.2), (4.3). Então existe uma constante $\kappa > 0$ tal que a energia $E(t)$ satisfaz*

$$E(t) \leq 4E(0)e^{-\kappa t},\ \forall t \geq 0. \tag{4.4}$$

Prova: Fazendo o produto interno em $L^2(0,L)$ de (3.55) e (3.56) com $u_t^p\left(t\right)$ e $v_t^p\left(t\right)$, respectivamente, obtemos

$$E_p'(t) = -\left|u^p(L,\cdot)\right|^2 - \left|v^p(L,\cdot)\right|^2, \tag{4.5}$$

onde $E_p(t)$ é a energia similar a $E(t)$ associada a solução forte (u^p, v^p) obtida no Capítulo 3. Logo, $E_p(t)$ é não crescente.

Para um $\epsilon > 0$ arbitrário, definamos

$$E_{p_\epsilon}(t) = E_p(t) + \epsilon\Psi(t), \tag{4.6}$$

com

$$\begin{aligned} \Psi(t) = \quad & \alpha(\frac{\rho h^3}{12}u_t^p(t), xu_x^p(t)) + \alpha(\rho h v_t^p(t), xv_x^p(t)) \\ & +\beta(\frac{\rho h^3}{12}u_t^p(t), u^p(t)) + \beta(\rho h v_t^p(t), v^p(t)), \end{aligned} \tag{4.7}$$

onde $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ são tais que

$$\alpha + 2\beta > \max\left\{\alpha k L, \alpha L, 4\beta\right\}, \tag{4.8}$$

$$\exists\ \gamma_1 \text{ tal que } \beta f(s)s \geq (\alpha + \gamma_1)F(s),\ \forall s \in \mathbb{R}, \tag{4.9}$$

e

$$\exists\ \gamma_2 \text{ tal que } \beta g(s)s \geq (\alpha + \gamma_2)G(s),\ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{4.10}$$

A escolha de β é possível, pois

$$\frac{(\alpha + \gamma_1)}{(2 + \delta_1)} f(s)s \geq (\alpha + \gamma_1)F(s),$$

$$\frac{(\alpha + \gamma_2)}{(2 + \delta_2)} g(s)s \geq (\alpha + \gamma_2)G(s)$$

e

$$0 < \frac{(\alpha + \gamma_i)}{(2 + \delta i)} < \frac{\alpha}{2},\ \text{ para } 0 < \gamma_i < \frac{\alpha\delta_i}{2}\ \ (i = 1, 2)\,.$$

Usando a desigualdade de Schwarz e o fato de $H_0^1(0, L)$ estar continuamente imerso em $L^2(0, L)$ em (4.7), obtemos

$$\begin{aligned} &|\Psi(t)| \leq \alpha\frac{\rho h^3}{12} L\left|u_t^p(t)\right|\left|u_x^p(t)\right| + \alpha\rho h L\left|v_t^p(t)\right|\left|v_x^p(t)\right| + \frac{\beta\rho h^3 L}{12}\left|u_t^p(t)\right|\left|\left|u^p(t)\right|\right| \\ &+\beta\rho h L\left|v_t^p(t)\right|\left|v_x^p(t)\right| \leq \alpha\frac{\rho h^3}{12} L\left|u_t^p(t)\right|\left\|u^p(t)\right\| + \alpha\rho h L\left|v_t^p(t)\right|\left(\left|\left(u^p + v_x^p\right)(t)\right| + L\left|\left|u^p(t)\right|\right|\right) \\ &+\frac{\beta\rho h^3 L}{12}\left|u_t^p(t)\right|\left\|u^p(t)\right\| + \beta\rho h L\left|v_t^p(t)\right|\left(\left|\left(u^p + v_x^p\right)(t)\right| + L\left|\left|u^p(t)\right|\right|\right). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Aplicando a desigualdade de Young em (4.11), segue

$$\begin{aligned}|\Psi(t)| &\leq \frac{\alpha\rho h^3 L}{24}\left|u_t^p(t)\right|^2+\frac{\alpha\rho h^3 L}{24}\left\|u^p(t)\right\|^2+\frac{\alpha\rho hL}{2}\left|v_t^p(t)\right|^2+\frac{\alpha\rho hL}{2}\left|(u^p+v_x^p)(t)\right| \\ &+\frac{\alpha\rho hL}{2}\left|v_t^p(t)\right|^2+\frac{\alpha\rho hL^3}{2}\left\|u^p(t)\right\|^2+\frac{\beta\rho h^3 L}{24}\left|u_t^p(t)\right|^2+\frac{\beta\rho h^3 L}{24}\left\|u^p(t)\right\|^2 \\ &+\frac{\beta\rho hL}{2}\left|v_t^p(t)\right|^2+\frac{\beta\rho hL}{2}\left|(u^p+v_x^p)(t)\right|^2+\frac{\beta\rho hL}{2}\left|v_t^p(t)\right|^2+\frac{\beta\rho hL^3}{2}\left\|u^p(t)\right\|^2.\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}|\Psi(t)| &\leq \left(\frac{\alpha L+\beta L}{2}\right)\frac{\rho h^3}{12}\left|u_t^p(t)\right|^2+(\alpha L+\beta L)\rho h\left|v_t^p(t)\right|^2 \\ &+\left(\frac{\alpha\rho hL+\beta\rho hL}{2K}\right)K\left|(u^p+v_x^p)(t)\right|+\left[\frac{\rho h^3 L(\alpha+\beta)+12\rho hL^3(\alpha+\beta)}{24}\right]\left\|u^p(t)\right\|^2.\end{aligned}$$

Assim,

$$|\Psi(t)| \leq C_1 E_p(t), \tag{4.12}$$

onde $C_1 = \left[3+(\rho h/k)+(\rho h^3/12)+\rho hL^2\right]L(\alpha+\beta)$. Pela equação (4.6) e a desigualdade (4.12), obtemos

$$|E_{p_\epsilon}(t)-E_p(t)| = \epsilon\,|\Psi(t)| \leq \epsilon C_1 E_p(t),$$

isto é,

$$(1-\epsilon C_1)E_p(t) \leq c \leq (1+\epsilon C_1)E_p(t).$$

Tomando $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0 = 1/2C_1$, temos

$$\frac{E_p(t)}{2} \leq E_{p_\epsilon}(t) \leq 2E_p(t). \tag{4.13}$$

Derivando a função (4.7), segue que

$$\begin{aligned}\Psi'(t) &= \alpha\left(\frac{\rho h^3}{12}u_{tt}^p(t), xu_x^p(t)\right)+\alpha\left(\frac{\rho h^3}{12}u_t^p(t), xu_{xt}^p(t)\right)+\alpha(\rho hv_{tt}^p(t), xv_x^p(t)) \\ &+\alpha(\rho hv_t^p(t), xv_{xt}^p(t))+\beta\left(\frac{\rho h^3}{12}u_{tt}^p(t), u^p(t)\right)+\beta\left(\frac{\rho h^3}{12}u_t^p(t), u_t^p(t)\right) \\ &+\beta(\rho hv_{tt}^p(t), v^p(t))+\beta(\rho hv_t^p(t), v_t^p(t)).\end{aligned}$$

Usando as equações (3.55) e (3.56) na igualdade anterior

$$
\begin{aligned}
\Psi'(t) &= \alpha(u^p_{xx}(t), xu^p_x(t)) - \alpha K((u^p + v^p_x)(t), xu^p_x(t)) - \alpha(f_p(u^p(t)), xu^p_x(t)) \\
&+\alpha\left(\frac{\rho h^3}{12}u^p_t(t), xu^p_{xt}(t)\right) + \alpha K((u^p + v^p_x)_x(t), xv^p_x(t)) - \alpha(g_p(v^p(t)), xv^p_x(t)) \\
&+\alpha(\rho h v^p_t(t), xv^p_{xt}(t)) + \beta(u^p_{xx}(t), u^p(t)) - \beta K((u^p + v^p_x)(t), u^p(t)) \\
&-\beta(f_p(u^p(t)), u^p(t)) + \beta\left(\frac{\rho h^3}{12}u^p_t(t), u^p_t(t)\right) + \beta K((u^p + v^p_x)_x(t), v^p(t)) \\
&-\beta(g_p(v^p(t)), v^p(t)) + \beta(\rho h v^p_t(t), v^p_t(t)).
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Fazendo integração por partes em (4.14), segue

$$
\begin{aligned}
\Psi'(t) &= \alpha(u^p_{xx}(t), xu^p_x(t)) - \alpha K((u^p + v^p_x)(t), xu^p_x(t)) - \alpha(f_p(u^p(t)), xu^p_x(t)) \\
&+\alpha\left(\frac{\rho h^3}{12}u^p_t(t), xu^p_{xt}(t)\right) + \alpha K((u^p + v^p_x)_x(t), xv^p_x(t)) - \alpha(g_p(v^p(t)), xv^p_x(t)) \\
&+\alpha(\rho h v^p_t(t), xv^p_{xt}(t)) - \beta\left\|u^p(t)\right\|^2 - \beta u^p(L,t)u^p_t(L,t) - \beta K((u^p + v^p_x)(t), u^p(t)) \\
&-\beta(f_p(u^p(t)), u^p(t)) + \beta\left(\frac{\rho h^3}{12}u^p_t(t), u^p_t(t)\right) - \beta K v^p(L,t)v^p_t(L,t) \\
&-\beta K((u^p + v^p_x)(t), v^p_x(t)) - \beta(g_p(v^p(t)), v^p(t)) + \beta\rho h(v^p_t(t), v^p_t(t)).
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

Mas

$$
\begin{aligned}
&-\alpha K((u^p + v^p_x)(t), xu^p_x(t)) = -\alpha K(x(u^p + v^p_x)(t), u^p_x(t)) \\
&= \alpha K((u^p + v^p_x)(t), u^p(t)) + \alpha K(x(u^p + v^p_x)_x(t), u^p(t)) - L\alpha K u^p(L)(u^p + v^p_x)(L) \\
&= \alpha K((u^p + v^p_x)(t), u^p(t)) + \alpha K((u^p + v^p_x)_x(t), xu^p(t)) + \alpha K L u^p(L,t)v^p_t(L,t).
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

Substituindo (4.16) em (4.15), obtemos

$$\begin{aligned}
&\Psi'(t) = \alpha(u^p_{xx}(t), xu^p_x(t)) + \alpha K((u^p + v^p_x)_x(t), x(u^p + v^p_x)(t)) + \alpha K((u^p + v^p_x)(t), u^p(t) \\
&+\alpha K L u^p(L,t) v^p_t(L,t) - \alpha(f_p(u^p(t)), xu^p_x(t)) + \alpha(\frac{\rho h^3}{12} u^p_t(t), xu^p_{xt}(t)) \\
&-\alpha(g_p(v^p(t)), xv^p_x(t)) + \alpha(\rho h v^p_t(t), xv^p_{xt}(t)) - \beta \|u^p(t)\|^2 - \beta u^p(L,t) u^p_t(L,t) \\
&-\beta K |(u^p + v^p_x)(t)|^2 - \beta(f_p(u^p(t)), u^p(t)) + \beta \frac{\rho h^3}{12} |u^p_t(t)|^2 - \beta K v^p(L,t) v^p_t(L,t) \\
&-\beta(g_p(v^p(t)), v^p(t)) + \beta \rho h |v^p_t(t)|^2 .
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Agora, analisaremos alguns termos do lado direito de (4.17).

- Análise de $(u^p_{xx}(t), xu^p_x(t))$.

$$\begin{aligned}
&(u^p_{xx}(t), xu^p_x(t)) = \frac{1}{2}\int_0^L x \frac{d}{dx} |u^p_x(t)|^2 dx = \frac{1}{2} x |u^p_x(x,t)|^2 \Big|_0^L - \frac{1}{2}\int_0^L |u^p_x(t)|^2 dx \\
&= \frac{L}{2} |u^p_x(L,t)|^2 - \frac{1}{2}\int_0^L |u^p_x(t)|^2 dx.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

- Análise de $(u^p_t(t), xu^p_{tx}(t))$

$$\begin{aligned}
&(u^p_t(t), xu^p_{tx}(t)) = \frac{1}{2}\int_0^L x \frac{d}{dx} |u^p_t(t)|^2 dx = \frac{1}{2} x |u^p_t(x,t)|^2 \Big|_0^L - \frac{1}{2}\int_0^L |u^p_t(t)|^2 dx \\
&= \frac{L}{2} |u^p_t(L,t)|^2 - \frac{1}{2}\int_0^L |u^p_t(t)|^2 dx.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

- Análise de $(v^p_t(t), xv^p_{tx}(t))$

$$\begin{aligned}
&(v^p_t(t), xv^p_{tx}(t)) = \frac{1}{2}\int_0^L x \frac{d}{dx} |v^p_t(t)|^2 dx = \frac{1}{2} x |v^p_t(x,t)|^2 \Big|_0^L - \frac{1}{2}\int_0^L |v^p_t(t)|^2 dx \\
&= \frac{L}{2} |v^p_t(L,t)|^2 - \frac{1}{2}\int_0^L |v^p_t(t)|^2 dx.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

- Análise de $-\beta u^p(L,t) u^p_t(L,t)$

$$\begin{aligned}
&-\beta u^p(L,t) u^p_t(L,t) \leq \beta |u^p(L,t)| \cdot |u^p_t(L,t)| \leq \beta c_0 |u^p_t(L,t)| \cdot \|u^p(t)\| \\
&= \frac{\beta c_0}{\sqrt{\xi}} |u^p_t(L,t)| \cdot \sqrt{\xi} \|u^p(t)\| \leq C_2 |u^p_t(L,t)|^2 + \xi \|u^p(t)\|^2 ,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

onde $C_2 = \beta^2 c_0^2/4\xi$, $c_0 > 0$ tal que $|u^p(L,t)| \le c_0 \|u^p(t)\|$ e $\xi > 0$, um número real, a ser escolhido.

- Análise de $-\beta K v^p(L,t) v_t^p(L,t)$

$$\begin{aligned}
&-\beta K v^p(L,t) v_t^p(L,t) \le \beta K \left|v^p(L,t)\right| \cdot \left|v_t^p(L,t)\right| \\
&\le \beta K c_0 \left|v_t^p(L,t)\right| \cdot \left|v_x^p(t)\right| \le \beta K c_0 \left|v_t^p(L,t)\right| \left(\left|\left(u^p + v_x^p\right)(t)\right| + \left|u^p\,(t)\right|\right) \\
&\le \frac{\beta^2 K c_0^2}{4\xi} \left|v_t^p(L,t)\right|^2 + \xi K \left|\left(u^p + v_x^p\right)(t)\right|^2 + \frac{\beta^2 K^2 c_0^2 L^2}{4\xi} \left|v_t^p(L,t)\right|^2 + \xi \left\|u^p\,(t)\right\|^2 \\
&\le C_3 \left|v_t^p(L,t)\right|^2 + \xi K \left|\left(u^p + v_x^p\right)(t)\right|^2 + \xi \left\|u^p\,(t)\right\|^2,
\end{aligned} \tag{4.22}$$

onde $C_3 = \left(1 + KL^2\right) \beta^2 K c_0^2/4\xi$.

- Análise de $(f_p(u^p\,(t)), x u_x^p\,(t))$

Observe que F é de classe $C^1(\mathbb{R})$ e $F(0) = 0$, logo

$$\begin{aligned}
&(f_p(u^p\,(t)), x u_x^p\,(t)) = \int_0^L x f_p(u^p\,(t)) u_x^p\,(t)\, dx = \int_0^L x \frac{d}{dx} F_p(u^p\,(t)) dx \\
&= xF(u^p(x,t))\big|_0^L - \int_0^L F_p(u^p\,(t)) dx = LF(u^p(L,t)) - \int_0^L F_p(u^p\,(t)) dx.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

- Análise de $(g_p(v^p\,(t)), x v_x^p\,(t))$

Sabemos que G é de classe $C^1(\mathbb{R})$ e $G(0) = 0$, assim

$$\begin{aligned}
&(g_p(v^p\,(t)), x v_x^p\,(t)) = \int_0^L x g_p(v^p\,(t)) v_x^p\,(t)\, dx = \int_0^L x \frac{d}{dx} G_p(v^p\,(t)) dx \\
&= xG(v^p(x,t))\big|_0^L - \int_0^L G_p(v^p\,(t)) dx = LG(v^p(L,t)) - \int_0^L G_p(v^p\,(t)) dx.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

- Análise de $((u^p + v_x^p)_x\,(t)\,, x(u^p + v_x^p)\,(t))$

$$\begin{aligned}
&((u^p + v_x^p)_x\,(t)\,, x(u^p + v_x^p)\,(t)) = \frac{1}{2}\int_0^L x \frac{d}{dx} \left|\left(u^p + v_x^p\right)(t)\right|^2 dx \\
&= x \left|\left(u^p + v_x^p\right)(t)\right|^2\Big|_0^L - \frac{1}{2}\int_0^L \left|\left(u^p + v_x^p\right)(t)\right|^2 dx = \frac{L}{2}\left|v_t(L,t)\right| - \frac{1}{2}\int_0^L \left|\left(u^p + v_x^p\right)(t)\right|^2 dx.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

- Análise de $\alpha K((u^p+v_x^p)(t), u^p(t))$

$$\alpha K((u^p+v_x^p)(t), u^p(t)) \leq \alpha K\left|(u^p+v_x^p)(t)\right|\left|u^p(t)\right| \leq \alpha K L\left|(u^p+v_x^p)(t)\right|\left\|u^p(t)\right\|$$
$$\leq \frac{\alpha L}{2} K\left|(u^p+v_x^p)(t)\right|^2+\frac{\alpha K L}{2}\left\|u^p(t)\right\|^2. \tag{4.26}$$

- Análise de $\alpha K L v_t(L,t) u^p(L,t)$

$$\begin{aligned}\alpha K L v_t(L,t) u^p(L,t) &\leq \frac{c_0 \alpha K L}{\sqrt{\xi}}\left|v_t(L,t)\right| \cdot \sqrt{\xi}\left\|u^p(t)\right\| \\ &\leq C_4\left|v_t(L,t)\right|^2+\xi\left\|u^p(t)\right\|^2,\end{aligned} \tag{4.27}$$

onde $C_4=c_0^2 \alpha^2 K^2 L^2 / 4 \xi$.

- Análise de $\beta(f_p(u^p(t)), u^p(t))$

Segue de (4.9) que

$$\beta(f_p(u^p(t)), u^p(t))=\int_0^L \beta f_p(u^p(t)) u^p(t)\, dx \geq \int_0^L(\alpha+\gamma_1) F_p(u^p(t)) dx. \tag{4.28}$$

- Análise de $\beta(g_p(v^p(t)), v^p(t))$

Por (4.10), temos que

$$\beta(g_p(v^p(t)), v^p(t))=\int_0^L \beta g_p(v^p(t)) v^p(t)\, dx \geq \int_0^L(\alpha+\gamma_2) G_p(v^p(t)) dx. \tag{4.29}$$

Substituindo (4.18) – (4.29) em (4.17), obtemos

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) \leq & \frac{\alpha L}{2}\left|u_t^p(L,t)\right|^2-\frac{\alpha}{2}\left\|u^p(t)\right\|^2+\frac{\alpha k L}{2}\left|v_t(L,t)\right|-\frac{\alpha}{2} k\left|(u^p+v_x^p)(t)\right|^2+\frac{\alpha L}{2} k\left|(u^p+v_x^p)(t)\right|^2 \\
&+\frac{\alpha k L}{2}\left\|u^p(t)\right\|^2+C_4\left|v_t(L,t)\right|^2+\xi\left\|u^p(t)\right\|^2-\alpha L F_p(u^p(L,t))+\frac{\alpha \rho h^3 L}{24}\left|u_t^p(L,t)\right|^2 \\
&-\frac{\alpha \rho h^3}{24}\left|u_t^p(t)\right|^2-\alpha L G_p(v^p(L,t))+\frac{\alpha \rho h L}{2}\left|v_t^p(L,t)\right|^2-\frac{\alpha \rho h}{2}\left|v_t^p(t)\right|^2-\beta\left\|u^p(t)\right\|^2 \\
&+C_2\left|u_t^p(L,t)\right|^2+\xi\left\|u^p(t)\right\|^2-\beta k\left|(u^p+v_x^p)(t)\right|^2-\gamma_1 \int_0^L F_p(u^p(x,t)) dx+\frac{\beta \rho h^3}{12}\left|u_t^p(t)\right|^2 \\
&+C_3\left|v_t^p(L,t)\right|^2+\xi k\left|(u^p+v_x^p)(t)\right|^2+\xi\left\|u^p(t)\right\|^2-\gamma_2 \int_0^L G_p(v^p(x,t)) dx+\beta \rho h\left|v_t^p(t)\right|^2,
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Usando as condições de fronteira (3.57), (3.58) e sabendo que $F_p(u^p(L,t)) \geq 0$ e $G_p(v^p(L,t)) \geq 0$ em (4.30), temos

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) &\leq \left(\frac{\alpha\sqrt{K}L}{2} - \beta\right) \|u^p\,(t)\|^2 + \left(\frac{\alpha\sqrt{K}L}{2} - \beta\right) K\left|(u^p + v_x^p)\,(t)\right|^2 \\
&\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{\rho h^3}{12}\left|u_t^p\,(t)\right| + \left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)\rho h\left|v_t^p\,(t)\right| - \gamma_1\int_0^L F_p(u^p\,(t))dx \\
&-\gamma_2\int_0^L G_p(v^p\,(t))dx + \left(\frac{\alpha L}{2} + \frac{\alpha\rho h^3}{24} + C_2\right)\left|u^p(L,t)\right|^2 \\
&+\left(\frac{\alpha KL}{2} + \frac{\alpha\rho hL}{2} + C_3 + C_4\right)\left|v^p(L,t)\right|^2 + \xi(1+c_0^2)\,\|u^p\,(t)\|^2,
\end{aligned} \tag{4.31}$$

qual podemos reescrever por

$$\Psi'(t) \leq -\left(C_5 - 2\xi\right)E_p(t) + C_6\left|u_t^p(L,t)\right|^2 + C_7\left|v_t^p(L,t)\right|^2, \tag{4.32}$$

onde C_5, C_6 e C_7 são as constantes positivas

$$C_5 = \min\left\{\alpha + 2\beta - \alpha kL, \alpha + 2\beta - \alpha L, \alpha - 2\beta, \gamma_1, \gamma_2\right\},$$

$$C_6 = \frac{\alpha L}{2} + \frac{\alpha\rho h^3}{24} + C_2 \quad \text{e} \quad C_7 = \frac{\alpha kL}{2} + \frac{\alpha\rho hL}{2} + C_3 + C_4.$$

A positividade de C_5 é garantida por (4.8) – (4.10).

Agora, derivando (4.6) e, em seguida, usando (4.5) e (4.32), obtemos

$$E'_{p_\epsilon}(t) \leq -\epsilon\left(C_5 - 2\xi\right)E_p(t) - \left(1 - \epsilon C_6\right)\left|u_t^p(L,t)\right|^2 - \left(1 - \epsilon C_7\right)\left|v_t^p(L,t)\right|^2.$$

Tomando $0 < \epsilon \leq \epsilon_1 = \min\left\{1/C_6, 1/C_7\right\}$ e $0 < \xi < C_5/2$, obtemos

$$E'_{p_\epsilon}(t) + \kappa E_{p_\epsilon} \leq 0,$$

com $\kappa = \min\left\{\epsilon_0, \epsilon_1\right\}\left(C_5 - 2\xi\right) > 0$. Dessa forma

$$E_{p_\epsilon}(t) \leq E_{p_\epsilon}(0)e^{-\kappa t},\ \forall t \geq 0.$$

Combinando a desigualdade anterior com (4.13), segue

$$E_p(t) \leq 4E_p(0)e^{-\kappa t},\ \forall t \geq 0. \tag{4.33}$$

Como F_p e G_p são contínuas, segue por (3.59) e (3.60) que

$$F_p(u^p(\cdot,t)) \to F_p(u(\cdot,t)) \text{ q.s em } (0,L)\,,\ \forall t \geq 0, \tag{4.34}$$

$$G_p(v^p(\cdot,t)) \to G_p(v(\cdot,t)) \text{ q.s em } (0,L)\,,\ \forall t \geq 0. \tag{4.35}$$

Por outro lado, como $f_p \to f$ e $g_p \to g$ uniformemente em limitados de $\mathbb{R}$, segue

$$F_p(u(\cdot,t)) \to F(u(\cdot,t)) \text{ q.s em } (0,L)\,,\ \forall t \geq 0, \tag{4.36}$$

$$G_p(v(\cdot,t)) \to G(v(\cdot,t)) \text{ q.s em } (0,L)\,,\ \forall t \geq 0. \tag{4.37}$$

De acordo com (4.34) – (4.37), temos

$$F_p(u^p(\cdot,t)) \to F(u(\cdot,t)) \text{ q.s em } (0,L)\,,\ \forall t \geq 0, \tag{4.38}$$

$$G_p(v^p(\cdot,t)) \to G(v(\cdot,t)) \text{ q.s em } (0,L)\,,\ \forall t \geq 0. \tag{4.39}$$

Por (4.33), obtemos que

$$\int_0^L F_p(u^p(x,t))dx \leq 4E_p(0),$$

$$\int_0^L G_p(v^p(x,t))dx \leq 4E_p(0).$$

Assim, usando as convergências (3.12) – (3.17), (3.33) e (3.34), temos que

$$\lim_{p\to\infty}\inf \int_0^L F_p(u^p\,(x,t))dx \leq 4E(0), \tag{4.40}$$

$$\lim_{p\to\infty}\inf \int_0^L G_p(v^p\,(x,t))dx \leq 4E(0). \tag{4.41}$$

Por (4.38) – (4.41) e pelo Lema (1.5), concluímos que

$$\int_0^L F(u\,(x,t))dx \leq \lim_{p\to\infty}\inf \int_0^L F_p(u^p\,(x,t))dx,$$

e

$$\int_0^L G(v\,(x,t))dx \leq \lim_{p\to\infty}\inf \int_0^L G_p(v^p\,(x,t))dx.$$

Então, passando o limite inferior em (4.33), obtemos

$$E(t) \leq \lim_{p\to\infty}\inf\ E_p(t) \leq 4\lim_{p\to\infty}\inf E_p(0)e^{-\kappa t} = 4E(0)e^{-\kappa t},$$

o que prova o Teorema 4.1. ■

Apêndice A

Existência e Prolongamento de Soluções Aproximadas

O nosso objetivo neste Apêndice é justificar a existência de $\mu^{jkm}(t)$ e $h^{jkm}(t)$, soluções do sistema (2.21).

Sejam $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto e $f : G \to \mathbb{R}^n$ uma função não necessariamente contínua. Dizemos que uma função absolutamente contínua $x(t)$ definida em algum intervalo da reta I tal que $(x(t), t) \in G$, $\forall\ t \in I$, é uma solução para o problema

$$x' = f(x,t) \tag{A.1}$$

se $x(t)$ satisfaz $(A.1)$ q.s. em (x,t). Seja $(x_0, t_0) \in G$. Associado a $(A.1)$ e a (x_0, t_0) tem o problema de valor inicial

$$\left| \begin{array}{l} x' = f(x,t), \\ x(t_0) = x_0. \end{array} \right. \tag{A.2}$$

Dizemos que uma função $f : G \to \mathbb{R}^n$ está nas **Condições de Carathéodory** sobre G se

(i) $f(x,t)$ é mensurável em t para cada x fixado,

(ii) $f(x,t)$ é contínua em x para cada t fixado,

(iii) para cada compacto K de G existe uma função real integrável $m_K(t)$ tal que

$$|f(x,t)| \leq m_K(t), \quad \forall\ (x,t) \in K.$$

Consideremos o retângulo

$$R = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1};\ \ |x - x_0| \leq b,\ \ |t - t_0| \leq a,\ b > 0,\ a > 0\right\}.$$

Teorema A.1 (Carathéodory) *Seja $f : R \to \mathbb{R}^n$ nas Condições de Carathéodory sobre R, então existe uma solução $x(t)$ de $(A.2)$ sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \alpha$, $\alpha > 0$.*

Corolário A.1 *Sejam $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto e f satisfazendo as Condições de Carathéodory sobre G, então o problema $(A.2)$ tem solução para qualquer $(x_0, t_0) \in G$.*

Seja $\varphi(t)$ uma solução de $(A.1)$ sobre I e $I \subset I_1$.Diz-se que $\varphi(t)$ tem um **prolongamento** até I_1, se existe $\varphi_1(t)$ solução de $(A.1)$ sobre I_1 e $\varphi_1(t) = \varphi(t), \forall\ t \in I$.

Teorema A.2 (Prolongamento) *Sejam $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aberto e limitado e $f : G \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as duas primeiras Condições de Carathéodory sobre G e existe uma uma função integrável $m(t)$ tal que*
$|f(x,t)| \leq m(t), \quad \forall\ (x,t) \in G$. Seja φ uma solução da equação $(A.1)$ sobre o intervalo $]a,b[$, então

(i) existem $\varphi(a_+), \varphi(b_-)$,

(ii) se $(\varphi(b_-), b) \in G$ então φ pode ser prolongado até $]a, b+\delta[$ para algum $\delta > 0$. Resultado análogo para a,

(iii) $\varphi(t)$ pode ser prolongada até um intervalo (γ, ω) tal que $(\varphi(\gamma_+), \gamma), (\varphi(\omega_-), \omega) \in \partial G$ (∂G é a fronteira de G).

Corolário A.2 *Sejam $G = U \times [0,T]$, $T > 0$, $U = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| \leq b\}$, $b > 0$ e f nas condições do Teorema A.2. Seja $\varphi(t)$ uma solução de*

$$\left|\begin{array}{l} x' = f(x,t), \\ x(t_0) = x_0, \quad |x_0| \leq b. \end{array}\right.$$

Suponhamos que em qualquer intervalo I onde $\varphi(t)$ está definida tem-se $|\varphi(t)| \leq M, \forall\, t \in I$, M independente de I e $M < b$. Então φ pode ser prolongada até $[0, T]$.

As demonstrações dos teoremas e dos corolários deste Apêndice podem ser encontradas em [6] e [22]

Voltemos agora ao nosso problema. Fazendo $\psi = \varphi = w_i^k$ em $(2.21)_1$, temos

$$\left|\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{\rho h^3}{12} \left(w_j^k(x), w_i^k(x)\right) \mu_{tt}^{jkm}(t) + \sum_{j=1}^{m} \rho h \left(w_j^k(x), w_i^k(x)\right) h_{tt}^{jkm}(t) \\ \displaystyle+\sum_{j=1}^{m} K\left(w_j^k(x) + w_{jx}^k(x), w_j^k(x) + w_{jx}^k(x)\right)\left(\mu^{jkm} + h^{jkm}\right)(t) + \sum_{j=1}^{m} \left(w_j^k(L), w_i^k(L)\right) \mu^{jkm}(t) \\ \displaystyle+\sum_{j=1}^{m} \left(\left(w_j^k(x), w_i^k(x)\right)\right) \mu^{jkm}(t) + \sum_{j=1}^{m} \left(w_j^k(L), w_i^k(L)\right) h^{jkm}(t) \\ \displaystyle+\sum_{j=1}^{m} \left(f(u^{km}) + g(v^{km}), w_i^k\right) = \left(a(x,t) + b(x,t), w_i^k\right) \\ \mu^{jkm}(0) = \phi_{jk},\ \mu_t^{jkm}(0) = \beta_{jk}, \\ h^{jkm}(0) = \alpha_{jk},\ h_t^{jkm}(0) = \theta_{jk}. \end{array}\right. \tag{A.3}$$

Considere as seguintes matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{\rho h^3}{12} & & & 0 \\ & \frac{\rho h^3}{12} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{\rho h^3}{12} \end{bmatrix}_{m\times m}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} \rho h & & & 0 \\ & \rho h & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \rho h \end{bmatrix}_{m\times m},$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix}_{2m\times 2m}, \qquad B_1 = \left[\left(w_j^k(L), w_i^k(L)\right)\right]_{1\leq i,\ j\leq m}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 & B_1 \\ B_1 & B_1 \end{bmatrix}_{2m\times 2m},$$

$$C_1 = \left[K\left(w_j^k(x) + w_{jx}^k(x), w_i^k(x) + w_{jx}^k(x)\right) + \mathbb{I}\right]_{1\leq i,\ j\leq m},$$

onde $\mathbb{I}$ é a matriz identidade $m \times m$,

$$C_2 = \left[\left(w_j^k(x) + w_{jx}^k(x), w_i^k(x) + w_{jx}^k(x)\right)\right]_{1\leq i,\ j\leq m},$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix}_{2m\times 2m},$$

$$X = \begin{bmatrix} \mu^{1km}(t) \\ \mu^{2km}(t) \\ \vdots \\ \mu^{mkm}(t) \\ h^{1km}(t) \\ h^{2km}(t) \\ \vdots \\ h^{mkm}(t) \end{bmatrix}_{2m\times 1}, \ D = \begin{bmatrix} \left(f(u^{km}) + g(v^{km}), w_1^k\right) \\ \left(f(u^{km}) + g(v^{km}), w_2^k\right) \\ \vdots \\ \left(f(u^{km}) + g(v^{km}), w_m^k\right) \\ \left(f(u^{km}) + g(v^{km}), w_1^k\right) \\ \left(f(u^{km}) + g(v^{km}), w_2^k\right) \\ \vdots \\ \left(f(u^{km}) + g(v^{km}), w_m^k\right) \end{bmatrix}_{2m\times 1}, \ X_0 = \begin{bmatrix} \phi_{1k} \\ \phi_{2k} \\ \vdots \\ \phi_{mk} \\ \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \vdots \\ \alpha_{mk} \end{bmatrix}_{2m\times 1}$$

$$E = \begin{bmatrix} \left(a(t) + b(t), w_1^k\right) \\ \left(a(t) + b(t), w_2^k\right) \\ \vdots \\ \left(a(t) + b(t), w_m^k\right) \\ \left(a(t) + b(t), w_1^k\right) \\ \left(a(t) + b(t), w_2^k\right) \\ \vdots \\ \left(a(t) + b(t), w_m^k\right) \end{bmatrix}_{2m\times 1}, \qquad X_1 = \begin{bmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \\ \vdots \\ \beta_{mk} \\ \theta_{1k} \\ \theta_{2k} \\ \vdots \\ \theta_{mk} \end{bmatrix}_{2m\times 1}.$$

Assim em termos das matrizes acima, o sistema $(A.3)$ pode ser escrito como

$$\left| \begin{array}{l} AX_{tt} + BX_t + CX + D = E, \\ X(0) = X_0, \quad X_t(0) = X_1. \end{array} \right. \tag{A.4}$$

Como $\rho h^3/12 > 0$ e $\rho h > 0$, segue que o $\det A \neq 0$. Assim A é inversível. Portanto, multiplicando $(\text{A.4})_1$ por A^{-1} a esquerda, temos

$$\left| \begin{array}{l} X_{tt} = -A^{-1}BX_t - A^{-1}CX - A^{-1}D + A^{-1}E, \\ X(0) = X_0, \quad X_t(0) = X_1. \end{array} \right. \tag{A.5}$$

Fazendo $Z = X_t$ no sistema (A.5) obtemos

$$\left| \begin{array}{l} Z_t = -A^{-1}BZ - A^{-1}CX - A^{-1}D + A^{-1}E, \\ X(0) = X_0, \quad X_t(0) = X_1. \end{array} \right. \tag{A.6}$$

Consideremos I a matriz identidade $2m \times 2m$, 0 a matriz nula $2m \times 2m$, $\overline{0}$ a matriz nula $2m \times 1$ e

$$Y(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad Y_0 = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \end{bmatrix}.$$

Obtemos por (A.6)

$$\left| \begin{array}{l} Y_t = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A^{-1}C & -A^{-1}B \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} \overline{0} \\ -A^{-1}D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{0} \\ A^{-1}E \end{bmatrix}, \\ Y(0) = Y_0. \end{array} \right. \tag{A.7}$$

Chamando

$$F_1(Y,t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A^{-1}C & -A^{-1}B \end{bmatrix} Y, \qquad F_2(Y,t) = \begin{bmatrix} \overline{0} \\ -A^{-1}D \end{bmatrix}$$

e

$$F_3(Y,t) = \begin{bmatrix} \overline{0} \\ A^{-1}E \end{bmatrix},$$

segue de (A.7) que

$$\left| \begin{array}{l} Y_t = F_1(Y,t) + F_2(Y,t) + F_3(Y,t), \\ Y(0) = Y_0. \end{array} \right. \tag{A.8}$$

Agora mostraremos que $F(Y,t) = F_1(Y,t) + F_2(Y,t) + F_3(Y,t)$ está nas condições de Carathéodory. Seja $G = U \times [0,T]$, onde $U = \{Y \in \mathbb{R}^{4m};\ \|Y\|_{\mathbb{R}^{4m}} \leq b\}$. Então

- Fixado Y, $F_1(Y,t)$, $F_2(Y,t)$ e $F_3(Y,t)$ são mensuráveis em t, pelas hipóteses (2.1) e (2.6).

- Fixado t, a função $F_3(Y,t)$ não depende de Y, portanto, $F_3(Y,t)$ é contínua. A função $F_1(Y,t)$ é contínua em Y, pois é produto de uma matriz de entradas reais pala matriz Y, ou seja, $F_1(Y,t)$ é linear em Y. A função $F_2(Y,t)$ é contínua, pois a matriz A^{-1} é constante e E é formada por funções Lipschitzianas.

- Como Y varia em U e por (2.1), temos que todas as entradas de $F_1(Y,t)$ e de $F_2(Y,t)$ são limitadas por uma constante m_U. As entradas de $F_3(Y,t)$ são integráveis em $[0,T]$, pois as $2m$ primeiras coordenadas são nulas e as $2m$ últimas são, em valor absoluto, iguais a $\left|\left(a(t)+b(t), w_j^k\right)\right|$, $j=1,\ 2,...m$.

Logo

$$\|F(Y,t)\|_{\mathbb{R}^{4m}} \leq M_U(t) = 2m_u + C\left[|a(t)| + |b(t)|\right],$$

com $M_U(t)$ integrável em $[0,T]$. Assim, pelo Corolário (A.1), o sistema (A.8) possui solução em $[0,t_{km}]$, com $t_{km} < T$. ■

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R. A., Sobolev Space, Academic Press, London, 1975.

[2] ARARUNA, F. D., ANTUNES, G. O. and MEDEIROS, L. A., Exact Controllability for the Semilinear Timoshenko's Model of Vibrations of Beams, to appear.

[3] ARARUNA, F. D. and MACIEL, A. B, Existence and Boundary Stabilization of the Semilinear Wave Equation, Nonlinear Analysis T. M. A., 67 (2007), 1288–1305

[4] ARARUNA, F. D. and ZUAZUA E., Controllability of the Kirchhoff System as Limit of the Mindlin-Timoshenko One, to appear.

[5] BREZIS, H., Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications, Dunod, Paris, (1999).

[6] CODDINGTON, E. and LEVINSON, N., Theory of Ordinary Differential Equations, McGrall-Hill, New York, (1955).

[7] KINDERLEHRER, D. and STAMPACCHIA, G., An Introduction to Variational Inequalities and their Applications, Academic Press, New York, (1980) .

[8] KOMORNIK. V and ZUAZUA. E, A Direct Method for Boundary Stabilization of the Wave Equation, J. Math. Pure et Appl., 69 (1990) , 33-54

[9] LAGNESE, J. E., Boundary Stabilization of Thin Plates, SIAM, (1989).

[10] LAGNESE, J. E. and LIONS, J. L., Modelling Analysis and Control of Thin Plates, RMA 6, Masson, Paris, (1988).

[11] CHUESHOV, I. and LASIECKA, I., Global Attractors for Mindlin-Timoshenko Plates and for Their Kirchhoff Limits, Milan j. math., 74 (2006), 117–138.

[12] LIONS, J. L., Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites Non-Linéaires, Dunod, Paris, (1969).

[13] LIONS, J. L. et MAGENES, E., Problèmes aux Limites Non Homogenes et Applications, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, vol. 1, (1968)

[14] LIONS, J. L., Control des Systèmes Distribuées Singuliers, Gauthier Villars, Paris, (1983) .

[15] LIONS, J. L., Contrôlabilité Exacte, Pertubation et Estabilization de Systémes Distribuées, Tome I, RMA 8, Masson, Paris, (1988).

[16] LIONS, J. L., Exact Controllability, Stabilization and Pertubation for Distributed Systems, SIAM Rev., 30 (1988) , 1-68.

[17] LIONS, J. L., Problèmes aux Limites dans les Equations aux Dérivées Partielles, Les Presses de L'Université de Montreal, Montreal, (*1965*).

[18] MINDLIN, R. D., Influece of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates, J. Appl. Mech., 18 (1951) , 31-38.

[19] MEDEIROS, L. A, Tópicos em Equações Diferenciais Parciais, Parte I, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (2006) .

[20] MEDEIROS, L. A, Exact Controllability for a Timoshenko Model of Vibrations of Beams, Advances in Mathematical Sciences and Applications, vol. 2, 1 (1993), 47-61.

[21] MEDEIROS, L. A. e MILLA MIRANDA, M., Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais, Textos de Métodos Matemáticos, vol. 25, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1989.

[22] MEDEIROS, L. A. e RIVERA, P. H., Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais, Textos de Métodos Matemáticos, vol. 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1977.

[23] MILLA MIRANDA, M., Traço para o Dual dos Espaços de Sobolev, Bol. Soc. Paran. Matemática (2ª série), vol. 11, 2 (1990), 131-157.

[24] MILLA MIRANDA, M. e MEDEIROS, L. A., Hidden Regularity for Semilinear Hyperbolic Partial Differential Equations, Annales Faculté des Sciences de Toulouse, vol. IX, 1 (1988), 103-120.

[25] MILLA MIRANDA, M. and MEDEIROS, L. A.,On a Boundary Value Problem for Wave Equation: Existence Uniqueness-Asymptotic Behavior, Rev. Mat. Apl. Universidad de Chile, 17 (1996) 47-73

[26] PARENTE, A, MILLA MIRANDA, M. and SAN GIL JUTUCA, L. P., On Local Solution for a Nonlinear Timoshenko System, Atas do 55^o SBA, UFU, Uberlândia-MG, (2002) , 167-179.

[27] SCHWARTZ, L., Théorie des Distributions, Hermann, 1966.

[28] STRAUSS, W. A., On Weak Solutios of Semilinear Hyperbolic Equations, An. Acad. Bras. Ciências, 42 (4) (1970) , 645-651.

[29] TIMOSHENKO, S. and WOINOWSKY-KRIEGER, S., Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, New York, (1959) .

[30] ZUAZUA, E., Stabilit and Decay for a Class of Nonlinear Hyperbolic Problems, Asymptotic Analysis 1, (1988), 161-185.