UFPB/CCEN/Departamento de Matemática

3ª Prova de Introdução à Análise Funcional - Verão 2012

Escolha 5 das questões abaixo.

1. Seja H um espaço de Hilbert sobre o corpo $\mathbb{F}$ =($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
   (a) Sejam $x, y \in H$. Prove que $x \perp y$ se, e somente se, $\|x+ty\| \geq \|x\|$ para todo $t \in \mathbb{F}$.
   (b) Enuncie e prove o Teorema da Projeção Ortogonal.

2. Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in L(H)$.
   (a) Prove que T é normal se, e somente se, $\|Tx\| = \|T^*x\|$ para todo $x \in H$.
   (b) Se T é normal e $\lambda \in \mathbb{C}$ é tal que $\|(T-\lambda)x\| \geq C\|x\|$ para algum $C > 0$ e para todo $x \in H$ então $\lambda \in \rho(T)$.

3. Sejam $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ uma função contínua e $M_g : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ o operador de multiplicação por g, $M_g(\psi)(t) = g(t)\psi(t)$.
   (a) Compute M_g^* e prove que M_g é um operador normal.
   (b) Mostre que o espectro de M_g coincide com a imagem de g.

4. Sejam H um espaço de Hilbert e $T : H \to H$ um operador linear de posto finito.
   (a) Prove que existem um conjunto ortonormal finito $\{e_1, \ldots, e_k\}$ e vetores linearmente independentes $y_1, \ldots, y_k \in H$ tais que $Tx = \sum_{j=1}^k \langle y_j, x\rangle e_j$. Verifique ainda que $T^*x = \sum_{j=1}^k \langle e_j, x\rangle y_j$.
   (b) Mostre que T é auto-adjunto se, e somente se, $[\{e_1, \ldots, e_k\}] = [\{y_1, \ldots, y_k\}]$ e a matriz $A = (\langle e_i, y_j\rangle)_{k\times k}$ é hermitiana (isto é, $\langle e_i, y_j\rangle = \overline{\langle e_j, y_i\rangle}$).

5. Suponha que $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ é uma base ortonormal do espaço de Hilbert H e seja P_n a projeção ortogonal sobre $M_n = [\{e_1, \ldots, e_n\}]$.
   (a) Seja $T \in L(H)$ e considere, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sup\{\|Tx\| : x \in M_n^\perp \text{ e } \|x\| = 1\}$. Prove que T é compacto se, e somente se, $a_n \to 0$.
   (b) Prove que para todo $T \in L_0(H)$, $T_n = P_nTP_n \to T$.

6. Seja $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ uma função contínua e seja $T_K : L^2[0,1] \hookleftarrow$ o operador compacto dado por $T_K\psi(t) = \int_0^1 K(t,s)\psi(s)\, ds$.
   (a) Mostre que T_K é auto-adjunto se, e somente se, $K(s,t) = \overline{K(t,s)}$, para todo $t, s \in [0,1]$.
   (b) Calcule a norma de T_K para $K(s,t) = s^2 + t^2$.