UFPB/CCEN/Departamento de Matemática

3ª Prova de Introdução à Análise Funcional

Professor: Carlos Bocker
Aluno:

1. Sejam H um espaço de Hilbert complexo de dimensão infinita e $T \in L(H)$. Mostre que:
   (a) (0,5 ponto) T é normal se, e somente se, $\|Tx\| = \|T^*x\|$, para todo $x \in H$
   (b) (0,5 ponto) Se T é normal, então $\operatorname{Nuc} T = \operatorname{Nuc} T^* = (\operatorname{Im} T)^{\perp}$; consequentemente, se $\alpha \in \mathbb{C}$ é autovalor do operador normal T, então $\bar{\alpha}$ é autovalor de T^*.
   (c) (0,5 ponto) Se $\alpha \neq \beta$ são autovalores de um operador normal T, então os auto-espaços correspondentes são ortogonais entre si.
   (d) (0,5 ponto) Se $T^2 = T$ e T é normal então T é auto-adjunto e, portanto é um operador de projeção ortogonal.
   (e) (1 ponto) Se T é normal então o **espectro residual** de T é vazio.
   (f) (1 ponto) Se T é compacto e normal então $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$.

2. Seja H um espaço de Hilbert complexo e $T \in L(H)$. Definimos o espectro aproximado de T, $\sigma_a(T)$, pelo conjunto dos números complexos λ tais que existe uma sequência $(h_n)_n$ de vetores unitários em H com $\|(T - \lambda)h_n\| \to 0$.
   (a) (1 ponto) Mostre que $\sigma_a(T) \subseteq \sigma(T)$ e que se T for auto-adjunto então vale a igualdade.
   (b) (1 ponto) Dê um exemplo onde tem-se $\sigma_a(T) \neq \sigma(T)$.

3. (1 ponto) Se $T \in L_0(H)$ é auto-adjunto, mostre que $m = \inf_{\|h\|=1}\langle Th, h\rangle$ e $M = \sup_{\|h\|=1}\langle Th, h\rangle$ são o menor e o maior autovalor de T, respectivamente.

4. (2 pontos) Seja $T : l^2(\mathbb{Z}) \to l^2(\mathbb{Z})$ dado por $(Tx)_n = (-i)(x_{n+1} - x_{n-1})$, sendo $x = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots)$. Mostre que T é limitado, que seu espectro é real e calcule seu raio espectral.

5. (2 pontos) Enuncie e prove a primeira e a segunda identidades do resolvente.